

Prof. Pierre L'Ecuyer

DEVOIR 5

Devoir à remettre le *mardi 6 décembre 2011, 10h30, au début du cours*. Les numéros indiqués sont ceux des notes de cours. Les devoirs doivent être faits individuellement: un devoir par étudiant. Pour les exercices impliquant des expériences numériques, il est très important de bien expliquer tout ce que vous faites et d'expliquer le sens de vos résultats (discussion). La majorité des points portera sur ces explications et discussions, et non pas sur les programmes informatiques et les résultats comme tels. Dans ce sens, écrire un programme qui donne les bons résultats ne suffit pas! Veuillez placer les exercices dans le bon ordre sur vos copies. Le jour de la remise du devoir, envoyez aussi une copie de vos programmes par courriel à Richard Simard: simardr@iro.umontreal.ca, pour qu'il puisse les essayer au besoin.

1. Exercice 5.20.

2. Exercice 6.6

3. Exercice 6.7

4. Exercice 6.10

5. Cet exercice est relié à la question 2 de l'examen intra 2011. Supposons que l'on veut générer un vecteur (X, Y) selon la loi binormale standard, tronquée sur le rectangle $[0, a] \times [0, b]$, où a et b sont des constantes positives, par une méthode de rejet. Pour cela, on peut borner la densité conjointe $f(x, y)$ de (X, Y) sur ce rectangle par une constante c , générer des points (X, Y, Z) au hasard uniformément dans la boîte rectangulaire $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$, accepter le premier pour lequel $Z \leq f(X, Y)$, et retourner le (X, Y) correspondant.

(a) Calculez la plus petite valeur de c pour laquelle $f(x, y) \leq c$ sur ce rectangle.

(b) Écrivez un programme qui implante cette méthode pour des valeurs générales de a et b .

(c) Quel est le nombre espéré de rejets avant d'accepter le premier (X, Y) , en fonction de a et b seulement (donnez la valeur exacte).

(d) Avec votre programme, générez $n = 1000$ paires (X, Y) selon la loi tronquée, pour $a = 4$ et $b = 5$. Faites un "scatter plot" de ces points (X, Y) .

(e) On peut obtenir un algorithme avec une plus petite probabilité de rejet comme suit. On borne $f(x, y)$ par une constante c_2 sur la portion du rectangle où $x^2 + y^2 \geq r$, où c_2 est le maximum de $f(x, y)$ sur cette portion et r est une constante telle que $0 < r \leq \min(a, b)$. Sur la portion où $x^2 + y^2 < r$, on borne encore $f(x, y)$ par c . Soit B_1 la boîte rectangulaire $[0, a] \times [0, b] \times [0, c_2]$ et B_2 le quart de cylindre défini par $B_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq r \text{ et } c_2 < z \leq c\}$. Pour générer (X, Y) , on génère (X, Y, Z) uniformément dans $B_1 \cup B_2$, et on accepte et retourne (X, Y) ssi $Z \leq f(X, Y)$. Implantez cette méthode pour a , b , et r

quelconques. Hints: Votre programme doit calculer c_2 en fonction de r . Pour générer un point uniformément dans B_2 , vous pouvez utiliser les coordonnées polaires.

(f) Générez $n = 1000$ paires (X, Y) selon la loi tronquée avec ce second algorithme, pour $a = 4$ et $b = 5$, avec $r = 2$. Faites un “scatter plot” de ces points (X, Y) . Quel est le nombre espéré de rejets avant d’accepter le premier (X, Y) dans ce cas-ci?

(g) Une troisième manière de générer (X, Y) selon cette loi tronquée est de générer d’abord X et Y indépendantes selon une loi normale tronquée sur $[0, \infty)$, d’accepter (X, Y) s’il est dans le bon rectangle, et de le rejeter autrement. Montrez que cet algorithme est correct, dans le sens que le (X, Y) retourné suit la bonne loi tronquée. Implantez-le et comparez les résultats avec ceux des deux autres algorithmes.

(h) Et si on générerait directement X selon la loi normale tronquée sur $[0, a]$ et Y selon la loi normale tronquée sur $[0, b]$, est-ce que (X, Y) suivrait la bonne loi tronquée sur $[0, a] \times [0, b]$? Prouvez votre réponse.