

## Valeurs aléatoires communes (VAC)

On utilise  $\Delta = X_2 - X_1$  pour estimer  $\mu_2 - \mu_1 = E[X_2] - E[X_1]$ . On a

$$\text{Var}[\Delta] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] - 2 \text{Cov}[X_1, X_2].$$

## Valeurs aléatoires communes (VAC)

On utilise  $\Delta = X_2 - X_1$  pour estimer  $\mu_2 - \mu_1 = E[X_2] - E[X_1]$ . On a

$$\text{Var}[\Delta] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] - 2 \text{Cov}[X_1, X_2].$$

Objectif: induire une corrélation positive entre  $X_1$  et  $X_2$  sans changer leurs lois individuelles.

## Valeurs aléatoires communes (VAC)

On utilise  $\Delta = X_2 - X_1$  pour estimer  $\mu_2 - \mu_1 = E[X_2] - E[X_1]$ . On a

$$\text{Var}[\Delta] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] - 2 \text{Cov}[X_1, X_2].$$

Objectif: induire une corrélation positive entre  $X_1$  et  $X_2$  sans changer leurs lois individuelles.

Technique: utiliser les mêmes nombres aléatoires pour simuler les deux systèmes, en essayant de maintenir la synchronisation le mieux possible.

## Valeurs aléatoires communes (VAC)

On utilise  $\Delta = X_2 - X_1$  pour estimer  $\mu_2 - \mu_1 = E[X_2] - E[X_1]$ . On a

$$\text{Var}[\Delta] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] - 2 \text{Cov}[X_1, X_2].$$

Objectif: induire une corrélation positive entre  $X_1$  et  $X_2$  sans changer leurs lois individuelles.

Technique: utiliser les mêmes nombres aléatoires pour simuler les deux systèmes, en essayant de maintenir la synchronisation le mieux possible.

Si  $X_k = f_k(\mathbf{U}_k) = f_k(U_{k,1}, U_{k,2}, \dots)$  pour  $k = 1, 2$ , utiliser des VAC partout veut dire prendre  $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$ .

## Valeurs aléatoires communes (VAC)

On utilise  $\Delta = X_2 - X_1$  pour estimer  $\mu_2 - \mu_1 = E[X_2] - E[X_1]$ . On a

$$\text{Var}[\Delta] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] - 2 \text{Cov}[X_1, X_2].$$

**Objectif:** induire une corrélation positive entre  $X_1$  et  $X_2$  sans changer leurs lois individuelles.

**Technique:** utiliser les mêmes nombres aléatoires pour simuler les deux systèmes, en essayant de maintenir la **synchronisation** le mieux possible.

Si  $X_k = f_k(\mathbf{U}_k) = f_k(U_{k,1}, U_{k,2}, \dots)$  pour  $k = 1, 2$ , utiliser des VAC partout veut dire prendre  $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$ .

**Théorème.** Si  $f_1$  et  $f_2$  sont monotones dans le même sens par rapport à tous leurs arguments, alors  $\text{Cov}[X_1, X_2] \geq 0$ .

## Valeurs aléatoires communes (VAC)

On utilise  $\Delta = X_2 - X_1$  pour estimer  $\mu_2 - \mu_1 = E[X_2] - E[X_1]$ . On a

$$\text{Var}[\Delta] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] - 2 \text{Cov}[X_1, X_2].$$

**Objectif:** induire une corrélation positive entre  $X_1$  et  $X_2$  sans changer leurs lois individuelles.

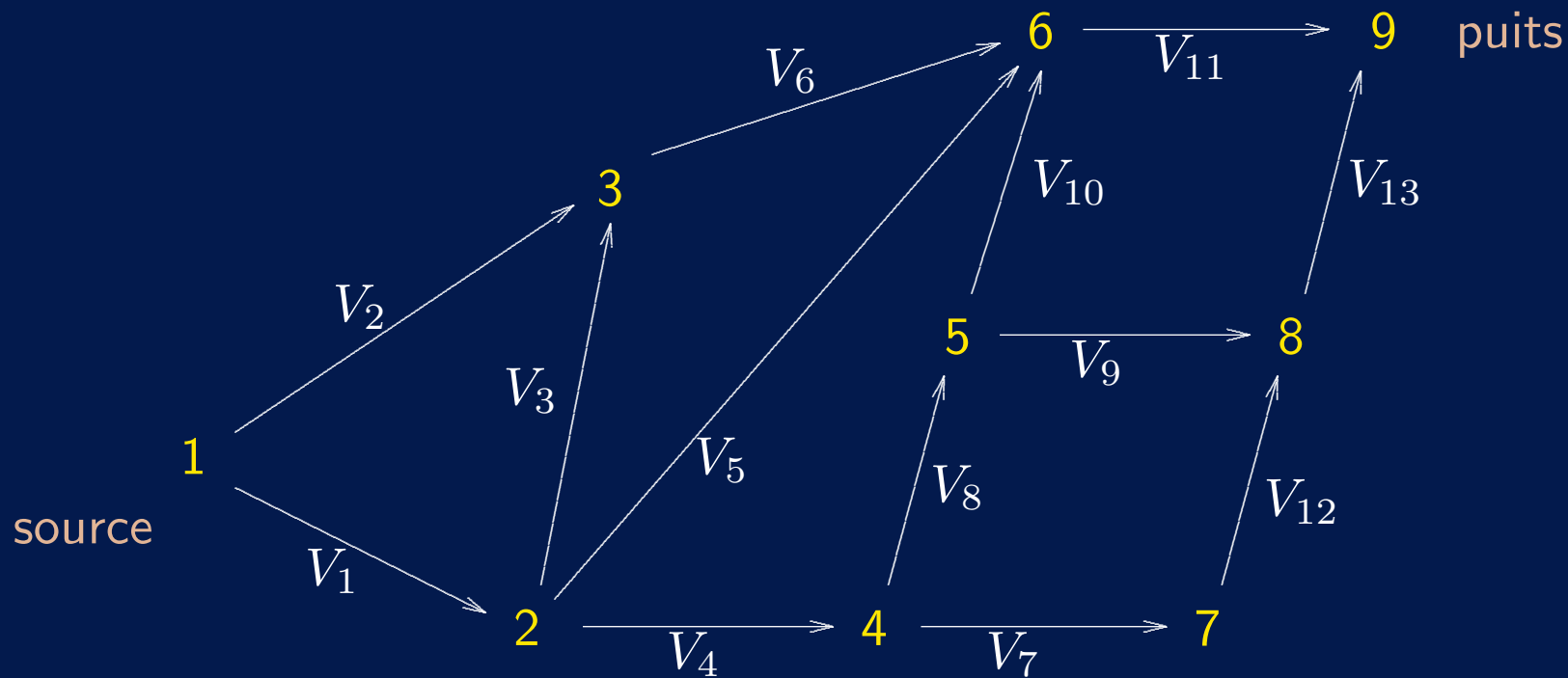
**Technique:** utiliser les mêmes nombres aléatoires pour simuler les deux systèmes, en essayant de maintenir la **synchronisation** le mieux possible.

Si  $X_k = f_k(\mathbf{U}_k) = f_k(U_{k,1}, U_{k,2}, \dots)$  pour  $k = 1, 2$ , utiliser des VAC partout veut dire prendre  $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$ .

**Théorème.** Si  $f_1$  et  $f_2$  sont monotones dans le même sens par rapport à tous leurs arguments, alors  $\text{Cov}[X_1, X_2] \geq 0$ .

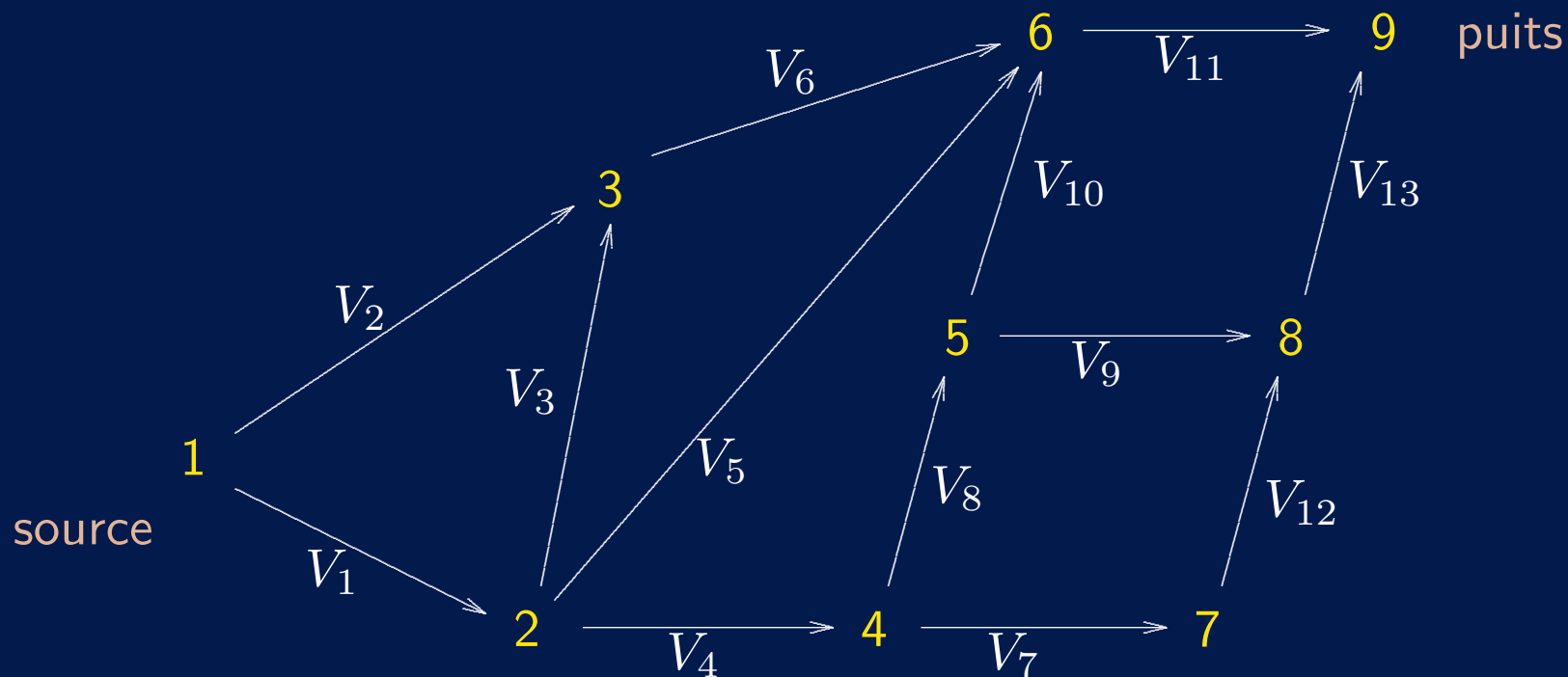
Pour **maximiser** la corrélation, il faudrait générer  $X_1$  et  $X_2$  directement par inversion!

**Exemple:** Réseau d'activités stochastique.



La durée  $V_j$  de l'activité  $j$  a la fonction de répartition  $F_{1,j}$  dans la configuration 1 et  $F_{2,j}$  dans l'autre. On génère toutes les durées par:  $V_{k,j} = F_{k,j}^{-1}(U_j)$ , puis  $X_k = f_k(\mathbf{U}_k) = I[T_k > x]$  pour  $k = 1, 2$ .

**Exemple:** Réseau d'activités stochastique.



La durée  $V_j$  de l'activité  $j$  a la fonction de répart.  $F_{1,j}$  dans la configuration 1 et  $F_{2,j}$  dans l'autre. On génère toutes les durées par:  $V_{k,j} = F_{k,j}^{-1}(U_j)$ , puis  $X_k = f_k(\mathbf{U}_k) = I[T_k > x]$  pour  $k = 1, 2$ .

Le théorème nous assure que  $\text{Cov}[X_1, X_2] \geq 0$ .



**Exemple:** Processus de Lindley.

$W_{i+1} = \max(0, W_i + S_i - A_i)$ , où  $S_i - A_i$  est indépendant de  $W_i$ .

**Exemple:** Processus de Lindley.

$W_{i+1} = \max(0, W_i + S_i - A_i)$ , où  $S_i - A_i$  est indépendant de  $W_i$ .

Si  $X_1$  et  $X_2$  sont des fonctions non-décroissantes des  $W_i$  pour deux processus de Lindley simulés avec des VAC, alors  $\text{Cov}[X_1, X_2] \geq 0$ .

Parfois il est très difficile de vérifier les conditions du théorème.

Par exemple, pour la banque ou un centre d'appels, la monotonicité est difficile à vérifier à cause des possibilités d'abandon.

Parfois il est très difficile de vérifier les conditions du théorème.

Par exemple, pour la banque ou un centre d'appels, la monotonicité est difficile à vérifier à cause des possibilités d'abandon.

Les conditions du théorème sont **suffisantes**, mais **pas nécessaires**.

Parfois il est très difficile de vérifier les conditions du théorème.

Par exemple, pour la banque ou un centre d'appels, la monotonie est difficile à vérifier à cause des possibilités d'abandon.

Les conditions du théorème sont **suffisantes**, mais **pas nécessaires**.

Pour **tester** si c'est efficace en pratique: faire un **expérience pilote** avec les **VAC** et estimer  $\text{Cov}(X_1, X_2)$ .

Parfois il est très difficile de vérifier les conditions du théorème.

Par exemple, pour la banque ou un centre d'appels, la monotonie est difficile à vérifier à cause des possibilités d'abandon.

Les conditions du théorème sont **suffisantes**, mais **pas nécessaires**.

Pour **tester** si c'est efficace en pratique: faire un **expérience pilote** avec les VAC et estimer  $\text{Cov}(X_1, X_2)$ .

Pas besoin de faire de simulations sans les VAC.

Pour estimer la variance qu'on aurait sans les VAC, il suffit de prendre la version empirique de  $\text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2]$ .