

Utilisation des tableaux sémantiques dans les logiques de description

IFT6281 Web Sémantique

Jacques Bergeron

Département d'informatique et de recherche opérationnelle

Université de Montréal

`bergerja@iro.umontreal.ca`

Mars 2011

Méthode des tableaux sémantiques

Étapes

1. Faire la négation d'un énoncé
2. Phase d'expansion du tableau. On applique les règles d'expansion (de "déconstruction")
 - ▶ chaque branche est une conjonction
 - ▶ certaines règles vont créer de nouvelles branches
 - ▶ on arrête de développer une branche quand aucune règle n'est applicable
 - ▶ les feuilles sont des axiomes
3. On essaie de "fermer" les branches (trouver des contradictions)

Méthode des tableaux sémantiques

Arrêt

- ▶ Si on ferme toutes les branches
 - ▶ La négation de l'énoncé est impossible
 - ▶ Donc l'énoncé est valide
- ▶ Si une branche reste ouverte
 - ▶ Elle donne un exemple de la négation de l'énoncé
 - ▶ Donc au moins un contre-exemple de l'énoncé existe
 - ▶ Donc l'énoncé n'est pas valide

Méthode des tableaux sémantiques

Pour chaque logique

- ▶ Définir comment faire la négation d'un énoncé
- ▶ Définir les règles d'expansion (de déconstruction) relatives à chaque constructeur
 - ▶ Montrer que le facteur de branchement lors de la création des branches est fini
 - ▶ Montrer que les règles sont bien monotones décroissantes
- ▶ Définir les règles de fermeture des branches
- ▶ Prouver la complétude et la validité de ces règles en regard de la logique concernée.

On utilise une logique simple

Constructeurs

- ▶ Négation : $\neg A$ avec signification habituelle
- ▶ Implication : $A \Rightarrow B$ avec signification habituelle

Négation d'énoncé

On ajoute un "signe" (T ou F) à chaque énoncé ex. FX veut dire intuitivement que l'on assume que X est Faux

Règles d'expansion

- ▶ $T\neg A \vdash FA$ i.e. $T\neg A \equiv T\neg A \wedge FA$
- ▶ $F\neg A \vdash TA$
- ▶ $T(A \Rightarrow B) \vdash FA \vee TB$
- ▶ $F(A \Rightarrow B) \vdash TA \wedge FB$

Conditions de fermeture

- ▶ Fermer la branche si contradiction i.e. $TX \wedge FX$

Premier exemple

Est-ce que l'énoncé

$$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$$

est valide?

C'est-à-dire vrai pour toutes affectations à X et Y

Exemple valide - 0

$$1 - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$$

Préliminaire

Ajouter le signe F à l'énoncé

Exemple valide - 1

- ★1 - $F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$
- 2 - $\neg X \Rightarrow Y$
- 3 - $F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$

Règle

$F(A \Rightarrow B) \vdash \neg A \wedge B$

Exemple valide - 2

$$\sqrt{1 - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)}$$

$$2 - TX \Rightarrow Y$$

$$\star 3 - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$$

$$4 - TX \Rightarrow \neg Y$$

$$5 - F\neg X$$

Règle

$$F(A \Rightarrow B) \vdash TA \wedge FB$$

Exemple valide - 3

$$\sqrt{1} - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$$

$$2 - TX \Rightarrow Y$$

$$\sqrt{3} - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$$

$$4 - TX \Rightarrow \neg Y$$

$$\star 5 - F\neg X$$

$$6 - TX$$

Règle

$$F\neg A \vdash TA$$

Exemple valide - 4

$$\sqrt{1} - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$$

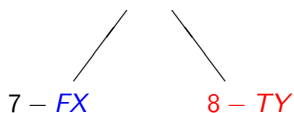
$$\star 2 - TX \Rightarrow Y$$

$$\sqrt{3} - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$$

$$4 - TX \Rightarrow \neg Y$$

$$\sqrt{5} - F\neg X$$

$$6 - TX$$



Règle

$$T(A \Rightarrow B) \vdash FA \vee TB$$

Exemple valide - 5

$$\sqrt{1} - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$$

$$\sqrt{2} - TX \Rightarrow Y$$

$$\sqrt{3} - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$$

$$4 - TX \Rightarrow \neg Y$$

$$\sqrt{5} - F\neg X$$

$$6 - TX$$

$$\square 7 - FX$$

$$8 - TY$$

Fermeture de branche

Exemple valide - 6

$\sqrt{1} - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$

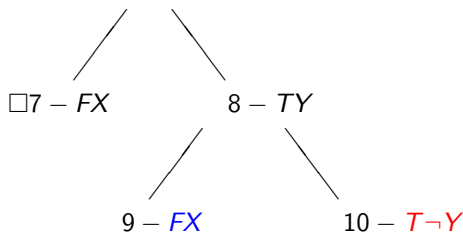
$\sqrt{2} - TX \Rightarrow Y$

$\sqrt{3} - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$

★4 - $TX \Rightarrow \neg Y$

$\sqrt{5} - F\neg X$

6 - TX



Règle

$T(A \Rightarrow B) \vdash FA \vee TB$

Exemple valide - 7

$$\sqrt{1} - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$$

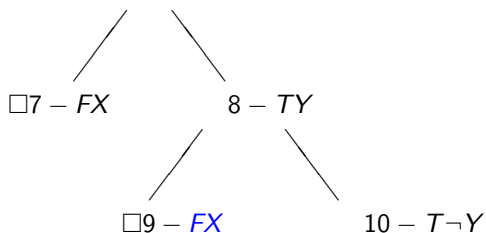
$$\sqrt{2} - TX \Rightarrow Y$$

$$\sqrt{3} - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$$

$$\sqrt{4} - TX \Rightarrow \neg Y$$

$$\sqrt{5} - F\neg X$$

$$6 - TX$$



Fermeture de branche

Exemple valide - 9

$$\sqrt{1} - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$$

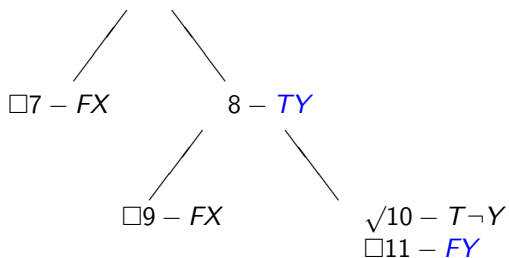
$$\sqrt{2} - TX \Rightarrow Y$$

$$\sqrt{3} - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$$

$$\sqrt{4} - TX \Rightarrow \neg Y$$

$$\sqrt{5} - F\neg X$$

$$6 - TX$$



Fermeture de branche

Exemple valide - 10

$$\sqrt{1} - F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$$

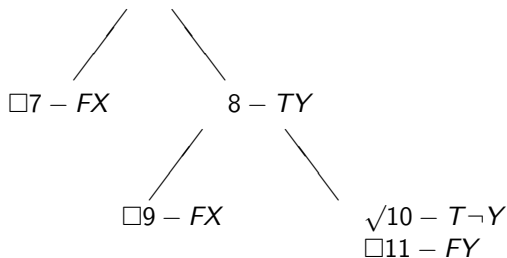
$$\sqrt{2} - TX \Rightarrow Y$$

$$\sqrt{3} - F(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X$$

$$\sqrt{4} - TX \Rightarrow \neg Y$$

$$\sqrt{5} - F\neg X$$

$$6 - TX$$



Toutes les branches sont fermées

⇒ La négation est impossible

⇒ L'énoncé est valide

Deuxième exemple

Est-ce que l'énoncé

$$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((\neg X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow Y)$$

est valide?

C'est-à-dire vrai pour toutes affectations à X et Y

Exemple non-valide

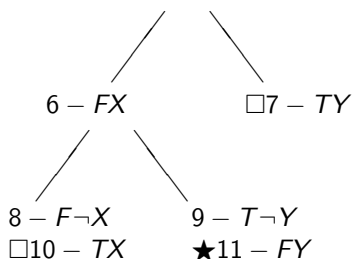
1 - $F(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((\neg X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow Y)$

2 - $TX \Rightarrow Y$

3 - $F(\neg X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow Y$

4 - $T\neg X \Rightarrow \neg Y$

5 - FY



Résultat :

$1 \vdash 2, 3; 3 \vdash 4, 5; 2 \vdash 6, 7$; ferme7; $4 \vdash 8, 9; 8 \vdash 10$; ferme10; $9 \vdash 11$

Une branche n'est pas fermée

\Rightarrow On a un contre-exemple $X = F, Y = F$

\Rightarrow L'énoncé n'est pas valide