

Exercices pour les TP (solutionnaire)

Méthodes de preuve:

1- Montrons que la somme de 2 nombres impairs est pair.

Soit $m_1 = 2i_1 + 1$ et $m_2 = 2i_2 + 1$
deux nombres impairs, i_1 et i_2 entiers

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= 2i_1 + 1 + 2i_2 + 1 \\ &= 2(i_1 + i_2 + 1) \\ &= 2i_3 \quad i_3 \text{ entier} \Rightarrow \text{c'est un nombre pair!} \end{aligned}$$

2- Montrons par induction que $n^2 \geq n$, $\forall n \geq 1$

montrons que c'est vrai pour $n=1$: $n^2 = 1^2 \geq 1$

montrons que c'est vrai pour $n+1$: $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq n+1$

\Rightarrow vrai pour n tel $\forall n \geq 1$

3- Montrons par induction que

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$$

montrons que c'est vrai pour $n=1$: $1^2 = \frac{(1)(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6}$

$$1 = \frac{6}{6}$$

montrons que
c'est vrai pour
 $n+1$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + n^2 + 2n + 1 = \frac{(n^2 + 3n + 2)(2n + 3)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + n^2 + 2n + 1 = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

\Downarrow

$$\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} + 6(n+1)^2 = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

$$\frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6n^2 + 2n + 6}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

$$2n^3 + 9n^2 + 13n + 6 = 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6$$

\Rightarrow vrai $\forall n \in \mathbb{N}$

4. Montrons par contradiction que pour des entiers m et n , si la somme $m+n$ est paire alors soit m et n sont pairs ou m et n sont impairs.

prenons m impair et n pair et montrons que la somme n est pas pair.

$$m = 2i_1 + 1 \quad i_1 \text{ et } i_2 \text{ entiers}$$

$$n = 2i_2$$

$$m+n = 2i_1 + 1 + 2i_2$$

$$= 2(i_1 + i_2) + 1$$

i_3
entier

IMPAIR !!