

POLITIQUES OPTIMALES ET SOUS-
OPTIMALES POUR LE REMPLACEMENT
D'UN SYSTEME

par

Pierre L'ECUYER

G-80-05

novembre 1980

Etudiant au département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle
de l'Université de Montréal et Chercheur à GERAD.

TABLE DES MATIERES

| | PAGES |
|--|-------|
| LISTE DES FIGURES | iv |
| LISTE DES TABLEAUX | v |
| SOMMAIRE | vi |
| | |
| INTRODUCTION | 1 |
| | |
| 1. EXPOSE DU PROBLEME | 4 |
| 1.1 Généralités | 4 |
| 1.2 Système à une composante | 4 |
| 1.3 Système à plusieurs composantes | 7 |
| 1.4 Exemple A : un camion de transport | 7 |
| 1.5 Exemple B : un moteur d'avion de chasse | 10 |
| 1.6 Politiques opportunistes, revue de la littérature | 13 |
| | |
| 2. UN MODELE DE REMPLACEMENT EN TEMPS DISCRET | 17 |
| 2.1 Formulation du problème sur horizon fini | 17 |
| 2.2 Algorithme de la programmation dynamique | 21 |
| 2.3 Une propriété de la fonction $J_k(x)$ | 22 |
| 2.4 Classes de composantes identiques | 27 |
| 2.5 Horizon infini; minimisation du coût espéré total actualisé | 31 |
| 2.6 Application: l'entretien d'un camion de transport. | 41 |
| | |
| 3. ETUDE D'UN CAS PARTICULIER OU L'ETAT DU SYSTEME EST BASE SUR L'AGE DES COMPOSANTES | 42 |
| 3.1 Particularités du modèle | 42 |
| 3.2 Un algorithme spécialisé | 48 |
| 3.3 Exemple numérique | 53 |
| 3.4 Comparaison avec des politiques sous-optimales | 59 |

| | PAGES |
|---|---------|
| 4. VERS UN MODELE EN TEMPS CONTINU | 65 |
| 4.1 Introduction | 65 |
| 4.2 Système observé continuellement | 65 |
| 4.3 Modèle en temps continu; système observé lors d'une panne ou d'une inspection prévue | 71 |
| CONCLUSION | 79 |
| APPENDICE A | 81 |
| APPENDICE B | 84 |
| APPENDICE C | 86 |
| APPENDICE D | 92 |
| BIBLIOGRAPHIE | 105 |

LISTE DES FIGURES

| | PAGES |
|-------------------------------------|-------|
| 1.1 Un moteur F100 | 11 |
| 1.2 Courbe "en baignoire" | 12 |
| C.1 Partition de M | 88 |

LISTE DES TABLEAUX

| | PAGES |
|--|-------|
| 3.1 Solution de l'exemple numérique avec $p(4) = .90$ | 54 |
| 3.2 Solution de l'exemple numérique avec $p(4) = 1.00$ | 57 |
| 3.3 Probabilité qu'une composante tombe en panne en fonction de son âge | 60 |
| 3.4 Approximation des probabilités de défaillance | 61 |
| 3.5 Comparaison des valeurs du coût espéré total actualisé pour un système neuf, sous les trois types de politiques . . | 62 |
| 3.6 Variations de $J^*(0)$ et de $J_{\pi_2}(0)$ lorsque $p(7)$ passe de .482 à .6 ou à .8 | 64 |
| D.1 Ordonnancement des vecteurs de X_0 | 93 |
| D.2 Correspondance entre les variables du programme et celles du texte | 98 |

SOMMAIRE

Dans ce rapport, on s'intéresse au problème des remplacements préventifs dans le cas d'un système à plusieurs composantes. Chaque composante est sujette à tomber en panne soudainement selon une certaine mesure de probabilité qui dépend de son état actuel. L'état d'une composante est une mesure de détérioration donnée par les valeurs de certains paramètres (usure apparente, etc...) ou simplement par son âge.

On traite en détail le cas où le système est observé à intervalles fixes (temps discret). L'évolution du système est représenté par une chaîne de Markov et le problème est abordé par une approche de programmation dynamique. Pour une structure de coûts très générale (avec actualisation) et une détérioration stochastique du système dans un ensemble borélien d'états, on détermine des conditions suffisantes pour que la fonction de "coût anticipé" dans l'équation de la programmation dynamique soit croissante en fonction de l'état des composantes.

On traite plus en détail le cas où le système est formé de composantes identiques dont l'état est donné par l'âge et où la structure de coûts est affine en fonction du nombre de composantes remplacées. Des exemples numériques sont traités et les politiques optimales sont comparées à des politiques sous-optimales plus simples.

Deux modèles en temps continu sont ensuite discutés brièvement. Dans le premier cas, le système est observé continuellement, tandis que dans le second cas, il est observé à intervalles variables.

INTRODUCTION

L'une des branches de la théorie de la fiabilité s'intéresse au choix des règles d'entretien, de réparation, de remplacement, etc... d'un système. Il s'agit d'établir les règles de façon à optimiser certaines caractéristiques du système, comme par exemple: minimiser les coûts d'opération ou maximiser la disponibilité. Les décisions à prendre concernent, entre autres, le choix des méthodes et des dates d'inspections, les quantités optimales de pièces à garder en inventaire et les mesures d'entretien: quand faut-il réparer? Quand faut-il remplacer certaines pièces du système? Lesquelles? Quand faut-il remplacer le système au complet?

Dans ce rapport, notre intérêt portera sur les trois dernières questions. La dernière a déjà été étudiée à fond dans la littérature, nous tenterons de voir comment répondre aux deux autres.

Nous nous intéressons donc au problème des remplacements préventifs dans le cas d'un système à plusieurs composantes. Un camion, un moteur d'avion, etc... sont des exemples de tels systèmes. Chaque composante est sujette à tomber en panne soudainement selon une certaine probabilité qui dépend de son état actuel. L'état d'une composante est une mesure de détérioration donnée par les valeurs de certains paramètres (usure apparente, indications de surchauffe ou de basse pression de l'huile, etc...) ou simplement par son âge.

Le système peut être observé de façon continue, à intervalles fixes ou à intervalles variables. Lors d'une observation du système, les composantes en panne doivent être remplacées immédiatement par des composantes neuves. On peut aussi remplacer préventivement des composantes avant qu'elles ne tombent en panne, par exemple lorsque les risques de défaillance ou les coûts d'opération deviennent trop élevés.

Souvent, il en coûte moins cher d'effectuer plusieurs remplacements à la même occasion plutôt que séparément. On peut réaliser ainsi d'importantes économies en regroupant les remplacements. Le problème est de déterminer, lorsque le système est dans un état donné, quels éléments, s'il y a lieu, on doit remplacer.

Les techniques que l'on retrouve dans la littérature et qui permettent d'obtenir des solutions pratiques à ce genre de problème sont des méthodes heuristiques. En général, les solutions obtenues sont relativement simples, mais sous-optimales.

Au chapitre 2, on s'intéresse au cas où le système est observé à intervalles fixes (temps discret). L'évolution du système est représentée par une chaîne de Markov multidimensionnelle et le problème est abordé par une approche de programmation dynamique. Pour une structure de coûts très générale et une détérioration stochastique du système dans un ensemble borélien d'états, on détermine des conditions suffisantes pour que la fonction de Bellman dans l'équation de la programmation dynamique soit croissante en fonction de l'état des composantes. Cela permet, dans certains cas, de caractériser la forme de la politique optimale.

Au chapitre 3, on traite plus en détail le cas où les composantes sont identiques, ont un taux de panne non décroissant en fonction du temps et où la structure des coûts se réduit à la forme suivante: lors de chaque intervention, un coût fixe est encouru, auquel s'ajoute un coût variable qui est fonction linéaire du nombre de composantes remplacées. Dans le cas où le système est observé à intervalles fixes sur un horizon infini avec actualisation, un algorithme permettant d'obtenir une politique ε -optimale est développé. Des exemples numériques sont traités et illustrent l'effet d'une variation du rapport entre la partie fixe et la partie variable du coût. Les politiques optimales sont ensuite comparées à des politiques sous-optimales plus faciles à implanter.

Au chapitre 4, on s'intéresse d'abord au cas où le système est observé continuellement. On conjecture que ce modèle peut être approximé par le modèle en temps discret du chapitre 2, en prenant Δt suffisamment petit. Un autre modèle en temps continu est ensuite discuté brièvement. Il s'agit du cas où le système n'est observé qu'un nombre fini de fois dans tout intervalle de temps fini. Les instants d'observation correspondent aux pannes et aux inspections prévues. On montre que ce dernier modèle donne lieu à un problème de contrôle impulsionnel d'un processus de saut.

CHAPITRE 1

1. EXPOSE DU PROBLEME

1.1 Généralités.

Dans ce chapitre, nous ferons d'abord une brève revue de la littérature concernant les politiques de remplacement dans le cas d'un système à une seule composante. Nous donnerons ensuite deux exemples de systèmes à plusieurs composantes où les composantes ne peuvent pas être traitées indépendamment. Nous verrons enfin quelles sont les solutions proposées par différents auteurs pour de tels problèmes.

Plusieurs types de modèles d'optimisation des politiques de remplacement de machines et de pièces de machines apparaissent dans la littérature. D'importants résumés ont été effectués par McCall [21] en 1965, Berg et Epstein [5] en 1972 et Pierskalla et Voelker [22] en 1976. D'autre part, les volumes de Barlow et Proschan [3] et de Gertsbakh [14] constituent une excellente introduction à la théorie de la fiabilité et aux modèles d'entretien préventif.

1.2 Système à une composante.

Le problème de la détermination d'une politique optimale de remplacement et de réparation pour un système à une seule composante a été étudié sous toutes ses facettes par de nombreux auteurs.

Considérons le cas où le système est observé à intervalles fixes et se détériore aléatoirement suivant une chaîne de Markov. On suppose que l'ensemble S des états possibles de la composante est fini et totalement ordonné. A chaque période, on peut laisser la composante ou la remplacer par une neuve. Parfois, il est avantageux de remplacer la composante avant qu'elle ne tombe en panne, de façon à éviter les conséquences fâcheuses d'une panne non prévue ou d'une

détérioration excessive. Le choix de la décision de remplacer ou non le système est dicté par une politique dont les règles sont basées sur son histoire présente et passée. Le choix de la politique dépendra de la structure des coûts et de la matrice des probabilités de transition entre les états.

Derman [11] a établi des conditions nous assurant qu'une politique optimale se trouve dans la classe des politiques pures (non aléatoires) qui sont basées non pas sur toute l'histoire passée, mais seulement sur l'état présent du système (Voir [12]).

Plusieurs auteurs, dont Barlow et Proschan [3], Kolesar [19] et Kao [18] ont donné des conditions suffisantes pour que la politique optimale de remplacement soit une règle de type "seuil de contrôle" ("control-limit" rule). Suivant ce genre de politique, on remplace la composante si et seulement si son état est supérieur ou égal à un seuil fixé. Ross [24] a généralisé les résultats précédents au cas où l'état du système est représenté par un élément d'un sous-ensemble borélien non vide des réels non négatifs.

Ces conditions suffisantes correspondent à exiger que:

- (i) le coût en fonction de l'état est croissant et borné.
- (ii) la probabilité que la prochaine transition se fasse vers un état supérieur ou égal à une certaine valeur fixe est croissante en fonction de l'état présent.

Gertsbakh [15] et Anderson [2] ont établi des conditions similaires, suffisantes pour l'appartenance de la politique optimale à la classe des politiques de type "seuil de contrôle", pour le cas où le système est observé continuellement.

D'autres auteurs, plus pragmatiques, ont étudié et comparé différents types de politiques de remplacement. Dans sa thèse de doctorat, C. Tilquin [27] s'est intéressé à quatre types de modèles de remplacement pour une composante dont la distribution de la durée de vie est connue et la seule mesure de "détérioration" est l'âge. Les modèles en question étaient:

- (i) remplacement périodique (RP) de période T ,
- (ii) RP avec réparation minimale à la panne,
- (iii) RP avec période d'inactivité entre la panne et le prochain remplacement prévu,
- (iv) remplacement au plus tard à l'âge T .

Dans un modèle de remplacement périodique ("block replacement"), la composante est remplacée systématiquement à intervalles T fixés. Dans le modèle (iv) ("age replacement"), la composante est remplacée lors d'une panne si cette dernière survient avant l'âge T et à l'âge T dans le cas contraire. Cela correspond, en fait, à une politique de type "seuil de contrôle".

En général, une politique de type RP peut être avantageuse si les remplacements planifiés à l'avance sont moins coûteux ou si le coût de garder "en mémoire" l'âge de la composante est trop élevé. D'autre part, suivant une telle politique, on risque de remplacer une composante qui vient de l'être lors d'une panne et qui est pratiquement neuve.

Bhat [9] considère une variante de (ii). Pour lui, "réparation minimale" représente le remplacement d'une composante qui tombe en panne par une composante d'âge T qui a été retirée lors d'un RP antérieur et qui est encore en état de fonctionner.

Gertsbakh [14] considère des modèles où l'existence d'une panne peut demeurer inconnue avec une certaine probabilité et des modèles où des inspections peuvent nous donner les valeurs de certains paramètres indicateurs du niveau de détérioration. D'autres modèles de ce genre ont été étudiés par Luss [20] , Bergman [6] et plusieurs autres auteurs.

1.3 Système à plusieurs composantes.

Lorsque le système est constitué de plusieurs composantes, le remplacement d'une composante doit se décider, habituellement, en tenant compte de l'état des autres composantes du système. On peut traiter chaque composante comme un système individuel et trouver une politique optimale pour chacune d'entre elles. Mais on n'obtiendra ainsi une politique optimale que si les composantes sont stochastiquement et économiquement indépendantes. En pratique, c'est loin d'être toujours le cas. Par exemple, il y a dépendance économique s'il en coûte moins cher de remplacer plusieurs composantes à la même occasion plutôt que séparément. Dans ce cas, on peut réaliser des économies d'échelle en groupant les remplacements. On dira alors qu'on adopte une politique opportuniste.

1.4 Exemple A: un camion de transport

Un camion de transport est constitué de plusieurs pièces, dont la plupart se détériorent avec l'usage et sont sujettes à des défaillances. Certaines défaillances provoquent des pannes qui peuvent immobiliser le camion, de sorte qu'il est souvent plus coûteux de remplacer une pièce lors de sa défaillance que de la remplacer préventivement lors d'une révision.

Les coûts supplémentaires encourus lors d'une panne peuvent correspondre au temps où le camion et le chauffeur restent inactifs, à l'envoi d'un mécanicien au lieu de la panne, au remorquage si

nécessaire et enfin à la dégradation du service à la clientèle.

Une politique d'entretien préventif vise à établir un compromis entre la réduction des coûts supplémentaires dûs aux pannes et l'augmentation des coûts provoquée par le remplacement de pièces qui sont encore en état de fonctionner. Etant donné qu'un camion est composé de milliers de pièces, la recherche de ce compromis est extrêmement complexe.

On peut simplifier le problème sans trop diminuer le réalisme du modèle en ne considérant qu'un nombre plus restreint de pièces, appelées pièces critiques. On peut aussi regrouper les pièces critiques en sous-systèmes critiques. Par exemple, Brosh, Shlifer et Zeira [10] et Goyette et Haurie [16] considèrent les huit sous-systèmes critiques suivants:

- | | |
|--------------------|---------------------|
| 1) embrayage | 5) filtre à essence |
| 2) freins | 6) alternateur |
| 3) carburateur | 7) démarreur |
| 4) pompe à essence | 8) distributeur. |

De cette façon, ces auteurs représentent un camion par un système à 8 composantes, chacune correspondant à un sous-système critique.

On peut remplacer ou réparer une composante soit à l'occasion d'une panne, soit à l'occasion d'une révision. La réparation d'une composante pourrait correspondre, par exemple, au remplacement d'une de ses pièces. Les auteurs mentionnés ci-dessus ne considèrent toutefois que des modèles où les seules actions d'entretien admises correspondent aux remplacements de composantes par des composantes neuves et identiques aux précédentes. On ne considère pas la possibilité de réparer une composante. De plus, on suppose que les durées de vie des différentes composantes sont stochastiquement indépendantes. Les coûts considérés sont:

- (i) un coût fixe d'intervention pour une revision planifiée,
- (ii) un coût de panne dépendant de la composante qui tombe en panne,
- (iii) un coût de remplacement pour chaque composante.

Goyette et Haurie [16] proposent un modèle où les dates de revision sont fixées une fois pour toutes au début de la vie du camion. Les décisions de remplacement préventif d'une ou de plusieurs composantes sont prises en tenant compte de l'âge de toutes les composantes du système et de la structure de coût. Ces auteurs établissent des équations permettant de caractériser la politique optimale. Une résolution numérique risque cependant de poser des difficultés majeures.

Dans [10], on décrit une étude qui a porté sur une flotte de 100 véhicules observés durant 3 ans. On a comparé entre elles cinq types de politiques préalablement définies:

- I- Aucun remplacement préventif.
- II- RP de certaines composantes, à intervalles fixes prédéterminés, sans égard à l'âge.
- III- RP lors de revisions planifiées, comme en II, mais on remplace seulement les composantes dont l'âge a atteint une certaine limite.
- IV- Remplacement de certaines composantes prédéterminées, sans égard à l'âge, mais seulement à l'occasion d'une panne.
- V- Tel qu'en IV, mais en ne remplaçant que les composantes dont l'âge a atteint une certaine limite.

En plus des coûts de remplacements, de pannes et de revisions, le modèle tient compte des coûts d'un système d'information permettant de connaître l'âge des composantes. Un tel système est nécessaire pour l'application des politiques III et V.

Les remplacements préventifs sont motivés par l'hypothèse que chaque composante a un taux de défaillance croissant selon l'âge. Cette hypothèse fut confirmée lors de l'observation des données. Les auteurs ont observé, en effet, que la durée de vie d'une composante était très bien représentée par une distribution d'Erlang ($k=2$).

Malgré tout, ils ont conclu que la politique I était préférable à chacune des autres.

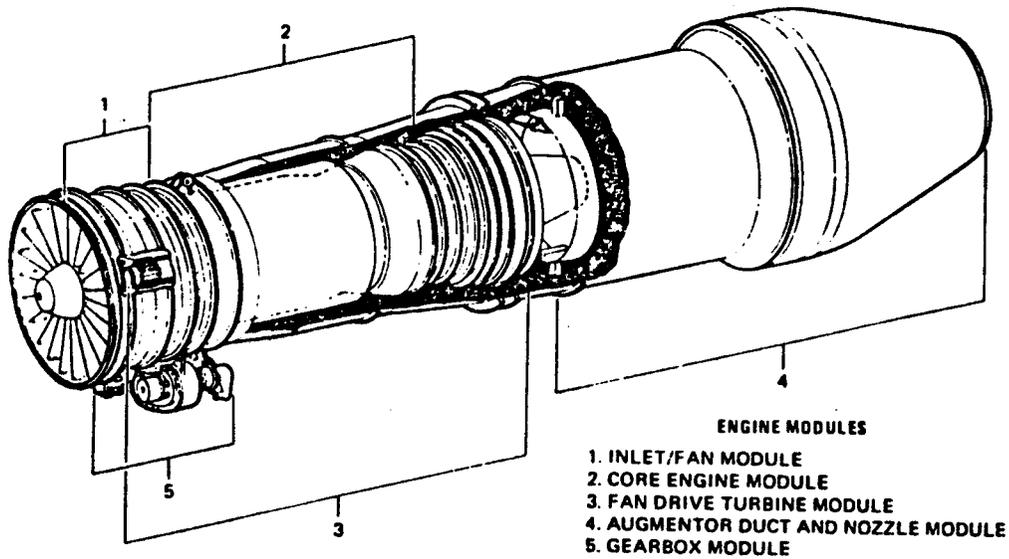
Il est à remarquer, cependant, que pour chacune de ces politiques, la décision de remplacer ou non une composante est prise sans tenir compte de l'âge des autres composantes du système. Ainsi, l'existence d'autres types de politiques plus avantageuses n'est pas exclue. Nous proposons, plus loin, un autre modèle pour ce genre de problème.

1.5 Exemple B: un moteur d'avion de chasse.

La conception d'un moteur d'avion à réaction moderne tient compte de plus en plus du coût de l'entretien. Ces moteurs sont maintenant construits de façon modulaire, de sorte qu'un moteur en panne puisse être réparé en remplaçant simplement le module défaillant.

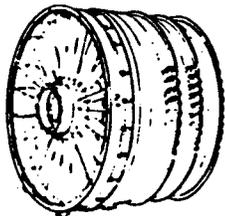
Auparavant, on établissait une limite d'âge, en heures de vol, sur chaque type de moteur. Dès qu'un moteur atteignait sa limite d'âge, on le remplaçait par un nouveau moteur. Sous une politique d'entretien "modulaire" ("modular maintenance"), les modules sont supposés indépendants. L'âge du moteur n'est plus un scalaire, mais un vecteur dont chaque composante indique l'âge d'un module. Il peut y avoir une limite d'âge sur chaque module, mais pas sur le moteur.

MODULAR REPLACEMENT



F100 engine maintenance procedures are faster, lower in cost, and can be accomplished at lower maintenance levels because the engine is designed for modular maintenance. Modular maintenance is the replacement of major functional engine assemblies, rather than the customary tear-down and replacement of many separate detail parts.

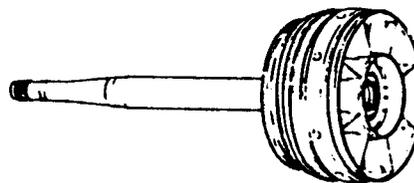
F100-PW-100 MODULES



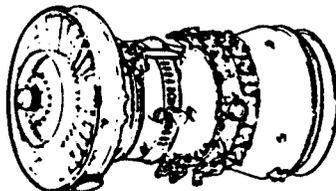
INLET/FAN MODULE



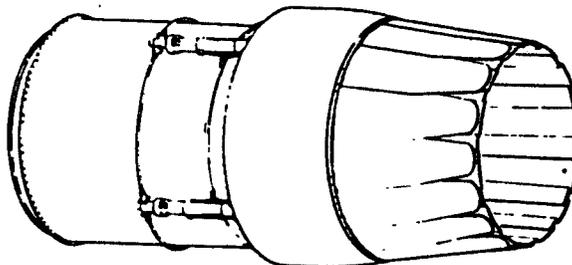
GEARBOX MODULE



FAN DRIVE TURBINE MODULE



CORE ENGINE MODULE



AUGMENTOR DUCT AND NOZZLE MODULE

Fig. 1.1 Un moteur F100.

Pour remplacer une pièce, il n'est pas nécessaire de remplacer tout le moteur, mais seulement le module touché. Les autres modules sont remis en place et il n'est pas nécessaire, en général, d'y effectuer des réajustements après le remplacement du module fautif.

Ce système permet de réduire la durée des réparations, la main d'oeuvre utilisée et le nombre de moteurs de rechange à garder en inventaire. Au lieu de garder des moteurs en réserve, on garde des modules, et la quantité à garder pour chaque type peut être déterminée en tenant compte des taux de défaillance effectifs des différents modules.

Par exemple, le moteur F100 de McDonnell Douglas est composé de 5 modules principaux (Voir Fig. 1).

Généralement, le taux de défaillance d'un module, en fonction du temps, est représenté par une courbe "en baignoire". (Voir Fig. 2). En pratique, on peut obtenir une représentation mathématique d'un tel type de taux de défaillance par une somme de deux ou trois taux de défaillances de distributions connues.

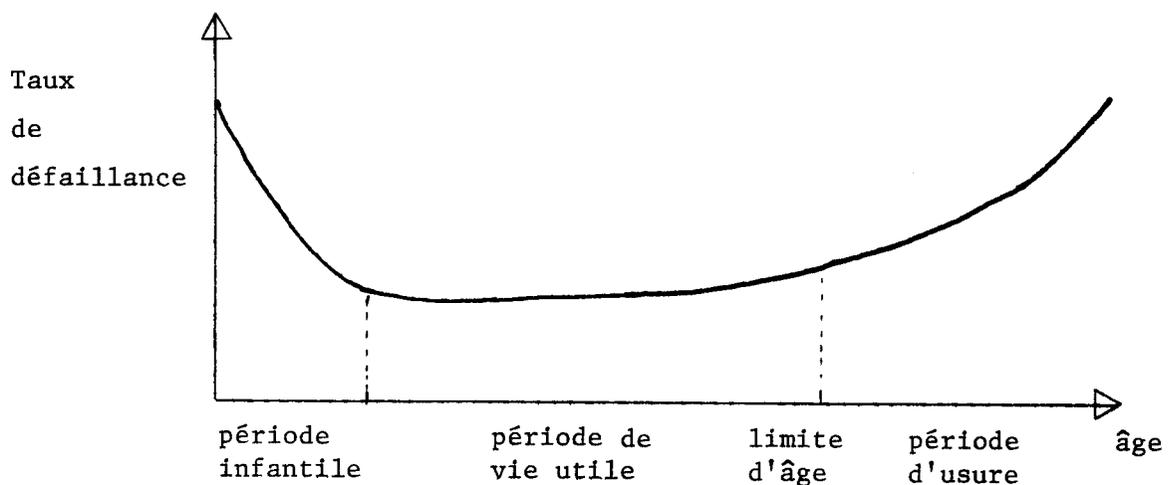


Fig. 1.2 Courbe "en baignoire".

Un module neuf a un taux de défaillance élevé. Ce taux décroît d'abord assez rapidement avec l'âge, demeure à peu près constant durant une certaine période, puis augmente graduellement.

La période initiale où le taux de défaillance est élevé correspond à une période de rodage et d'apparition des défauts de fabrication. La période où le taux de défaillance est croissant correspond à l'usure du module.

Certaines défaillances peuvent être catastrophiques. C'est pourquoi certains modules doivent être remplacés avant d'atteindre un taux de défaillance trop élevé. Pour chaque module, on détermine une limite d'âge dans l'intervalle $(0, \infty]$. Dès qu'un module atteint sa limite d'âge ou tombe en panne, on doit le remplacer. Lorsqu'une telle occasion se présente, il peut être avantageux d'en profiter pour remplacer du même coup d'autres modules qui seraient, par exemple, tout près de leur limite d'âge. Les modules remplacés sont remis à neuf et retournent ensuite dans les stocks de réserve.

Le problème consiste à déterminer une politique de remplacement préventif des modules qui permettra de minimiser les coûts tout en respectant certaines normes de sécurité.

1.6 Politiques opportunistes, revue de la littérature.

Une classe de politiques de remplacement préventif pour les systèmes à plusieurs composantes identiques, stochastiquement indépendantes et dont la distribution de durée de vie est connue est étudiée dans Gertsbakh [14, pp. 80-95]. L'auteur a analysé la classe des politiques de type (t, T) définies comme suit: au temps 0, le système est complètement neuf et commence à fonctionner. Durant la période $(0, t)$, on remplace seulement les composantes qui tombent en panne. Durant la période $[t, T)$, dès la première panne, s'il y en a, tout le système est remplacé par un système neuf. S'il n'y a pas de panne durant la période $[t, T)$, on remplace tout le système au temps T et on recommence

à neuf. L'objectif est de minimiser le coût espéré moyen par unité de temps. Des tables, données par l'auteur, permettent de trouver les valeurs optimales de t et T pour un système dont les composantes ont une durée de vie de distribution gamma.

En posant $t = T$ dans ce modèle, on obtient la politique de remplacement périodique ("Block replacement") bien connue. Selon une telle politique, on remplace toutes les composantes à intervalles fixes, indépendamment des défaillances qui surviennent. Lors d'une défaillance, on ne remplace que la composante en panne. Le plus grand avantage de cette politique provient de sa simplicité: les réparateurs connaissent longtemps d'avance les instants de renouvellement du système.

En posant $t = 0$, on obtient une politique de remplacement de type "seuil de contrôle". Le système est remplacé dès la première défaillance, et au plus tard à l'âge T .

Lorsque les composantes sont différentes, on peut déterminer un intervalle entre les remplacements périodiques particuliers à chaque composante. On aura intérêt, toutefois, à coordonner les instants de renouvellement de façon à ce que plusieurs remplacements planifiés aient lieu simultanément.

Gertsbakh [14, pp. 216-228] considère un modèle de remplacement périodique où les longueurs des périodes pour les différentes composantes sont toutes des multiples d'une même constante. En général, les règles de remplacement des composantes d'avions où de camions sont de ce type. L'auteur donne un algorithme permettant de déterminer, pour une structure de coût particulière, une séquence optimale de périodes (une pour chaque composante), lorsque l'objectif est de minimiser le coût total espéré par unité de temps.

Bien que ces politiques de remplacements planifiés soient en général faciles à implanter et à gérer, elles sont parfois loin d'être

optimales. Tel que mentionné par Berg et Epstein [4] et Alj et Haurie [1], on risque de remplacer, de temps à autre, des composantes à peu près neuves.

Dans [4], une politique de remplacements périodiques "modifiée" est proposée pour un système à composantes identiques. Il s'agit de choisir un couple (t, T) et d'effectuer une revision planifiée à chaque multiple de T . Cependant, lors de cette revision, on ne remplace pas toutes les composantes, mais seulement celles qui ont atteint l'âge t . Lors d'une panne, on ne remplace que la composante défaillante. Les auteurs développent, pour certains cas particuliers, l'expression du coût espéré par unité de temps lorsqu'une telle politique est appliquée.

Les politiques de remplacements à intervalles fixes ne sont toutefois pas toujours appropriées. D'autres auteurs ont étudié différents types de politiques de remplacement selon l'âge.

Dans un article paru en 1957 [26], Sasieni considère un système à deux composantes identiques, à taux de défaillance croissant. Une composante est remplacée dès qu'elle devient défectueuse ou qu'elle atteint un âge prédéterminé T . A l'occasion du remplacement d'une composante, l'autre est aussi remplacée si son âge atteint le seuil t . Dreyfus [13] a par la suite démontré, en utilisant la programmation dynamique, que la politique optimale, même pour un système à deux composantes identiques et une fonction de coût très simple, n'était pas nécessairement de la forme proposée par Sasieni.

Vergin [28] et Vergin et Scriabin [29] utilisent la programmation dynamique pour trouver la politique optimale dans le cas de systèmes à 2 et 3 composantes identiques. Les politiques optimales obtenues sont comparées à certaines politiques simples utilisées couramment. Les résultats "suggèrent" qu'une politique du type de celle de Sasieni devrait être, en général, presque'aussi bonne que la politique optimale.

Dans les prochains chapitres, nous établirons quelques caractéristiques d'une politique optimale, lorsque les composantes sont stochastiquement indépendantes.

CHAPITRE 2

2. UN MODELE DE REMPLACEMENT EN TEMPS DISCRET

2.1 Formulation du problème sur horizon fini.

Considérons un système à m composantes. Au temps $t_0 = 0$, le système est complètement neuf. Au temps $T > 0$, il est remplacé par un nouveau système. Soit

$$M = \overset{\Delta}{=} \{1, 2, \dots, m\}$$

l'ensemble des composantes.

Le système est observé à intervalles fixes. L'intervalle de temps $[0, T]$ est divisé en N sous-intervalles de longueur Δt et les instants d'observation sont:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_1 &= \Delta t \\ &\vdots \\ t_k &= k\Delta t \\ &\vdots \\ t_N &= N\Delta t = T. \end{aligned}$$

Pour $i = 1, \dots, m$, soit B_i un sous-ensemble borélien des réels non-négatifs tel que $0 \in B_i$, soit $d \notin \mathbb{R}$ et soit

$$X_i = \overset{\Delta}{=} B_i \cup \{d\}. \quad (2.1)$$

A l'instant t_k , l'état de la composante i est un élément de X_i . L'état d indique la défaillance et l'état 0 indique que la composante est neuve.

Ainsi, pour $k = 0, \dots, N$, l'état du système à l'instant d'observation t_k est donné par un vecteur:

$$x^k \in X = \overset{\Delta}{=} \prod_{i=1}^m X_i \subset (\mathbb{R} \cup \{d\})^m. \quad (2.2)$$

$x_i^k = 0$ indique que la composante i est neuve au temps t_k tandis que $x_i^k = d$ indique que la composante i est défailante et doit être remplacée immédiatement par une neuve.

A l'instant t_k , en plus de remplacer les composantes défailantes, il est aussi possible de remplacer des composantes qui sont encore en état de fonctionner, de façon à exploiter certaines possibilités d'économies d'échelle. Le contrôle correspond à l'ensemble R^k des composantes que l'on décide de remplacer par des composantes neuves (on ne considère pas la possibilité de réparer).

En pratique, il peut y avoir des temps d'arrêt dûs aux remplacements, mais habituellement on peut supposer que ces temps d'arrêt n'influencent pas l'état des composantes qui ne sont pas remplacées. On peut donc ne pas les considérer. Dans ce modèle, on suppose que tous les remplacements sont effectués instantanément.

Une politique π est une suite de fonctions:

$$\{\mu^k : X \times \prod_{\ell=1}^k (P(M) \times X) \rightarrow P(M)\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

A l'instant t_k , $0 \leq k \leq N - 1$, $\mu^k(x^0, R^0, \dots, R^{k-1}, x^k)$ désigne l'ensemble R^k des composantes à remplacer.

Définissons, $\forall x \in X$:

$$U(x) \stackrel{\Delta}{=} \{R \subseteq M \mid x_i = d \Rightarrow i \in R\}. \quad (2.3)$$

Une politique $\pi = (\mu^0, \mu^1, \dots)$ est dite admissible si

$$\mu^k(x^0, R^0, x^1, \dots, R^{k-1}, x^k) \in U(x^k) \quad (2.4)$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall (x^0, R^0, \dots, R^{k-1}, x^k) \in \prod_{\ell=1}^k [X \times P(M)] \times X.$$

Cela nous assure que les éléments en panne sont remplacés sur le champs. Nous dénoterons par Π l'ensemble des politiques admissibles.

Immédiatement après les remplacements, s'il y en a, l'état du système est donné par le vecteur:

$$r^k = \rho(x^k, R^k) \quad (2.5)$$

où $\rho : \mathbb{R}^m \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction définie par:

$$\rho(x, R)_i \triangleq \begin{cases} x_i & \text{si } i \notin R \\ 0 & \text{si } i \in R. \end{cases} \quad (2.6)$$

Nous utiliserons désormais t_k^+ pour désigner le temps t_k , immédiatement après les remplacements.

L'état du système au temps t_{k+1} est ensuite choisi aléatoirement selon une mesure de probabilité que nous allons maintenant préciser.

On peut d'abord définir un ordre total sur chaque X_i en posant:

$$d > \tau \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Nous utiliserons cette relation d'ordre dans toute la suite du texte.

On suppose que chaque transition d'une composante d'un état à un autre est indépendante des transitions des autres composantes. La transition d'une composante durant l'intervalle $(t_k, t_{k+1}]$ se fait selon une distribution de probabilité qui ne dépend que de son état r_i^k au temps t_k^+ .

On suppose que pour $i = 1, \dots, m$, $\forall \xi \in B_i$ et $\forall \tau \in \mathbb{R} \cup \{d\}$,

$$F_i(\tau|\xi) \triangleq P(x_i^{k+1} \leq \tau \mid r_i^k = \xi) \quad (2.8)$$

est bien définie et ne dépend pas de k .

On a ainsi, pour $i = 1, \dots, m$:

$$F_i(d|\xi) = 1 \quad (2.9)$$

$$F_i(\infty|\xi) = P(x_i^{k+1} \neq d \mid r_i^k = \xi) \quad (2.10)$$

et F_i est une fonction de répartition sur l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{d\}$.

Puisque les transitions sont indépendantes, la fonction de répartition conditionnelle de l'état du système au temps t_{k+1} sachant qu'il était dans l'état r^k au temps t_k^+ est définie par:

$$F(z|r^k) \stackrel{\Delta}{=} P(x^{k+1} \leq z | r^k) = \prod_{i=1}^m F_i(z_i | r_i^k) \quad (2.11)$$

$$\forall z \in (\mathbb{R} \cup \{d\})^m .$$

Les coûts sont déterminés par les fonctions: $c : X \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ et $c_F : X \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que ces fonctions sont non-négatives, croissantes par rapport à chacune des composantes de x et bornées uniformément par une constante $B < \infty$.

Ainsi, $\forall R \subseteq M, \forall x, \tilde{x} \in X$ tel que $x \leq \tilde{x}$, on a:

$$0 \leq c(x, R) \leq c(\tilde{x}, R) \leq B \quad (2.12)$$

$$0 \leq c_F(x) \leq c_F(\tilde{x}) \leq B . \quad (2.13)$$

On suppose de plus que c et c_F sont Borel-mesurables, c'est-à-dire que les images inverses par c et par c_F de tout borélien de \mathbb{R} sont respectivement un élément de la tribu engendrée par $\{(\{x \in X \mid x \leq \tau\}, R) \mid \tau \in X, R \subseteq M\}$ et un élément de la tribu engendrée par $\{(-\infty, \tau] \cap X \mid \tau \in X\}$.

A l'instant d'observation t_k , si l'état du système est x^k et si on remplace les éléments qui sont dans l'ensemble R^k , alors le coût espéré pour cette étape est $c(x^k, R^k)$. A l'instant t_N , le coût espéré est $c_F(x^N)$.

Soit $\beta \in [0, 1]$ le coefficient d'actualisation par période Δt .

Le problème consiste à trouver une politique admissible $\pi = (\mu^0, \mu^1, \dots)$ qui minimise la fonction de coût †:

$$J_{N, \pi}(x^0) = E_{x^1} \{ E_{x^2} \{ \dots E_{x^N} \{ \sum_{k=0}^{N-1} \beta^k c(x^k, R^k) + \beta^N c_F(x^N) \} \dots \} \} \quad (2.14)$$

† Par la proposition 7.28 de Bertsekas et Shreve [8, p. 140], la fonction $J_{N, \pi}(x^0)$ est bien définie.

sous les contraintes:

$$x^0 = 0 \quad (2.15)$$

$$R^k = \mu^k(x^0, R^0, \dots, R^{k-1}, x^k) \in U(x^k) \quad (2.16)$$

$$r^k = \rho(x^k, R^k) \quad \left. \vphantom{R^k} \right\} k = 0, \dots, N-1 \quad (2.17)$$

et où les espérances mathématiques sont prises par rapport à la mesure de probabilité définie en (2.11).

Par (2.11), la distribution de l'état x^{k+1} ne dépend que de r^k et pas des états antérieurs. Il suffit donc de considérer les politiques $(\mu^0, \mu^1, \mu^2, \dots)$ telles que pour $k = 0, 1, 2, \dots$, μ^k n'est fonction que de x^k . On peut simplifier la notation en posant:

$$\mu^k(x^k) \equiv \mu^k(x^0, R^0, x^1, \dots, R^{k-1}, x^k) . \quad (2.18)$$

Soit:

$$J_N^* \stackrel{\Delta}{=} \inf_{\pi \in \Pi} J_{N, \pi}(0)$$

Sujet à (2.15), (2.16) et (2.17).

Il s'agit maintenant de trouver une politique $\pi^* \in \Pi$ telle que:

$$J_N^* = J_{N, \pi^*}(0) . \quad (2.20)$$

2.2 Algorithme de la Programmation Dynamique.

Définissons l'opérateur T par:

$$T(J)(x) \stackrel{\Delta}{=} \min_{R \in U(x)} \{c(x, R) + \beta \int_X J(z) dF(z | \rho(x, R))\} \quad \forall x \in X, \quad (2.21)$$

pour toute fonction $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-mesurable. Notons $\mu_*(x, J)$ l'ensemble R pour lequel le minimum est atteint dans (2.21)[†]. Par les propositions 7.28 et 7.29 de [8, pp. 140 et 144], si J est Borel-mesurable, alors $T(J)$ est bien définie et Borel-mesurable.

[†] S'il y a égalité, on peut convenir de prendre l'ensemble de plus petite cardinalité et si l'égalité persiste, de prendre celui dont la somme des indices est minimale.

Posons:

$$J_0(x) = C_F(x) \quad \forall x \in X \quad (2.22)$$

et pour $k = 1, 2, \dots, N$:

$$J_k(x) = T(J_{k-1})(x) \quad \forall x \in X. \quad (2.23)$$

Chaque J_k est alors bien définie et Borel-mesurable.

Le corollaire 3.3.1, à la page 45 de [8] nous assure que l'algorithme défini par les Eqs (2.22) et (2.23) génère une solution optimale du problème (2.19).

On a:

$$J_N(0) = J_N^*, \quad (2.24)$$

et toute politique $\pi = (\mu^0, \mu^1, \mu^2, \dots) \in \Pi$ telle que

$$\mu^k(x) = \mu_{\star}(x, J_{N-k-1}) \quad \forall x \in X, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.25)$$

est une politique optimale admissible.

La fonction de coût anticipé $J_k(x)$ représente le coût espéré actualisé minimal pour les $k + 1$ dernières étapes, sachant qu'on est dans l'état x au temps t_k .

2.3 Une propriété de la fonction $J_k(x)$.

Les théorèmes assurant l'existence d'une politique optimale de type "seuil de contrôle" ("control-limit") (Voir [3], [12], [24]) ne s'appliquent pas lorsque $m > 1$, car il n'est pas possible, en général, de définir un ordre total sur l'ensemble des états du système tel que les hypothèses de ces théorèmes soient satisfaites.

Nous allons donc tenter de caractériser la politique optimale dans le cas d'un système à plusieurs composantes.

Nous démontrons d'abord un théorème fondamental donnant des conditions suffisantes pour que $J_k(x)$ soit croissante par rapport aux

composantes de x : si, pour chaque $y \in [0, \infty]$, la probabilité que la composante i passe à un état supérieur à y est croissante en fonction de son état présent, alors $J_k(x)$ est croissante par rapport à x_i .

THEOREME 2.1:

Soit $S \subseteq M$ tel que $\forall i \in S, \forall y \in [0, \infty], F_i(y|r_i)$ est une fonction décroissante en r_i .

Alors, pour $k = 0, \dots, N$, $\forall i \in S, J_k(x)$ est une fonction croissante par rapport à x_i .

PREUVE:

La preuve se fait par récurrence sur k .

Pour $k = 0$, c'est une conséquence directe de (2.22) et de la définition de c_F .

Soit $k > 0$. Supposons la propriété vraie pour $k - 1$ et montrons que cela implique qu'elle tient pour k .

Soit $i \in S$ et soient $x, \tilde{x} \in X$ tels que $\tilde{x}_j = x_j \quad \forall j \neq i$ et $\tilde{x}_i > x_i$.

Soit:

$$\tilde{R} = \mu_*(\tilde{x}, J_{k-1}) \quad (2.26)$$

Puisque $\tilde{x} \geq x$, on a:

$$\tilde{x}_j = d \quad \forall j \mid x_j = d \quad (2.27)$$

et donc

$$j \in \tilde{R} \quad \forall j \mid x_j = d \quad (2.28)$$

ce qui implique que \tilde{R} est candidat pour le minimum dans la définition de $J_k(x)$.

On a donc:

$$J_k(x) \leq c(x, \tilde{R}) + \beta \int_{X_m} \dots \int_{X_1} J_{k-1}(z) dF_1(z_1|r_1) \dots dF_m(z_m|r_m) \quad (2.29)$$

$$\text{où } r_j = \rho(x, \tilde{R})_j \quad j = 1, \dots, m.$$

Mais comme

$$c(x, \tilde{R}) \leq c(\tilde{x}, \tilde{R}) \quad (2.30)$$

par définition de c , on peut écrire:

$$J_k(x) \leq c(\tilde{x}, \tilde{R}) + \beta \int_{X_m} \dots \int_{X_1} J_{k-1}(z) dF_1(z_1 | r_1) \dots dF_m(z_m | r_m) . \quad (2.31)$$

On a donc:

$$\begin{aligned} J_k(\tilde{x}) - J_k(x) &\geq \beta \int_{X_1} \dots \int_{X_m} J_{k-1}(z) dF_1(z_1 | r_1) \dots dF_i(z_i | \tilde{r}_i) \dots dF_m(z_m | r_m) \\ &\quad - \beta \int_{X_1} \dots \int_{X_m} J_{k-1}(z) dF_1(z_1 | r_1) \dots dF_m(z_m | r_m) \quad (2.32) \end{aligned}$$

$$\text{où } \tilde{r}_i = \begin{cases} \tilde{x}_i & \text{si } i \notin \tilde{R} \\ 0 & \text{si } i \in \tilde{R} \end{cases}$$

Dans le cas où $i \in \tilde{R}$, on a:

$$\tilde{r}_i = r_i = 0 \quad (2.33)$$

et alors le terme de droite dans l'inégalité (2.32) devient 0. Dans ce cas,

$$J_k(\tilde{x}) \geq J_k(x) . \quad (2.34)$$

Dans le cas où $i \notin \tilde{R}$, on peut réécrire (2.32):

$$\begin{aligned} J_k(\tilde{x}) - J_k(x) &\geq \beta \int_{X_m} \dots \int_{X_{i+1}} \int_{X_{i-1}} \dots \int_{X_1} \{\Phi\} dF_1(z_1 | r_1) \dots \\ &\quad dF_{i-1}(z_{i-1} | r_{i-1}) dF_{i+1}(z_{i+1} | r_{i+1}) \dots dF_m(z_m | r_m) \quad (2.35) \end{aligned}$$

où

$$\{\Phi\} \equiv \int_{X_i} J_{k-1}(z) dF_i(z_i | \tilde{r}_i) - \int_{X_i} J_{k-1}(z) dF_i(z_i | r_i) \quad (2.36)$$

On peut facilement vérifier, par induction, que J_{k-1} est bornée sur X , inférieurement par 0 et supérieurement par kB . Pour $k-1 = 0$, ce résultat vient directement de (2.13) et (2.22). En supposant que c'est vrai pour J_{k-2} , où $2 \leq k \leq N+1$, on a, $\forall x \in X$:

$$J_{k-1}(x) = c(x, \mu_*(x, J_{k-2})) + \beta \int_X J_{k-2}(z) dF(z | \rho(x, \mu_*(x, J_{k-2}))). \quad (2.37)$$

où

$$0 \leq \int_X J_{k-2}(z) dF(z | \rho(x, \mu_*(x, J_{k-2}))) \leq (k-1)B. \quad (2.38)$$

Par (2.12), (2.38) et (2.37) on obtient alors:

$$0 \leq J_{k-1}(x) \leq kB \quad \forall x \in X. \quad (2.39)$$

D'autre part, on sait que $\tilde{r}_i = \tilde{x}_i > x_i = r_i$, car $i \notin \tilde{R}$. De plus, par l'hypothèse d'induction, $J_{k-1}(z)$ est une fonction croissante en z_i .

Le lemme A.1 (voir Appendice A) nous assure alors que l'expression (2.36) est non-négative. Cela implique, par (2.35), que:

$$J_k(\tilde{x}) \geq J_k(x).$$

Donc, $J_k(x)$ est une fonction croissante en x_i , ce qui démontre le théorème ■

Si x et \tilde{x} sont deux vecteurs de X tels que $\tilde{x} \geq x$ et $\tilde{x}_j = x_j \quad \forall j \in M-S$, il est clair, par le théorème précédent, que

$$J_k(\tilde{x}) \geq J_k(x).$$

THEOREME 2.2:

Supposons que $\forall y \in [0, \infty]$, $F_i(y | r_i)$ est une fonction décroissante en $r_i \quad \forall i \in M$.

Si dans l'état x , au temps t_k , $0 \leq k < N$, il est optimal de remplacer toutes les composantes du système, alors dans tout état $\tilde{x} \geq x$ tel que:

$$c(\tilde{x}, R) - c(x, R) \geq c(\tilde{x}, M) - c(x, M), \quad (2.40)$$

il est aussi optimal, au temps t_k , de remplacer toutes les composantes.

PREUVE:

Pour simplifier la notation, nous poserons, $\forall x \in X$ et $\forall R \in U(x)$:

$$H_k(x, R) \stackrel{\Delta}{=} \beta \int_{X_m} \dots \int_{X_1} J_{k-1}(z) dF_1(z_1 | r_1) \dots dF_m(z_m | r_m) \quad (2.41)$$

où $r = \rho(x, R)$.

Soient $x, \tilde{x} \in X \mid x \leq \tilde{x}$.

Il s'agit de démontrer que si

$$c(x, R) + H_k(x, R) \geq c(x, M) + H_k(x, M) \quad \forall R \in U(x) \quad (2.42)$$

alors

$$c(\tilde{x}, R) + H_k(\tilde{x}, R) \geq c(\tilde{x}, M) + H_k(\tilde{x}, M) \quad \forall R \in U(\tilde{x}) . \quad (2.43)$$

Soit $R \in U(\tilde{x})$.

Puisque $\tilde{x} \geq x$, on a $U(\tilde{x}) \subseteq U(x)$, et donc $R \in U(x)$.

Soient $x = x^{(0)} \leq x^{(1)} \leq \dots \leq x^{(m)} = \tilde{x}$

tels que pour $i = 0, \dots, m-1$, $x^{(i+1)}$ ne diffère de $x^{(i)}$ que par une seule composante. Il est clair qu'une telle suite existe.

Pour $i = 0, \dots, m-1$, puisque $x^{(i)} \leq \tilde{x}$, on a $U(\tilde{x}) \subseteq U(x^{(i)})$ et donc $R \in U(x^{(i)})$.

Par le Théorème 2.1 et en utilisant le lemme A.1 m fois, on obtient:

$$H_k(\tilde{x}, R) \geq H_k(x^{(m-1)}, R) \geq \dots \geq H_k(x^{(1)}, R) \geq H_k(x, R) . \quad (2.44)$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} c(\tilde{x}, R) + H_k(\tilde{x}, R) &\geq c(\tilde{x}, R) + H_k(x, R) \geq c(\tilde{x}, R) - c(x, R) + c(x, R) + H_k(x, R) \\ &\geq c(\tilde{x}, R) - c(x, R) + c(x, M) + H_k(x, M) \quad \text{par (2.42)} \\ &\geq c(\tilde{x}, M) + H_k(x, M) \quad \text{par (2.40)} . \end{aligned} \quad (2.45)$$

Mais il est clair que

$$H_k(x, M) = \beta \int_X J_{k-1}(z) dF(z|0) = H_k(\tilde{x}, M) , \quad (2.46)$$

ce qui implique (2.43) et complète la preuve ■

REMARQUES:

La condition (2.40) est nécessaire pour la validité du théorème. Cette condition pourrait ne pas être satisfaite, par exemple, si la valeur de revente du système usagé diminuait considérablement de l'état x à l'état \tilde{x} . Dans un tel cas, il pourrait arriver qu'il soit avantageux de remplacer tout le système dans l'état x , mais pas dans l'état \tilde{x} .

De plus, l'hypothèse que $\mu_*(x, J_{k-1}) = M$ ne peut pas être relaxée. Si $\mu_*(x, J_{k-1}) \subset M$ et $\tilde{x} \geq x$, il n'est pas nécessairement vrai qu'il existe une politique optimale telle que $\mu_*(\tilde{x}, J_{k-1}) \supseteq \mu_*(x, J_{k-1})$. Il est même possible que l'on doive remplacer plus de composantes lorsqu'on est dans l'état x que lorsqu'on est dans l'état \tilde{x} . Nous donnerons, en section 3., un exemple où une telle situation se produit même dans le cas de composantes identiques. D'autres exemples se trouvent dans [28] et [29].

Pour $m > 1$, il n'existe donc pas, en général, une politique optimale de type "seuil de contrôle". Même si le nombre d'états possibles est fini, $c_F \equiv 0$, c croissante et bornée en fonction de x et R et les $F_i(y|r)$ décroissantes par rapport à $r \forall y \in [0, \infty]$ et $\forall i \in M$, il n'existe pas nécessairement un seuil $\ell_*^k(x_1^k, \dots, x_{j-1}^k, x_{j+1}^k, \dots, x_m^k)$ tel que si l'on fixe les états des $m - 1$ composantes autres que j aux valeurs $x_1^k, \dots, x_{j-1}^k, x_{j+1}^k, \dots, x_m^k$, "remplacer la composante j si et seulement si $x_j^k \geq \ell_*^k(x_1^k, \dots, x_{j-1}^k, x_{j+1}^k, \dots, x_m^k)$ " fasse partie d'une politique optimale.

2.4 Classes de Composantes Identiques.DEFINITION:

Un ensemble $S \subset M$ est appelé un ensemble de composantes identiques (ECI) si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

- (i) Toutes les composantes de S ont la même fonction de répartition conditionnelle:

$$F_i(\cdot|r) \equiv F(\cdot|r) \quad \forall r \in B_i, \quad \forall i \in S \quad (2.47)$$

$$\text{et } B_i = B_j \quad \forall i, j \in S.$$

(ii) Toutes les composantes de S ont la même importance dans les fonctions de coût: si $x \in X$ et $R \in U(x)$, alors pour tout vecteur \tilde{x} obtenu à partir de x par une permutation quelconque des composantes de x dont les indices sont dans S ; si \tilde{R} désigne l'ensemble des nouveaux indices (après permutation) des composantes qui étaient dans R , on a:

$$c(\tilde{x}, \tilde{R}) = c(x, R) \quad (2.48)$$

et

$$c_F(\tilde{x}) = c_F(x). \quad (2.49)$$

LEMME 2.3:

Soit S un ECI.

Soient x, R, \tilde{x} et \tilde{R} tels que dans la définition précédente et soit H_k tel que défini en (2.41).

Alors, pour $k = 0, 1, \dots, N-1$:

$$H_k(\tilde{x}, \tilde{R}) = H_k(x, R) \quad (2.50)$$

et

$$J_k(\tilde{x}) = J_k(x) \quad (2.51)$$

PREUVE:

La preuve se fait par induction sur k .

On sait que:

$$J_0(\tilde{x}) = c_F(\tilde{x}) = c_F(x) = J_0(x) . \quad (2.52)$$

Supposons que la relation (2.51) est vraie pour k , $0 \leq k \leq N-1$.

Nous allons montrer que cela implique que (2.50) et (2.51) tiennent pour $k+1$.

Soit $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ la permutation qui a permis de passer de x à \tilde{x} .

On a:

$$\tilde{x} = (x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \dots, x_{\sigma_m}) . \quad (2.53)$$

Posons $r = \rho(x, R)$ et $\tilde{r} \stackrel{\Delta}{=} \rho(\tilde{x}, \tilde{R})$. Il est clair que

$$\tilde{r} = (r_{\sigma_1}, \dots, r_{\sigma_m}) . \quad (2.54)$$

On a ainsi:

$$\begin{aligned}
H_{k+1}(x, R) &\stackrel{\Delta}{=} \beta \int_{X_m} \dots \int_{X_1} J_k(z_1, \dots, z_m) dF_1(z_1 | r_1) \dots dF_m(z_m | r_m) \\
&= \beta \int_{X_{\sigma_m}} \dots \int_{X_{\sigma_1}} J_k(z_{\sigma_1}, \dots, z_{\sigma_m}) dF_{\sigma_1}(z_{\sigma_1} | r_{\sigma_1}) \dots dF_{\sigma_m}(z_{\sigma_m} | r_{\sigma_m}) \\
&\quad \text{par (2.47) et par l'hypothèse d'induction;} \\
&= \beta \int_{X_{\sigma_m}} \dots \int_{X_{\sigma_1}} J_k(\tau_1, \dots, \tau_m) dF_{\sigma_1}(\tau_1 | \tilde{r}_1) \dots dF_{\sigma_m}(\tau_m | \tilde{r}_m) \\
&\quad \text{par (2.54);} \\
&= \beta \int_{X_1} \dots \int_{X_m} J_k(\tau_1, \dots, \tau_m) dF_1(\tau_1 | \tilde{r}_1) \dots dF_m(\tau_m | \tilde{r}_m) \\
&\quad \text{par (2.47);} \\
&\stackrel{\Delta}{=} H_{k+1}(\tilde{x}, \tilde{R})
\end{aligned}$$

ce qui vérifie (2.50) .

Par ailleurs, si l'Eq. (2.50) est vérifiée pour $k+1$ pour tout $(x, R, \tilde{x}, \tilde{R})$ satisfaisant les hypothèses du lemme, on a alors:

$$c(\tilde{x}, \tilde{R}) + H_{k+1}(\tilde{x}, \tilde{R}) = c(x, R) + H_{k+1}(x, R) \quad (2.55)$$

$\forall (x, R, \tilde{x}, \tilde{R})$ satisfaisant les hypothèses du lemme.

D'autre part, il est clair que:

$$\tilde{R} \in U(\tilde{x}) \Leftrightarrow R \in U(x) . \quad (2.56)$$

Donc, par (2.56), (2.55) et (2.48):

$$\begin{aligned}
J_{k+1}(\tilde{x}) &= \underset{R \in U(\tilde{x})}{\text{Min}} \{c(\tilde{x}, \tilde{R}) + H_{k+1}(\tilde{x}, \tilde{R})\} \\
&= \underset{R \in U(x)}{\text{Min}} \{c(x, R) + H_{k+1}(x, R)\} = J_{k+1}(x)
\end{aligned} \quad (2.57)$$

ce qui complète la preuve ■

Lorsque S est un ECI, on peut, suite au lemme précédent, supposer que les composantes de S sont toujours ordonnées par ordre décroissant:

$$i, j \in S \quad , \quad i < j \quad \Rightarrow \quad x_i \geq x_j \quad (2.58)$$

D'autre part, si pour chaque $y \in [0, \infty]$, la probabilité qu'une composante de S passe à un état supérieur à y est croissante en fonction de son état présent, il semble, intuitivement, que les composantes de S que l'on devra remplacer préventivement, s'il en est, seront celles dont les états sont les plus grands parmi toutes les composantes de S qui ne sont pas défailtantes. Nous allons démontrer que cette intuition est juste, pourvu qu'il n'en coûte pas plus cher de remplacer une composante de S lorsque son état "d'usure" est plus avancé.

THEOREME 2.4:

Soit S un ECI tel que $\forall i \in S, \forall y \in [0, \infty], F_i(y|r_i)$ est une fonction décroissante en r_i . Soit $\pi = (\mu^0, \mu^1, \mu^2, \dots) \in \Pi$, une politique optimale admissible.

Pour $k = 0, \dots, N-1$ et $\forall x \in X$, posons:

$$G^k(x) \stackrel{\Delta}{=} \{i \in S \cap \mu^k(x) \mid x_i \neq d\} . \quad (2.59)$$

$G^k(x)$ est l'ensemble des composantes non-défailtantes de S qui sont remplacées au temps t_k , selon la politique π , lorsqu'on est dans l'état x .

Soit $\tilde{\pi} = (\tilde{\mu}^0, \tilde{\mu}^1, \tilde{\mu}^2, \dots)$ la politique définie en posant:

$$\tilde{\mu}^k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} (\mu^k(x) - G^k(x)) \cup \tilde{G}^k(x) & \forall k \leq N-1 \\ \mu^k(x) & \forall k \geq N \end{array} \right\} \quad (2.60)$$

où $\tilde{G}^k(x)$ contient les indices correspondant aux $|G^k(x)|$ plus grandes valeurs de $\{x_i \mid i \in S \text{ et } x_i \neq d\}$.

Si pour $k = 0, \dots, N-1$ et $\forall x \in X$ on a:

$$c(x, \tilde{\mu}^k(x)) \leq c(x, \mu^k(x)) \quad (2.61)$$

alors $\tilde{\pi}$ est aussi une politique optimale admissible.

PREUVE:

Soit $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ et soit $x \in X$. Soient s et \tilde{s} les vecteurs obtenus respectivement de $\rho(x, \mu^k(x))$ et $\rho(x, \tilde{\mu}^k(x))$ en ordonnant les composantes appartenant à S en ordre décroissant.

Par définition de $\tilde{\mu}^k$, il est évident que:

$$\tilde{s} \leq s . \quad (2.62)$$

D'autre part, par définition de H_k et par le lemme précédent, il est clair que:

$$H_k(x, \mu^k(x)) = H_k(s, \phi) \quad (2.63)$$

et

$$H_k(x, \tilde{\mu}^k(x)) = H_k(\tilde{s}, \phi) . \quad (2.64)$$

Par le même raisonnement que celui que nous avons fait dans la preuve du Théorème 2.2, on vérifie que:

$$H_k(\tilde{s}, \phi) \leq H_k(s, \phi) , \quad (2.65)$$

Il s'ensuit, par (2.63), (2.64), (2.61) et la définition de π , que:

$$c(x, \tilde{\mu}^k(x)) + H_k(x, \tilde{\mu}^k(x)) \leq c(x, \mu^k(x)) + H_k(x, \mu^k(x)) = J_k(x) .$$

$\tilde{\pi}$ est donc une politique optimale. Par ailleurs, par (2.56), il est clair que $\tilde{\pi}$ est admissible ■

2.5 Horizon infini; minimisation du coût espéré total actualisé.

Considérons le cas où Δt est fixé et $T = \infty$. Supposons que:

$$\beta < 1 . \quad (2.66)$$

Pour toute politique $\pi = (\mu^0, \mu^1, \dots) \in \Pi$ et $\forall x \in X$, soit:

$$J_\pi(x) = \begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} J_{N, \pi}(x) & \text{si cette limite existe} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.67)$$

le coût espéré actualisé sur un horizon infini lorsqu'on est dans l'état x et qu'on utilise la politique π . Posons:

$$J^*(x) = \inf_{\pi \in \Pi} J_\pi(x) \quad \forall x \in X . \quad (2.68)$$

Soit:

$$U = \left\{ \mu : X \rightarrow P(M) \mid \mu(x) \in U(x) \quad \forall x \in X \right\} \quad (2.69)$$

l'ensemble des règles de décision admissibles.

Pour chaque $\mu \in U$, $\pi = (\mu, \mu, \dots)$ est une politique stationnaire admissible. Dans ce cas, on peut écrire J_μ au lieu de J_π et μ est optimale si et seulement si $J^* \equiv J_\mu$.

Nous allons utiliser certains résultats du chapitre 4 de Bertsekas et Shreve [8] afin d'obtenir un algorithme permettant de trouver une politique ε -optimale. Auparavant, il est nécessaire de vérifier l'Hypothèse c (Hypothèse de contraction) de la section 4.1 de [8]. C'est ce que nous ferons au lemme 2.5. Voici d'abord quelques définitions générales.

On définit la norme d'une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| . \quad (2.70)$$

Soit:

$$\mathcal{B} \triangleq \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\| < \infty\} \quad (2.71)$$

l'espace de Banach des fonctions à valeur réelle et bornées sur X .

Soit:

$$\mathcal{B}^+ \triangleq \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \geq 0 \text{ et } \|f\| < \infty\} \quad (2.72)$$

le sous-ensemble fermé des fonctions de \mathcal{B} qui sont non-négatives.

$\forall \mu \in U$, $\forall J \in \mathcal{B}$ et $\forall x \in X$, on pose:

$$T_\mu(J)(x) \triangleq c(x, \mu(x)) + \beta \int_X J(z) dF(z | \rho(x, \mu(x))) \quad (2.73)$$

où f^* est définie à l'Appendice B et:

$$T(J)(x) \triangleq \min_{\mu \in U} T_\mu(J)(x) \quad (2.74)$$

et on note par $\mu_*(x, J)$ la valeur de $\mu(x)$ pour laquelle le minimum est atteint dans (2.74).

On a ainsi:

$$T_{\mu_*(\cdot, J)}(J) \equiv T(J) . \quad (2.75)$$

LEMME 2.5:

Soit $\mu \in U$ et $\pi = (\mu^0, \mu^1, \dots) \in \Pi$.

On a alors:

- (i) $c_F \in \bar{B}$
- (ii) $\forall J \in \bar{B}$, $T_\mu(J) \in \bar{B}$ et $T(J) \in \bar{B}$
- (iii) $\forall J, J^1 \in B$, $\|T_\mu(J) - T_\mu(J^1)\| \leq 2\beta \|J - J^1\|$
- (iv) $\forall J, J^1 \in \bar{B}$, $\|T_\mu(J) - T_\mu(J^1)\| \leq \beta \|J - J^1\|$
- (v) $\forall x \in X$, $\exists z^*(x) \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_{\mu^0} \dots T_{\mu^{N-1}}(c_F)(x) = z^*(x).$$

PREUVE:

- (i) $c_F \in \bar{B}$ par définition de c_F .
- (ii) Soit $J \in \bar{B}$. Puisque $c \geq 0$ et $J \geq 0$, on obtient, par le lemme B.1 (Appendice B), que $T_\mu(J) \geq 0$. De même, comme c et J sont bornées, alors par la définition de f^* , $T_\mu(J)$ l'est aussi. On a donc $T_\mu(J) \in \bar{B}$.

De plus, par l'Eq. (2.75), on a aussi $T(J) \in \bar{B}$.

- (iii) Soient $J, J^1 \in B$. On a alors:

$$\left. \begin{aligned} J^1(x) &\leq J(x) + \|J - J^1\| \\ J(x) &\leq J^1(x) + \|J - J^1\| \end{aligned} \right\} \forall x \in X \quad (2.76)$$

Par le lemme B.3 (Appendice B), on obtient, $\forall r \in X \cap \mathbb{R}^m$:

$$\int_X^* J^1(z) dF(z|r) \leq \int_X^* J(z) dF(z|r) + 2 \|J - J^1\| \quad (2.77)$$

$$\int_X^* J(z) dF(z|r) \leq \int_X^* J^1(z) dF(z|r) + 2 \|J - J^1\| \quad (2.78)$$

et donc:

$$\|T_\mu(J) - T_\mu(J^1)\| = \beta \sup_{\substack{x \in X \\ r = \rho(x, \mu(x))}} \left| \int_X^* J(z) dF(z|r) - \int_X^* J^1(z) dF(z|r) \right| \quad (2.79)$$

$$\leq 2\beta \|J - J^1\|. \quad (2.80)$$

(iv) Soient $J, J^1 \in \bar{B}$. On peut alors appliquer le lemme B.2, où l'égalité tient (car $\|J - J^1\|$ est mesurable), aux termes de droite des inégalités (2.76) pour obtenir, $\forall r \in X \cap \mathbb{R}^m$:

$$\int_X^* J^1(z) dF(z|r) \leq \int_X^* (J(z) + \|J - J^1\|) dF(z|r) = \int_X^* J(z) dF(z|r) + \|J - J^1\|$$

$$\int_X^* J(z) dF(z|r) \leq \int_X^* (J^1(z) + \|J - J^1\|) dF(z|r) = \int_X^* J^1(z) dF(z|r) + \|J - J^1\|.$$

on obtient alors, par (2.79):

$$\|T_\mu(J) - T_\mu(J^1)\| \leq \beta \|J - J^1\| \quad (2.81)$$

(v) Puisque c et c_F sont non-négatives et bornées par B , la définition de f^* et le lemme B.1 nous assurent que $\forall n \in \mathbb{N}_*$ et $\forall n \in \mathbb{N}_*$:

$$0 \leq T_\mu^{N+n}(c_F) \leq B + \beta B = \frac{B(1-\beta^2)}{1-\beta}$$

$$0 \leq T_\mu^{N+n-1} T_\mu^{N+n}(c_F) \leq B + \beta \frac{B(1-\beta^2)}{1-\beta} = \frac{B(1-\beta^3)}{1-\beta}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$0 \leq T_\mu^{N \dots} T_\mu^{N+n}(c_F) \leq B + \beta \frac{B(1-\beta^{n+1})}{1-\beta} = \frac{B(1-\beta^{n+2})}{1-\beta}$$

ainsi,

$$\|T_\mu^N \dots T_\mu^{N+n}(c_F) - c_F\| \leq \frac{B(1-\beta^{n+2})}{1-\beta}.$$

On a donc, par (iv) et (ii):

$$\|T_\mu^0 \dots T_\mu^{N-1} T_\mu^N \dots T_\mu^{N+n}(c_F) - T_\mu^0 \dots T_\mu^{N-1}(c_F)\| \leq \frac{\beta^N B(1-\beta^{n+2})}{1-\beta} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

ce qui, par le critère de convergence de Cauchy, implique (v) ■

PROPOSITION 2.6:

- (i) $\lim_{N \rightarrow \infty} \|T^N(J) - J^*\| = 0 \quad \forall J \in \bar{B} . \quad \dagger$
- (ii) $J^* \in \bar{B}$ est l'unique point fixe de T dans \bar{B} .
i.e. $\{J \in \bar{B} \mid J = T(J)\} = \{J^*\}$.
- (iii) Une politique stationnaire $\pi^* = (\mu^*, \mu^*, \dots) \in \Pi$ est optimale si et seulement si $T_{\mu^*}(J^*) = J^*$.
- (iv) $\|T(J) - T(J^1)\| \leq \beta \|J - J^1\| \quad \forall J, J^1 \in \bar{B}$
- (v) $\forall \pi = (\mu^0, \mu^1, \dots) \in \Pi$, $\forall J \in \bar{B} : \lim_{N \rightarrow \infty} \|T_{\mu^0} \dots T_{\mu^{N-1}}(J) - J_{\pi}\| = 0$.

PREUVE:

Ces résultats découlent directement des Propositions 4.1, 4.2 et 4.3 de [8] ■

Il est clair que:

$$J_{N, \pi^*} \equiv T^N(c_F) \quad (2.82)$$

où π^* est une politique qui satisfait l'Equation (2.25). Puisque $c_F \in \bar{B}$, la partie (i) de la Proposition précédente nous assure que $\forall x \in X$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_{N, \pi^*}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} T^N(c_F)(x) = J^*(x) . \quad (2.83)$$

Les parties (ii) et (iii) impliquent que $\mu_*(\cdot, J^*)$ définit une politique optimale stationnaire.

PROPOSITION 2.7:

Soit $S_1 \subseteq M$ tel que $\forall i \in S_1$ et $\forall y \in [0, \infty]$, $F_i(y | r_i)$ est décroissante selon r_i . On a alors:

\dagger T^N désigne la composition de l'opérateur T appliqué N fois.

- (i) $J^*(x)$ est croissante selon chaque composante x_i telle que $i \in S_1$.
- (ii) Si $S_1 = M$ et si la condition donnée par (2.40) est satisfaite pour $x \leq \tilde{x}$, alors il existe une politique optimale stationnaire $\pi^* = (\mu^*, \mu^*, \dots) \in \Pi$ telle que si $\mu_*(x) = M$, alors $\mu_*(\tilde{x}) = M$.
- (iii) Soit $S_2 \subseteq S_1$ tel que S_2 est un ECI. Soit $\pi = (\mu, \mu, \dots)$ une politique optimale stationnaire et

$$G(x, \mu) \stackrel{\Delta}{=} \{i \in \mu(x) \cap S_2 \mid x_i \neq d\} \quad (2.84)$$

l'ensemble des composantes non-défaillantes de S_2 qui sont remplacées, selon la règle μ , lorsqu'on est dans l'état x .

Soit $\tilde{G}(x)$ l'ensemble des indices des $|G(x, \mu)|$ plus grandes valeurs de $\{x_i \mid i \in S_2 \text{ et } x_i \neq d\}$. Posons:

$$\tilde{\mu}(x) \stackrel{\Delta}{=} (\mu(x) - G(x, \mu)) \cup \tilde{G}(x) \quad \forall x \in X. \quad (2.85)$$

Si

$$c(x, \tilde{\mu}(x)) \leq c(x, \mu(x)) \quad \forall x \in X, \quad (2.85)$$

alors $\tilde{\pi} = (\tilde{\mu}, \tilde{\mu}, \dots)$ est une politique stationnaire admissible et optimale.

PREUVE:

Remarquons que la fonction J_k définie en (2.23) est identique à $T^k(c_F)$. D'autre part, par la Proposition 2.6,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(c_F) = J^*. \quad (2.86)$$

Ainsi, (i) vient directement du Théorème 2.1. Pour démontrer (ii) et (iii), il suffit de reprendre les preuves des Théorèmes 2.2 et 2.4 avec J^* à la place de J_{k-1} ■

PROPOSITION 2.8:

Soient $J_0 \in \bar{B}$, $\delta > 0$ et une suite $\{J_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \bar{B}$ tels que:

$$\|J_{k+1} - T(J_k)\| \leq \delta \quad k=0,1,2,\dots \quad (2.87)$$

On a alors, $\forall k \geq 1$ et $\forall x \in X$:

$$\gamma_1 \leq J^*(x) - J_k(x) \leq \gamma_2 \quad (2.88)$$

où

$$\gamma_1 = \frac{\beta}{1-\beta} \left[\inf_{x \in X} \{J_k(x) - J_{k-1}(x)\} - \delta \right] \quad (2.89)$$

$$\gamma_2 = \frac{\beta}{1-\beta} \left[\sup_{x \in X} \{J_k(x) - J_{k-1}(x)\} + \delta \right] \quad (2.90)$$

PREUVE:

Par la Proposition 4.6 de [8] (en y posant $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta$, $m = k = 1$ et $J \equiv J_{k-1}$), on a, $\forall x \in X$:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{1-\beta} \inf_{x \in X} \{T(J_{k-1})(x) - J_{k-1}(x)\} &\leq J^*(x) - T(J_{k-1})(x) \\ &\leq \frac{\beta}{1-\beta} \sup_{x \in X} \{T(J_{k-1})(x) - J_{k-1}(x)\} . \end{aligned} \quad (2.91)$$

Mais par (2.88),

$$\|T(J_{k-1}) - J_k\| \leq \delta . \quad (2.92)$$

En utilisant (2.93) dans (2.92), on obtient facilement le résultat ■

L'algorithme suivant, une adaptation de la méthode des approximations successives, nous permet d'obtenir une politique ε -optimale après un nombre fini d'itérations.

1. Choisir $n \in \mathbb{N}$ et $\delta \geq 0$.

Poser $J_0(x) := c_F(x) \quad \forall x \in X$ et $k = 0$.

2. Répéter n fois:

Poser $k := k + 1$ et définir $J_k \in \bar{\mathcal{B}}$ telle que J_k soit Borel-mesurable et:

$$\|J_k - T(J_{k-1})\| \leq \delta. \quad (2.93)$$

3. Choisir γ_1 et γ_2 tels que:

$$\gamma_1 \leq \frac{\beta}{1-\beta} \left[\inf_{x \in X} \{J_k(x) - J_{k-1}(x)\} - \delta \right] \quad (2.94)$$

$$\gamma_2 \geq \frac{\beta}{1-\beta} \left[\sup_{x \in X} \{J_k(x) - J_{k-1}(x)\} + \delta \right] \quad (2.95)$$

4. Poser $J_k(x) := J_k(x) + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \quad \forall x \in X$ (2.96)

5. Calculer $V \in \bar{\mathcal{B}}$ telle que V soit Borel-mesurable et:

$$\|V - T(J_k)\| \leq \delta \quad (2.97)$$

$$\text{Poser } \varepsilon_0 = \|V - J_k\|. \quad (2.98)$$

6. Si $\frac{\varepsilon_0 \beta + \delta}{1-\beta} + \text{Min} \left\{ \frac{\beta(\gamma_2 - \gamma_1)}{2} + \delta, \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} + \varepsilon_0 \right\} > \varepsilon$, (2.99)

Alors retourner à l'étape 2;

Sinon, soit $\pi^* = (\mu, \mu, \dots)$ la politique stationnaire déterminée par la règle $\mu \equiv \mu_*(\cdot, J_k)$, où $\mu_*(x, J_k)$ est l'ensemble pour lequel le minimum est atteint dans la définition de $T(J_k)(x)$.

Stop.

PROPOSITION 2.9:

A la fin de l'algorithme précédent, on a:

$$(i) \quad \|J_k - J^*\| \leq \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}$$

$$(ii) \quad \|V - J^*\| \leq \text{Min} \left[\frac{\beta(\gamma_2 - \gamma_1)}{2} + \delta, \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} + \varepsilon_0 \right]$$

(iii) La politique π^* est ε -optimale, dans le sens que :

$$J^* \leq J_{\pi^*} \leq J^* + \varepsilon .$$

PREUVE:

(i) Découle directement de l'Eq. (2.97) et de la Proposition 2.8.

$$(ii) \quad \|V - J^*\| \leq \|V - T(J_k)\| + \|T(J_k) - J^*\| \leq \delta + \frac{\beta(\gamma_2 - \gamma_1)}{2} \quad \text{par} \\ (2.98) \text{ et (i) .}$$

$$\|V - J^*\| \leq \|V - J_k\| + \|J_k - J^*\| \leq \varepsilon_0 + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \quad \text{par (2.99) et (i) .}$$

$$(iii) \quad \text{On a } \|T_\mu(V) - V\| = \|T(V) - V\| \leq \|T(V) - T(J_k)\| + \|T(J_k) - V\| \\ \leq \beta \varepsilon_0 + \delta \quad (2.100)$$

par (2.98), (2.99) et la Proposition 2.6 (iv) .

Il est alors facile de montrer, par induction, que $\forall k \geq 1$:

$$\|T_\mu^k(V) - V\| \leq (\varepsilon_0 \beta + \delta) \left(\frac{1 - \beta^k}{1 - \beta} \right) . \quad (2.101)$$

En effet, en supposant que (2.101) tient pour $k - 1$, on a :

$$\|T_\mu^k(V) - V\| \leq \|T_\mu^{k-1}(V) - V\| + \|T_\mu^k(V) - T_\mu^{k-1}(V)\| \\ \leq (\varepsilon_0 \beta + \delta) \left(\frac{1 - \beta^{k-1}}{1 - \beta} \right) + \beta^{k-1} \|T_\mu(V) - V\| \\ \leq (\varepsilon_0 \beta + \delta) \left(\frac{1 - \beta^{k-1}}{1 - \beta} \right) + \beta^{k-1} (\varepsilon_0 \beta + \delta) \\ \leq (\varepsilon_0 \beta + \delta) \left(\frac{1 - \beta^k}{1 - \beta} \right) ,$$

ce qui vérifie (2.101) .

Ainsi, par la proposition 2.6 (v):

$$\|J_{\pi^*} - V\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|T_{\mu}^k(V) - V\| \leq \frac{\varepsilon_0 \beta + \delta}{1 - \beta} \quad . \quad (2.102)$$

On obtient alors:

$$\begin{aligned} J_{\pi^*} - J^* &\leq \|J_{\pi^*} - V\| + \|V - J^*\| \\ &\leq \frac{\varepsilon_0 \beta + \delta}{1 - \beta} + \text{Min} \left(\frac{\beta(\gamma_2 - \gamma_1)}{2} + \delta, \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} + \varepsilon_0 \right) \leq \varepsilon . \end{aligned}$$

Comme J^* correspond à la politique optimale, il est clair que $J^* \leq J_{\pi^*}$ et la Proposition est ainsi démontrée ■

L'étape 2 est répétée plusieurs fois afin de diminuer la fréquence des tests des étapes 3 et 4.

En général, on peut utiliser les résultats des Théorèmes 2.2 et 2.4 afin de minimiser le nombre de candidats au minimum dans la définition de $T(J_{k-1})(x)$. On peut ainsi réduire le temps de calcul de $J_k(x)$ à l'étape 2. En outre, dans certains cas, la structure du problème peut permettre de simplifier davantage les calculs. Nous en verrons un exemple au prochain chapitre.

Lorsqu'il est possible de calculer $T(J_{k-1})$ de façon exacte, on peut prendre $\delta = 0$. Mais en pratique, ce n'est pas toujours le cas. Une valeur non-nulle de δ peut permettre de ne calculer, à l'étape 2, qu'une approximation de $T(J_{k-1})$. Dans certains cas, cela peut faciliter l'implantation. Par ailleurs, on doit payer le prix de cette liberté, puisque la condition de l'étape 4 est d'autant plus difficile à satisfaire que δ est grand. Le choix de δ dépendra donc de la nature du problème.

Lorsqu'on sait que $T(J_{k-1})$ est croissante en fonction des composantes de x , on peut réaliser l'étape 2 en ne calculant $T(J_{k-1})$ que pour un nombre restreint de valeurs de X . Il est alors facile de construire une fonction J_k et de trouver δ tels que l'Eq. (2.93) soit satisfaite.

2.6 Application: l'entretien d'un camion de transport.

Reconsidérons l'exemple du camion de transport de la section 1.4. Soit M l'ensemble des pièces critiques du camion. Soit t_k le nombre de kilomètres parcourus par le camion après sa $k^{\text{ième}}$ sortie et x_i^k le nombre de kilomètres parcourus, au temps t_k , depuis que la $i^{\text{ième}}$ composante a été renouvelée pour la dernière fois. Le vecteur x^k indique alors l'âge des composantes après la $k^{\text{ième}}$ sortie du camion.

Supposons que l'état d'une composante à la fin d'une sortie est déterminé selon une distribution de probabilité qui ne dépend que de son état au début de la sortie, que le coût d'une intervention ne dépend que de l'état du camion et des composantes remplacées et que les coûts sont actualisés par un coefficient $\beta < 1$ par sortie.

Le modèle précédent s'applique alors, de sorte que l'algorithme de la section 2.5 devrait nous permettre de pouvoir déterminer une politique optimale.

Il est à remarquer que puisque le modèle est sur horizon infini, il est fort probable que pour certains états, l'action optimale soit de remplacer le camion en entier.

CHAPITRE 3

3. ETUDE D'UN CAS PARTICULIER OU L'ETAT DU SYSTEME EST BASE SUR L'AGE DES COMPOSANTES.

3.1 Particularités du modèle.

Considérons le cas où l'état x_i^k d'une composante non-défaillante au temps t_k est donné par son âge exprimé en nombre de périodes de longueur Δt . On a alors:

$$X_i = \mathbb{N} \cup \{d\} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1)$$

Soit

$$p_i(\xi) \stackrel{\Delta}{=} 1 - F_i(\infty | \xi) \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.2)$$

la probabilité que la i^e composante tombe en panne durant la prochaine période si son âge au début de cette période est ξ . La i^e fonction de répartition se ramène alors à:

$$F_i(\tau | \xi) = \left. \begin{array}{ll} 0 & \text{si } -\infty < \tau < \xi+1 \\ 1-p_i(\xi) & \text{si } \xi+1 \leq \tau \leq \infty \\ 1 & \text{si } \tau = d \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

en d'autres termes, une composante dont l'âge est ξ au temps t_k^+ peut passer, au temps t_{k+1} , soit à l'état d , soit à l'état $\xi+1$, avec des probabilités respectives de $p_i(\xi)$ et $1-p_i(\xi)$.

Supposons que toutes les composantes sont identiques et ont un taux de défaillance croissant selon l'âge, i.e.:

$$p_i(.) \equiv p(.) \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4)$$

et $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow p(\xi_1) \leq p(\xi_2)$. (3.5)

Soit †:

$$c_f(x) = 0 \quad \forall x \in X \quad (3.6)$$

$$c(x, R) = \begin{cases} 0 & \text{si } R = \phi \\ C+c|R| & \text{si } R \neq \phi \end{cases} \quad (3.7)$$

Ainsi, M est un ECI, ce qui implique qu'il n'est pas nécessaire de distinguer les composantes. On peut donc supposer que les x_i sont toujours ordonnés par ordre décroissant.

A un instant t_k , ou t_k^+ , l'état de chaque composante est un élément de l'ensemble $\{0, 1, \dots, k, d\}$. En distinguant les composantes, il y a $(k+2)^m$ états possibles pour le système. En ne distinguant pas les composantes, ce nombre est réduit à:

$$K_{k+2}^m = C_{m+k+1}^m = \frac{(m+k+1)!}{m!(k+1)!} \quad (3.8)$$

En guise d'approximation, on peut choisir une certaine constante positive a et supposer qu'une composante d'âge supérieur à a est équivalente à une composante d'âge a , i.e.:

$$p(\xi) = p(a) \quad \forall \xi > a \quad (3.9)$$

† $|R|$ désigne la cardinalité de l'ensemble R.

On réduit ainsi le nombre d'états possibles du système à :

$$C_{m+a+1}^m = \frac{(m+a+1)!}{m!(a+1)!} \quad (3.10)$$

Si on veut limiter à $a+1$ périodes la vie d'une composante, il suffit de prendre :

$$p(a) = 1.$$

Dans ce cas, toute composante d'âge $a+1$ doit être remplacée immédiatement.

Notons par $p(\tau|\xi)$ la probabilité qu'une composante passe à l'état τ au temps t_{k+1} sachant qu'elle est dans l'état ξ au temps t_k^+ .

On a, pour $0 \leq \xi \leq a$:

$$p(\tau|\xi) = \left. \begin{array}{ll} p(\xi) & \text{si } \tau = d \\ 1-p(\xi) & \text{si } \tau = \xi+1 \text{ et } \xi < a \\ & \text{ou si } \tau = \xi = a. \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

et la probabilité que le système passe à l'état x au temps t_{k+1} sachant qu'il est dans l'état r au temps t_k^+ est donnée par :

$$P(x|r) = \prod_{i=1}^m p(x_i|r_i). \quad (3.12)$$

Il est à remarquer qu'au temps t_k^+ , aucune composante ne peut être défective. L'état du système est donc, à cet instant, un élément de l'ensemble :

$$X_0 \stackrel{\Delta}{=} \{x \in X \mid a \geq x_1 \geq \dots \geq x_m \geq 0\}. \quad (3.13)$$

Au temps t_{k+1} , pour $k \geq 0$, aucune composante ne peut être d'âge 0. L'état du système est alors un élément de l'ensemble:

$$X_d \triangleq \{x \in X \mid \exists j \in \{0, 1, \dots, m\} \text{ tel que } x_i = d \ \forall i \leq j$$

$$\text{et } a \geq x_{j+1} \geq \dots \geq x_m \geq 1\} \quad . \quad (3.14)$$

On définit la fonction $j: X_D \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$ par

$$j(x) = |\{i \in M \mid x_i = d\}| \quad \forall x \in X_D. \quad (3.15)$$

$j(x)$ représente le nombre de composantes défailantes lorsqu'on est dans l'état x .

Chacun des ensembles X_0 et X_D contient C_{m+a}^a éléments; tandis que $X_0 \cap X_D$ en contient C_{m+a-1}^{a-1} .

Pour un horizon infini avec actualisation ($0 < \beta < 1$), on peut trouver une politique ε -optimale en utilisant l'algorithme de la section 2.5. Les particularités du problème nous permettent en outre de simplifier certains calculs.

Grâce au théorème 2.4, on peut se restreindre, lors du calcul de $T(J_{k-1})(x)$ à l'étape 2 de l'algorithme, aux règles μ telles que $\forall x \in X_D$, $\mu(x)$ contient les $|\mu(x)|$ premières composantes de x , de sorte que les composantes remplacées préventivement soient nécessairement les plus âgées parmi les non-défailantes. Choisir $\mu(x)$ revient donc à choisir un nombre $\ell(x)$ de composantes à remplacer préventivement, $\ell(x) \in \{0, 1, \dots, m-j\}$. On remplace alors les $\ell(x) + j$ premières composantes. Le nombre de candidats pour $\mu(x)$ est ainsi réduit de 2^{m-j} à $m+1-j$.

Le théorème 2.2 nous permet de réduire davantage les calculs: si $\mu(x) = M$ pour un certain x , alors $\forall \tilde{x} \geq x$ on a: $\mu(\tilde{x}) = M$ et $T(J_{k-1})(\tilde{x}) = T(J_{k-1})(x)$.

En outre, en cas d'absence de panne, il n'y a pas lieu d'effectuer de remplacements préventifs. Cela nous est assuré par le lemme suivant, dont la preuve se trouve à l'appendice C.

LEMME 3.1

Pour $k = 1, 2, \dots$ on a:

$$\mu_*(x, J_{k-1}) = \phi \quad \forall x \in X_0 \cap X_D.$$

Le prochain Lemme permettra de réduire les calculs requis à l'étape 3 de l'algorithme.

LEMME 3.2

Pour $k = 1, 2, \dots$, soient J_{k-2} , J_{k-1} et J_k des fonctions Borel-mesurables de \bar{B} telles que:

$$\| J_k - T(J_{k-1}) \| \leq \delta \quad (3.16)$$

et

$$\| J_{k-1} - T(J_{k-2}) + \gamma \| \leq \delta \quad (3.17)$$

où γ est une constante (le cas $\gamma \neq 0$ correspond au cas où J_{k-1} a été réajusté à l'étape 4 de l'algorithme).

Posons:

$$\gamma_1 = \min_{r \in X_0} \{J_k(r) - J_{k-1}(r)\} \quad (3.18)$$

$$\gamma_2 = \max_{r \in X_0} \{J_k(r) - J_{k-1}(r)\} \quad (3.19)$$

$$\varepsilon_0 = \max_{r \in X_0} |V(r) - J_k(r)|. \quad (3.20)$$

On a alors:

$$(i) \quad \gamma_1 \leq \min_{x \in X} \{J_k(x) - J_{k-1}(x)\} + 4\delta$$

$$(ii) \quad \gamma_2 \leq \max_{x \in X} \{J_k(x) - J_{k-1}(x)\} - 4\delta$$

(iii) Si $V \in \overline{\mathcal{B}}$, V est Borel-mesurable et $\|V - T(J_k)\| \leq \delta$, alors:

$$\max_{x \in X} |V(x) - J_k(x)| - 4\delta \leq \varepsilon_0 \leq \|V - J_k\|.$$

PREUVE

par (3.16) et (3.17):

Soit $x \in X - X_0$. On a alors;

$$\begin{aligned} (i) \quad J_k(x) - J_{k-1}(x) &\leq T(J_{k-1})(x) - T(J_{k-2})(x) + \gamma + 2\delta \\ &= C + c\mu_*(x, J_{k-1}) + T(J_{k-1})(\rho(x, \mu_*(x, J_{k-1}))) \\ &\quad - C - c\mu_*(x, J_{k-2}) - T(J_{k-2})(\rho(x, \mu_*(x, J_{k-2}))) + \gamma + 2\delta \\ &\leq c\mu_*(x, J_{k-2}) + T(J_{k-1})(\rho(x, \mu_*(x, J_{k-2}))) \\ &\quad - c\mu_*(x, J_{k-2}) - T(J_{k-1})(\rho(x, \mu_*(x, J_{k-2}))) + \gamma + 2\delta \end{aligned}$$

$$\leq J_k(\rho(x, \mu_*(x, J_{k-2}))) - J_{k-1}(\rho(x, \mu_*(x, J_{k-2}))) + 4\delta$$

$$\leq \gamma_2 + 4\delta$$

car $\rho(x, \mu_*(x, J_{k-2})) \in X_0$.

$$(ii) \quad J_k(x) - J_{k-1}(x) \geq T(J_{k-1})(x) - T(J_{k-2})(x) + \gamma - 2\delta$$

$$\geq c\mu_*(x, J_{k-1}) + T(J_{k-1})(\rho(x, \mu_*(x, J_{k-1})))$$

$$- c\mu_*(x, J_{k-1}) + T(J_{k-2})(\rho(x, \mu_*(x, J_{k-1}))) + \gamma - 2\delta$$

$$\geq J_k(\rho(x, \mu_*(x, J_{k-1}))) - J_{k-1}(\rho(x, \mu_*(x, J_{k-1}))) - 4\delta$$

$$\geq \gamma_1 - 4\delta.$$

(iii) Ce résultat découle de (i) et (ii), en prenant V à la place de J_k et J_k à la place de J_{k-1} .

3.2 Un algorithme spécialisé.

Suite aux remarques précédentes, on peut spécialiser l'algorithme de la section 2.5 afin d'exploiter les particularités du problème. On pose $\delta=0$, c'est à dire qu'on considère que l'erreur lors du calcul de $T(J)$ est négligeable.

L'algorithme utilise une procédure appelée "ITERER", que nous décrivons d'abord. On suppose, pour simplifier la notation, qu'il y a équivalence entre x et (x_1, \dots, x_m) .

Procédure ITERER (J_{k-1}, J_k):

les paramètres J_{k-1} et J_k sont des fonctions de X dans \mathbb{R} .

1. Pour $j = m, m-1, \dots, 1$

début. Poser $x_1 = x_2 = \dots = x_j = d$.

Pour $x_m = 1, \dots, a$

.
.
.

$x_{j+1} = x_{j+2}, \dots, a$

début. Posons:

$$J_{k-1}(x) = C + c_j + \min_{0 \leq \ell \leq m-j} \{c\ell + J_{k-1}(r)\} \quad (3.21)$$

où $r \in X_0$ est le vecteur formé à partir de x en mettant à 0 ses $\ell + j$ premières composantes et en ordonnant ensuite le vecteur résultant par ordre décroissant; et soit $\ell(x)$ le nombre ℓ pour lequel le minimum est atteint dans (3.21).

Si $\ell(x) = m - j$, alors poser:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } \xi = x_{j+1} + 1, \dots, a: \\ \left\{ \begin{array}{l} J_{k-1}(d, \dots, d, \xi, x_{j+2}, \dots, x_m) = C + cm + J_{k-1}(0) \\ \ell(d, \dots, d, \xi, x_{j+2}, \dots, x_m) = m - j \end{array} \right. \\ x_{j+1} = a. \end{array} \right.$$

fin;

fin.

2. Pour $x_m = 0, 1, \dots, a$

$$x_{m-1} = x_m, \dots, a$$

· ·

· ·

· ·

$$x_1 = x_2, \dots, a$$

$$\text{Poser } J_k(x) = \beta \sum_{\tau \in X_D} P(\tau|x) J_{k-1}(\tau).$$

3. Stop.

A partir de $\{J_{k-1}(x)\}_{x \in X_0}$, cette procédure calcule

$$\{J_{k-1}(x)\}_{x \in X_D - X_0} \text{ puis } \{J_k(x)\}_{x \in X_0}.$$

Algorithme:

1. Choisir $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$.

$$\text{Poser } J_1(x) = 0 \quad \forall x \in X_0$$

et $k = 1$.

2. Répéter n fois:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Poser } k = k+1 \\ \text{ITERER } (J_{k-1}, J_k) \end{array} \right.$$

3. Poser:

$$\gamma_1 = \frac{\beta}{1-\beta} \min_{x \in X_0} \{J_k(x) - J_{k-1}(x)\}$$

$$\gamma_2 = \frac{\beta}{1-\beta} \max_{x \in X_0} \{J_k(x) - J_{k-1}(x)\}$$

4. Poser:

$$J_k(x) = J_k(x) + \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} \quad \forall x \in X_0$$

5. ITERER (J_k , V).

$$\text{Poser } \varepsilon_0 = \max_{x \in X_0} |V(x) - J_k(x)|$$

$$6. \text{ Si } \frac{\beta \varepsilon_0}{1-\beta} + \frac{\beta(\gamma_2 - \gamma_1)}{2} > \varepsilon,$$

alors retourner à l'étape 2,

sinon poser, $\forall x \in X - X_0$:

$$l_*(x) = \text{Arg Min}_{0 \leq l \leq m-j(x)} \{cl + J_k(r)\}$$

où r est défini comme dans la procédure ITERER.

7. Stop.

La politique choisie consiste à remplacer préventivement, lorsqu'on est dans l'état x , les $l_*(x)$ composantes les plus âgées parmi celles qui ne sont pas défailantes. Soit π_* cette politique.

Les propositions 2.8 et 2.9 et les lemmes 3.1 et 3.2 nous assurent que:

$$\| J_{\pi^*} - J^* \| \leq \frac{\beta \varepsilon_0}{1-\beta} + \frac{\beta(\gamma_2 - \gamma_1)}{2}$$

et

$$\| v - J^* \| \leq \beta \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)}{2} .$$

Pour plus de détails concernant la programmation de l'algorithme, voir l'Appendice D.

3.3 Exemple numérique.

Soit $m = 6$, $\beta = 0.95$, $C = 8.0$, $c = 6.0$ et $a = 4$. La probabilité $p(\xi)$ qu'un élément d'âge ξ tombe en panne durant la prochaine période est donnée par:

$$\begin{aligned} p(0) &= .05 \\ p(1) &= .10 \\ p(2) &= .20 \\ p(3) &= .40 \\ p(\xi) &= .90 \quad \forall \xi \geq 4. \end{aligned}$$

Après 50 itérations (131 sec. de temps de CPU sur un Cyber 173), on obtient la solution décrite au tableau 3.1.

On a:

$$\|V - J^*\| \leq .007$$

$$\|J_{\pi^*} - J^*\| \leq .013$$

Le coût à venir espéré, actualisé lorsque le système est neuf est 274.49.

On peut remarquer que dans l'état (3 3 d d d d), seulement les 4 composantes défaillantes sont remplacées, tandis que dans l'état (3 1 d d d d), 5 composantes sont remplacées. Ainsi, comme nous l'avons mentionné à la fin de la section 2.3, $\tilde{x} \geq x$ n'implique pas nécessairement que $l_*(\tilde{x}) \geq l_*(x)$.

On constate aussi que lorsque la plupart des composantes sont relativement jeunes, il convient de remplacer préventivement, lors d'une panne, toute composante dont l'âge est trop avancé. Par contre, lorsque la plupart des composantes sont plutôt âgées et que peu d'entre elles sont défaillantes, il semble préférable de ne remplacer que ces dernières.

Il existe une analogie intéressante avec certains résultats de Anderson dans [2]. Ce dernier considère une machine qui se détériore aléatoirement en fonction du temps. La machine est entretenue continuellement à un taux variable $m(x)$ qui dépend de son état x . Sous certaines hypothèses, le niveau optimal d'entretien préventif $m(x)$ est une fonction décroissante de x . En fait, à mesure que la machine se détériore, il en coûte de plus en plus cher pour la remettre en bon état tandis qu'une réparation préventive partielle n'améliore pas suffisamment sa fiabilité pour que ce soit profitable. Il vient un moment où il vaut mieux cesser tout entretien préventif.

Reprenons maintenant le même exemple, mais en posant cette fois:

$$p(\xi) = 1.00 \quad \forall \xi \geq 4.$$

La solution obtenue est décrite au tableau 3.2. On obtient cette fois-ci $J^*(0) = 275.23$, soit seulement .27% d'augmentation par rapport au premier cas. De plus, les valeurs de $l_*(x)$ sont partout les mêmes sauf pour une seule valeur de x . La solution obtenue semble donc robuste par rapport à un changement de la probabilité de défaillance d'une composante âgée.

Tableau 3.2 Solution de l'exemple numérique avec $p(4) = 1.00$

NOMBRE D'ELEMENTS DANS LE SYSTEME: 6
 NOMBRE D'AGES POSSIBLES POUR CHAQUE ELEMENT: 5
 COEFFICIENT D'ACTUALISATION PAR PERIODE: .950
 COUT FIXE DE BASE PAR INTERVENTION: 8.00
 COUT DE REMPLACEMENT PAR ELEMENT: 6.00
 ON S'ARRETE D'ITERER LORSQUE L'ERREUR SUR LE COUT ESPERE ACTUALISE EST INFERIEURE A .02
 MAIS LE TEST D'ARRET N'EST EFFECTUE QU'A TOUTES LES 50 ITERATIONS.

P(X) EST LA PROBABILITE Q'UN ELEMENT D'AGE X TOMBE EN PANNE AU COURS DE LA PROCHAINE PERIODE ON A PRIS ICI:

| X | P(X) |
|-----|--------|
| 0 | 0500 |
| 1 | 1000 |
| 2 | 2000 |
| 3 | 4000 |
| 4 | 1 0000 |
| > 4 | 1 0000 |

AINSI, UN ELEMENT NEUF EST CONSIDERE D'AGE 0 ET UN ELEMENT D'AGE SUPERIEUR A 4 EST CONSIDERE EQUIVALENT A UN ELEMENT D'AGE 4

RESULTATS : QUOI FAIRE EN CAS DE PANNE ?

| VECTEUR DES AGES DES ELEMENTS QUI FONCTIONNENT ENCORE | NOMBRE D'ELEMENTS SUPPLEMENTAIRES A REMPLACER | COUTS TOTAUX DE L'INTERVENTION | VECTEUR DES AGES DES ELEMENTS APRES INTERVENTION | COUT ESPERE ACTUALISE A VENIR POUR UN HORIZON INFINI APRES INTERVENTION |
|---|---|--------------------------------|--|---|
| * * * * * | | 44.00 | 0 0 0 0 0 0 | 275.23 |
| 1 * * * * | | 38.00 | 1 0 0 0 0 0 | 277.48 |
| 1 1 * * * | 1 | 44.00 | 1 0 0 0 0 0 | 280.33 |
| 1 1 1 * * | 1 | 44.00 | 1 1 0 0 0 0 | 275.23 |
| 1 1 1 1 * | | 32.00 | 1 1 1 0 0 0 | 275.23 |
| 1 1 1 1 1 | | 32.00 | 1 1 1 1 0 0 | 282.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 38.00 | 1 1 1 1 0 0 | 277.69 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 0 | 277.69 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 284.43 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 38.00 | 1 1 1 1 1 1 | 280.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 38.00 | 1 1 1 1 1 1 | 280.33 |
| 1 1 1 1 1 | 2 | 44.00 | 1 1 1 1 1 1 | 287.18 |
| 1 1 1 1 1 | 2 | 44.00 | 1 1 1 1 1 1 | 275.23 |
| 1 1 1 1 1 | 2 | 44.00 | 1 1 1 1 1 1 | 275.23 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 281.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 284.43 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 279.88 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 279.88 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 286.66 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 286.66 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 289.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 289.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 292.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 292.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 295.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 295.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 298.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 298.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 300.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 300.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 303.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 303.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 306.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 306.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 309.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 309.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 312.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 312.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 315.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 315.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 317.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 317.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 320.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 320.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 323.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 323.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 326.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 326.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 329.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 329.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 332.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 332.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 334.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 334.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 337.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 337.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 340.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 340.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 343.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 343.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 346.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 346.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 349.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 349.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 351.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 351.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 354.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 354.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 357.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 357.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 360.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 360.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 363.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 363.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 366.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 366.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 368.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 368.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 371.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 371.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 374.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 374.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 377.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 377.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 380.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 380.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 383.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 383.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 385.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 385.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 388.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 388.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 391.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 391.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 394.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 394.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 397.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 397.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 400.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 400.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 402.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 402.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 405.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 405.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 408.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 408.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 411.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 411.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 414.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 414.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 417.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 417.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 419.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 419.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 422.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 422.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 425.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 425.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 428.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 428.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 431.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 431.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 434.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 434.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 436.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 436.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 439.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 439.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 442.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 442.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 445.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 445.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 448.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 448.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 451.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 451.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 453.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 453.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 456.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 456.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 459.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 459.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 462.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 462.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 465.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 465.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 468.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 468.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 470.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 470.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 473.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 473.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 476.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 476.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 479.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 479.33 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 482.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 482.17 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 485.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 485.00 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 487.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 487.83 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 490.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 490.67 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 493.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 493.50 |
| 1 1 1 1 1 | 1 | 32.00 | 1 1 1 1 1 1 | 496.33</ |

3.4 Comparaison avec des politiques sous-optimales.

Considérons maintenant deux types de politiques simples, possiblement sous-optimales.

Politique de type I: Pas de remplacement préventif; à chaque étape, on ne remplace que les éléments défectueux.

Politique de type II: Un nombre $a^* \in \{1, 2, \dots, a+1\}$ est choisi et fixé une fois pour toutes. A un instant d'observation, si aucune composante n'est défectueuse, aucun remplacement n'est effectué. Par contre, s'il y a au moins une défaillance, on remplace toutes les composantes défectueuses et toutes les composantes dont l'âge est supérieur ou égal à a^* .

Choisir la politique de type I correspond à prendre $a^* = a+1$ pour une politique de type II. Ainsi, il existera toujours une politique de type II au moins aussi bonne que celle de type I.

L'exemple suivant illustre ce que peut être le pourcentage d'augmentation des coûts si l'on utilise l'une de ces politiques plutôt que la politique optimale.

EXEMPLE.

Considérons un système à 6 composantes, chacune ayant une durée de vie de distribution Gamma ($\alpha=4$, $\beta=1$), i.e. Erlang ($\mu = \frac{1}{4}$, $K = 4$). Ainsi, $\forall t \in \mathbb{N}$, on a:

$$p(\xi) = \frac{F(\xi+1) - F(\xi)}{1 - F(\xi)} \quad (3.26)$$

où

$$F(\xi) = \frac{1}{6} \int_0^\xi t^3 e^{-t} dt. \quad (3.27)$$

En intégrant par parties 3 fois, on obtient:

$$\int t^3 e^{-t} dt = -e^{-t}(t^3 + 3t^2 + 6t + 6) + C^k$$

et l'on peut donc écrire:

$$F(\xi) = \left[-\frac{1}{6} e^{-t} (t^3 + 3t^2 + 6t + 6) \right] \Big|_{t=0}^{t=\xi}$$

$$= 1 - e^{-\xi} \left(1 + \xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6} \right).$$
(3.28)

Par (3.28) et (3.26), on obtient le tableau suivant:

| ξ | $F(\xi)$ | $p(\xi)$ |
|-------|----------|----------|
| 0 | 0 | .019 |
| 1 | .0190 | .126 |
| 2 | .1429 | .245 |
| 3 | .3528 | .330 |
| 4 | .5665 | .389 |
| 5 | .7350 | .429 |
| 6 | .8488 | .459 |
| 7 | .9182 | .482 |
| 8 | .9576 | .500 |
| 9 | .9788 | .513 |
| 10 | .9897 | . |
| . | . | . |
| . | . | . |
| . | . | . |

Tableau 3.3. Probabilité qu'une composante tombe en panne en fonction de son âge.

Le processus peut être approximé raisonnablement en supposant qu'une composante d'âge supérieur à 7 est équivalente à une composante d'âge 7 (puisque en général, les composantes dépasseront rarement cet âge). Les probabilités de défaillances seront donc les suivantes:

| ξ | $p(\xi)$ |
|----------|----------|
| 0 | .019 |
| 1 | .126 |
| 2 | .245 |
| 3 | .330 |
| 4 | .389 |
| 5 | .429 |
| 6 | .459 |
| ≥ 7 | .482 |

Tableau 3.4 Approximation des probabilités de défaillance.

Pour $\beta = 0.90$, $c = 1.0$ et pour différentes valeurs de C , nous avons calculé le coût total espéré actualisé à partir de l'état 0 lorsqu'on utilise:

- (i) la politique optimale (algorithme de la section 3.2)
- (ii) la politique de type I, que nous dénotons π
- (iii) la meilleure politique de type II, que nous dénotons π_2 .

Les résultats obtenus sont donnés au tableau 3.5. Les calculs pour les politiques de type II ont été effectués en utilisant une modification de l'algorithme de la section 3.2. On a simplement remplacé l'équation (3.21) par:

$$J_{k-1}(x) = C + cj + cl(x) + J_{k-1}(r) \tag{3.29}$$

où $l(x)$ est la cardinalité de $\{ i \in M \mid a^* \leq x_i \leq a \}$.

| C | politique optimale | politique de type I | | politique de type II | | |
|------|--------------------|---------------------|------------------|-----------------------|--|------------------|
| | $J^*(0)$ | $J_{\pi_1}(0)$ | % d'augmentation | a^* | $J_{\pi_2}(0)$ | % d'augmentation |
| 1.0 | 16.693 | 16.693 | 0.00% | 8 | 16.693 | 0.00% |
| 2.0 | 22.907 | 22.921 | 0.06% | 8 7 | 22.921 23.025 | 0.06% |
| 3.0 | 28.772 | 29.149 | 1.31% | 8 7 6 5 4 | 29.149 29.17 29.18 29.20 29.27 | 1.31% |
| 4.0 | 33.830 | 35.38 | 4.58% | 4 3 2 | 34.7 34.21 34.90 | 1.12% |
| 5.0 | 38.296 | 41.61 | 8.65% | 3 2 1 | 38.84 38.627 39.41 | 0.86% |
| 10.0 | 57.189 | 72.75 | 27.21% | 2 1 | 57.253 57.322 | 0.11% |

Tableau 3.5 Comparaison des valeurs du coût espéré total actualisé pour un système neuf, sous les 3 types de politiques.

On remarque qu'il est d'autant plus avantageux de faire des remplacements préventifs que le rapport C/c est grand. Ainsi, pour une politique de type II, la valeur optimale de a^* diminue à mesure que C/c augmente.

On remarque aussi, ce qui est plus intéressant, que la meilleure politique de type II est en général presque aussi bonne que la politique optimale. Dans le pire cas, l'augmentation du coût est de 1.31%.

Cet exemple suggère donc qu'une politique de type II peut être un bon substitut à la politique optimale pour les cas où cette dernière est trop compliquée (difficile à implanter) ou que la taille du problème est trop grande pour que l'on puisse l'obtenir.

Il n'est pas évident, toutefois, que cette remarque s'applique dans le cas d'une structure de coût plus générale (p.e. lorsqu'il y a un coût associé à la panne). Il faudrait poursuivre les recherches dans ce sens.

D'autre part, lorsque l'horizon est fini, il est clair que a^* devrait dépendre du temps.

Pour $\xi > 7$, nous avons approximé $p(\xi)$ par $p(7) = .482$. Voyons maintenant ce qui se passe, dans le cas où $C = 3$, lorsqu'on augmente $p(7)$ à 0.6, puis à 0.8.

| $p(\xi)$ $\forall \xi \geq 7$ | Politique optimale | | Politique de Type II | | |
|----------------------------------|--------------------|---------------------|----------------------|----------------|---------------------|
| | $J^*(0)$ | % d'augmentation | a^* | $J_{\pi_2}(0)$ | % d'augmentation |
| .482 | 28.772 | | 8 | 29.149 | |
| | | | 7 | 29.17 | |
| | | | 6 | 29.18 | |
| .6 | 28.779 | < .03% | 8 | 29.25 | < .38% |
| | | | 7 | 29.18 | < .06% |
| | | | 6 | 29.18 | < .03% |
| .8 | 28.784 | < .05% | 8 | 29.36 | < .75% |
| | | | 7 | 29.20 | < .14% |
| | | | 6 | 29.18 | < .03% |

Tableau 3.6 Variations de $J^*(0)$ et de $J_{\pi_2}(0)$ lorsque $p(7)$ passe de .482 à .6 ou à .8.

Nous constatons que la valeur optimale de a^* change avec $p(7)$. Toutefois, la valeur de $J^*(0)$ de même que celle de $J_{\pi_2}(0)$ ne changent pas beaucoup. Il semble donc que l'approximation du tableau 4 soit raisonnable.

CHAPITRE 4

4. VERS UN MODELE EN TEMPS CONTINU

4.1 Introduction.

Dans le modèle du chapitre 2, le système était observé à intervalles fixes et les remplacements ne pouvaient être effectués qu'aux bornes des intervalles. Dans le cas où le système est observé continuellement et toute composante qui défaille doit être remplacée immédiatement, le processus peut être approximé par notre modèle en temps discret; il suffit de choisir Δt suffisamment petit. Au paragraphe 4.2, nous examinons ce cas de plus près.

Nous considérons par ailleurs, en section 4.3, un modèle en temps continu où le système n'est observé qu'un nombre fini de fois dans tout intervalle de temps fini, mais où les instants d'observation ne sont pas tous fixés d'avance. On a affaire, dans ce cas, à un problème consistant à déterminer un contrôle impulsionnel optimal pour un processus de saut.

4.2 Système observé continuellement.

Nous allons maintenant discuter brièvement et heuristiquement ce qui se passe lorsque, dans le modèle du chapitre 2, Δt tend vers 0. Un traitement mathématique plus rigoureux sortirait du cadre de ce rapport.

Considérons le problème de la section 2.1, sur un horizon fini T , mais où le système est observé continuellement. Pour $t \geq 0$, le vecteur $x(t) \in X$ désigne l'état du système au temps t . $\{x(t)\}_{t \geq 0}$ est un processus stochastique en temps continu.

La structure de coût est la suivante:

- (i) S'il n'y a pas de remplacement durant l'intervalle $[v_1, v_2]$, le coût engendré au temps v_1 pour cet intervalle de temps est:

$$\int_{v_1}^{v_2} c_1(x(t)) e^{-\alpha(t-t_1)} dt \quad (4.1)$$

où $c_1: X \rightarrow [0, B]$ est mesurable, non négative et bornée par $B < \infty$.

- (ii) S'il y a remplacement d'un ensemble $R \neq \phi$ de composantes au temps t , un coût positif $c_2(x(t), R) > 0$ est engendré à cet instant, où $c_2: X \times [P(M) - \{\phi\}] \rightarrow (0, B]$.
- (iii) Au temps T , il y a un coût $C_F(x(T))$ non négatif et borné par B , dépendant de l'état final du système.
- (iv) Le taux d'actualisation est $\alpha \geq 0$, de sorte qu'un coût engendré à t est actualisé au temps v en le multipliant par le coefficient d'actualisation $e^{-\alpha(t-v)}$.

Une politique admissible est une fonction $\mu: [0, \infty) \times X \rightarrow P(M)$ telle que $\mu(t, x) \in U(x) \quad \forall (t, x) \in [0, \infty) \times X$. $\mu(t, x)$ représente l'ensemble des composantes à remplacer lorsqu'on est dans l'état x au temps t . Dénotons par U l'ensemble des politiques admissibles et par $x(t^+)$ l'état du système au temps t , après les remplacements (s'il y en a). Aux instants t où $\mu(t, x(t)) \neq \phi$, on dit qu'il y a une intervention. Il est clair qu'on a affaire à un contrôle impulsif, mais pas nécessairement à un processus de saut.

Soit $\mu^\phi \equiv \phi$ la politique (non admissible) qui consiste à n'effectuer aucun remplacement.

On suppose que pour $i = 1, \dots, m$, $\forall \xi \in B_1$, $\forall \tau \in \mathbb{R} \cup \{d\}$
 et $\forall t > 0$,

$$F_{i,t}(\tau|\xi) \stackrel{\Delta}{=} P(x_i(v+t) \leq \tau | x_i(v^+) = \xi, \mu = \mu^\phi) \quad (4.2)$$

est bien définie et ne dépend pas de v .

Comme les différentes composantes sont stochastiquement indépendantes, on a

$$\begin{aligned} \forall z \in (\mathbb{R} \cup \{d\})^m, \quad \forall r \in \prod_{i=1}^m B_1, \quad \forall t > 0: \\ F_t(z|r) \stackrel{\Delta}{=} P(x(v+t) \leq z | x(v^+) = r, \mu = \mu^\phi) \\ = \prod_{i=1}^m F_{i,t}(z_i | r_i) \end{aligned} \quad (4.3)$$

indépendamment de v .

On suppose en outre que pour un certain $\delta > 0$, un système neuf fonctionne sans panne pour une durée d'au moins δ avec une probabilité non nulle. Autrement dit, $\exists \varepsilon \in (0,1)$ tel que:

$$F_t(\infty|0) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall t \in (0, \delta] .$$

LEMME 4.1:

Sous les hypothèses précédentes, il existe une politique admissible pour laquelle le nombre espéré d'interventions, durant $[0, T]$ est fini et le coût espéré total est borné.

PREUVE:

Soit μ^δ la politique admissible qui consiste à remplacer toutes les composantes du système lors de chaque défaillance et à toutes les δ unités de temps:

$$\mu^\delta(t, x(t)) = \begin{cases} M & \text{si } t \text{ est multiple de } \delta \text{ ou si } \exists i \in M \text{ tel que} \\ & x_i(t) = d \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, le nombre espéré d'interventions durant la période $[k\delta, (k+1)\delta)$ si on utilise la politique μ^δ est:

$$\begin{aligned} E \left[\begin{array}{c} \text{Nombre} \\ \text{d'interventions} \end{array} \right] &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} i P \left[\begin{array}{c} i \text{ interventions} \\ \text{durant } [k\delta, (k+1)\delta) \end{array} \right] \\ &\leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} i \varepsilon^i = \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} . \end{aligned}$$

Le nombre espéré d'interventions durant $[0, T]$ est alors borné par

$1 + \frac{T}{\delta(1-\varepsilon)^2}$ de sorte que le coût espéré est borné par

$$B \left[2 + T + \frac{T}{\delta(1-\varepsilon)^2} \right] \blacksquare$$

Considérons maintenant une politique μ fixée et une réalisation $x(t)$ du processus. Si le nombre d'interventions durant $[0, T]$ est fini, disons I , posons $t_0 = 0$, $t_{I+1} = T$ et pour $j = 1, 2, \dots, I$, soit t_j l'instant de la $j^{\text{ième}}$ intervention. Pour $0 \leq v \leq T$, soit $n(v)$ le nombre d'interventions durant $[0, v]$. On a $n(T) = I$.

Pour $0 \leq v_1 < v_2 \leq T$, le coût correspondant à l'intervalle $(v_1, v_2]$, actualisé au temps 0, est:

$$\begin{aligned} W_\mu(v_1, v_2, \{x(t)\}_{t \in (v_1, v_2]}) &= \int_{v_1}^{v_2} c_1(x(t)) e^{-\alpha t} dt \\ &+ \sum_{\{i | t_i \in (v_1, v_2]\}} c_2(x(t_i), \mu(t_i, x(t_i))) e^{-\alpha t_i} \\ &+ C_F(x(T)) e^{-\alpha T} \cdot \mathbb{1}_{(v_2=T)}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dans le cas où il y a une infinité d'interventions, le coût est infini, puisque $c_2(\cdot, R) > 0 \quad \forall R \neq \phi$.

En supposant que toutes les conditions de mesurabilité nécessaires sont vérifiées, on peut noter, $\forall \mu \in U$:

$$V_{\mu}(v_1, x) \stackrel{\Delta}{=} E[\bar{W}_{\mu}(v_1, T, \cdot) \mid x(v_1) = x] \quad (4.5)$$

où l'espérance mathématique est prise sur toutes les trajectoires possibles selon une mesure déterminée par (4.3) et μ .

$$V(v_1, x) \stackrel{\Delta}{=} \text{Min}_{\mu \in U} V_{\mu}(v_1, x). \quad (4.6)$$

Le problème consiste à trouver $\mu^* \in U$ telle que $\forall x \in X$:

$$V_{\mu^*}(0, x) = V(0, x). \quad (4.7)$$

En d'autres mots, on cherche à minimiser le coût espéré total actualisé au temps 0.

Il est clair que l'on peut se restreindre à ne considérer que les politiques μ pour lesquelles le nombre espéré d'interventions durant $[0, T]$ est fini, car sinon le coût espéré est infini. Nous avons montré précédemment que de telles politiques existent.

Soit $N_1 < N_2 < N_3 < \dots$ une suite strictement croissante de nombres naturels. A chaque N_i , correspond une partition de l'intervalle $[0, T]$ en N_i sous-intervalles de longueur $\Delta_i = T/N_i$. Pour un N_i donné, si l'on pose:

$$F(\cdot | r) \equiv F_{\Delta_i}(\cdot | r); \quad (4.8)$$

$$c(x,R) \equiv c_2(x,R) + \Delta_i c_1(x) \quad (4.9)$$

$\forall x \in X, \forall R \in \mathcal{P}(M)$, avec $c_2(\cdot, \phi) \equiv 0$; et

$$\beta = e^{-\alpha \Delta_i} \quad (4.10)$$

alors tout le développement du chapitre 2 tient. Soit $\{J_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des fonctions définies par les Eqs. (2.22) et (2.23) correspondant à N_i .

CONJECTURE:

$$\forall x \in X, \forall v \in [0, T],$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} J_k^{(i)}(x) = V(v, x) \quad (4.11)$$

où $k(v, i) \triangleq \lfloor (T-v)/\Delta_i \rfloor$. En d'autres termes, à mesure que les observations deviennent de plus en plus fréquentes, la fonction de "coût anticipé" tend vers celle d'un processus observé continuellement soumis à un contrôle impulsionnel.

L'équation (4.11) implique évidemment que les propriétés des fonctions J_k démontrées au chapitre 2 sont aussi vraies pour les fonctions $V(v, \cdot)$.

Pour $\alpha > 0$, le coût espéré actualisé sur horizon infini est donné par:

$$V(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} V(0, x) \quad (4.12)$$

et peut être approximé en utilisant l'algorithme de la section 2.5 avec Δt suffisamment petit.

4.3 Modèle en temps continu; système observé lors d'une panne ou d'une inspection prévue.

Considérons maintenant un modèle où "l'état" du système entre deux sauts successifs est supposé constant.

Un saut correspond à une panne du système ou à une inspection. Lors d'un saut, certaines composantes peuvent être remplacées et on détermine la date de la prochaine inspection prévue. Le prochain saut aura lieu à cette date s'il n'y a pas de panne avant et lors de la panne dans le cas contraire.

Une politique admissible est un couple $\pi = (\mu, \theta)$ où:

$$\theta : [0, T] \times X \rightarrow (0, T]$$

est tel que:

$$t < \theta(t, x) \leq T \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times X$$

et μ est tel qu'à la section précédente. S'il y a un saut au temps t , alors $\theta(t, x(t^+))$ indique le temps de la prochaine inspection prévue.

A chaque saut, un coût $c_2(x(t), R)$ est encouru, où t désigne le temps du saut et R l'ensemble des composantes remplacées. c_2 est une fonction strictement positive et bornée par B .

$c_1, c_f, \alpha, F_{i,t}, F_t, \{t_n\}$ et $n(\cdot)$ sont définis comme à la section précédente.

Pour $n = 1, \dots, n(T)$, on a:

$$x(t) = x(t_n^+) \quad \forall t \in (t_n, t_{n+1}). \quad (4.13)$$

Si l'ensemble des éléments remplacés lors d'un saut est non vide, l'état $x(t_n)$ est un état instantané, dans le sens que cet état n'est visité qu'au temps t_n .

Au temps $t \in [t_n, t_{n+1})$, la probabilité qu'il y ait défaillance de la j^{e} composante avant $t+\Delta t$ (en supposant qu'il n'y ait pas d'inspection prévue) est donnée par:

$$\begin{aligned} & 1 - P \left(x_j(v) \leq \infty \quad \forall v \in (t, t+\Delta t] \mid x_j(v) \leq \infty \quad \forall v \in (t_n, t] \right) \\ &= 1 - \frac{F_{j, t+\Delta t - t_n}(\infty \mid x(t_n^+))}{F_{j, t - t_n}(\infty \mid x(t_n^+))} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Si l'on divise cette expression par Δt et que l'on fait tendre le tout vers 0, on obtient (en supposant que cette dérivée existe) le taux de défaillance de cette composante:

$$\begin{aligned} q_j(t \mid t_n, x(t_n^+)) &= \frac{\frac{\partial}{\partial t} F_{j, t - t_n}(\infty \mid x(t_n^+))}{F_{j, t - t_n}(\infty \mid x(t_n^+))} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \ln \left[F_{j, t - t_n}(\infty \mid x(t_n^+)) \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

et le taux de panne du système est alors:

$$\begin{aligned} q(t \mid t_n, x(t_n^+)) &= \sum_{j=1}^m q_j(t \mid t_n, x(t_n^+)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \ln \left[F_{t - t_n}(\infty \mid x(t_n^+)) \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

On simplifie la notation en posant, pour $n = 0, \dots, n(T)$:

$$\theta_{n+1} \triangleq \theta(t_n, x(t_n)) \quad (4.17)$$

$$H_n \triangleq (t_n, x(t_n)) \quad (4.18)$$

$$H_n^+ \triangleq (t_n, x(t_n^+)). \quad (4.19)$$

La fonction de densité de l'instant du prochain saut, pour $v \in (t, \theta_{n+1})$, est:

$$\begin{aligned} f(v|H_n^+; t) &= \frac{\frac{\partial}{\partial v} F_{v-t_n}(\infty|x(t_n^+))}{F_{t-t_n}(\infty|x(t_n^+))} \\ &= q(v|H_n^+) \exp \left[- \int_t^v q(\zeta|H_n^+) d\zeta \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Si le $(n+1)^e$ saut est causé par une défaillance de la j^e composante, la fonction de répartition de l'état du système au temps t_{n+1} est:

$$\begin{aligned} F(z|H_n^+, t_{n+1}; j) &\triangleq P(x(t_{n+1}) \leq z | H_n^+, t_{n+1}; x_j(t_{n+1}) = d) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \prod_{i=j}^m \frac{F_{i, t_{n+1}-t_n}(z_i|x_i(t_n^+))}{F_{i, t_{n+1}-t_n}(\infty|x_i(t_n^+))} & \left\{ \begin{array}{l} \text{si } z_j = d \text{ et} \\ z_i \neq d \forall i \neq j \end{array} \right. \\ 0 & \text{si } z_j \neq d \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Si $t_{n+1} = \theta_{n+1}$, i.e.: si le $(n+1)^e$ saut a lieu au moment d'une inspection prévue, la fonction de répartition de $x(t_{n+1})$ est donnée par:

$$\begin{aligned} F(z|H_n^+, t_{n+1}; 0) &\triangleq P(x(t_{n+1}) \leq z | H_n^+, t_{n+1}, X_i(t_{n+1}) \neq d \forall i \in M) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{F_{t_{n+1}-t_n}(z|x(t_n^+))}{F_{t_{n+1}-t_n}(\infty|x(t_n^+))} & \text{si } z_i \neq d \quad \forall i \in M \\ F(\tau|H_n^+, t_{n+1}; 0) & \text{sinon} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

où τ est obtenu de Z en mettant à ∞ toutes les composantes qui sont à d .

En supposant que q est bornée uniformément, il s'ensuit que la défaillance de deux composantes au même instant ou une panne au temps prévu pour une inspection sont des événements de probabilité nulle.

Pour une politique $\pi = (\mu, \theta)$ fixée, $\forall H_n \in [0, T] \times X$ et $\forall t \in [t_n, t_{n+1})$, soit:

$$\begin{aligned} V_{\pi}^n(t, H_n) \triangleq & E \left[\int_t^T c_1(x(\xi)) e^{-\alpha(\xi-t_n)} d\xi + c_f(x(T)) e^{-\alpha(T-t_n)} \right. \\ & \left. + \sum_{i=n+1}^T c_2(x(t_i), \mu(t_i, x(t_i))) e^{-\alpha(t_i-t_n)} \right] \\ & + c_2(x(t_n), \mu(t_n, x(t_n))) \\ & + \int_{t_n}^t c_1(x(t_n^+)) e^{-\alpha(\zeta-t_n)} d\zeta \end{aligned} \quad (4.23)$$

le coût à venir espéré pour la période $(t_n, T]$, actualisé au temps t_n .

Pour $t = \theta_{n+1}$, on a:

$$\begin{aligned} V_{\pi}^n(t, H_n) &= c_2(x(t_n), \mu(t_n, x(t_n))) \\ &+ \int_{t_n}^t c_1(x_n^+) e^{-\alpha(\zeta-t_n)} d\zeta \\ &+ e^{-\alpha t} \int_X V_{\pi}^{n+1}(t, t, z) dF(z | H_n^+, t; 0) \end{aligned} \quad (4.24)$$

et pour $t = T$:

$$V_{\pi}^n(T, H_n) = c_f(x(t_n^+)). \quad (4.25)$$

Pour $t \in [t_n, t_{n+1})$ et $v \in (t, \theta_n]$, on peut écrire une équation pour $V_{\pi}^n(t, H_n)$ en considérant des probabilités de deux événements possibles:

- (i) le prochain saut est causé par une panne au temps $\xi \in (t, v]$
- (ii) aucune panne n'a lieu durant $(t, v]$.

On obtient:

$$\begin{aligned}
 V_{\pi}^n(t, H_n) &= \int_t^v \left\{ \exp \left[- \int_t^{\xi} q(\zeta | H_n^+) d\zeta \right] \sum_{j=1}^m q_j(\xi | H_n^+) \right. \\
 &\quad \int_{\mathbf{X}} V_{\pi}^{n+1}(\xi, \xi, z) e^{-\alpha(\xi - t_n)} dF(z | H_n^+, \xi; j) \\
 &\quad + c_2(x(t_n), \mu(t_n, x(t_n))) \\
 &\quad \left. + \int_{t_n}^{\xi} c_1(x(t_n^+)) e^{-\alpha(\zeta - t_n)} d\zeta \right\} d\xi \\
 &+ V_{\pi}^n(v, H_n) \left[1 - \int_t^v q(\xi | H_n^+) \exp \left[- \int_t^{\xi} q(\zeta | H_n^+) d\zeta \right] d\xi \right] \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

qui peut aussi s'écrire:

$$\begin{aligned}
 \frac{V_{\pi}^n(v, H_n) - V_{\pi}^n(t, H_n)}{v - t} &= \frac{-1}{v - t} \int_t^v \{ \dots \} d\xi \\
 &+ V_{\pi}^n(v, H_n) \left[1 - \int_t^v q(\xi | H_n^+) \exp \left[- \int_t^{\xi} q(\zeta | H_n^+) d\zeta \right] d\xi \right] \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

où $\{ \dots \}$ désigne l'expression entre accolades dans l'Eq.(4.26). En supposant que V_{π} est dérivable en t et que q est bornée, on obtient, en prenant la limite lorsque v tend vers t par la droite:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} V_{\pi}^n(t, H_n) &= q(t | H_n^+) V_{\pi}^n(t, H_n) \\
&- \sum_{j=1}^m q_j(t | H_n^+) \left[\int_X V_{\pi}^{n+1}(t, t, z) e^{-\alpha(t-t_n)} dF(z | H_n^+, t; j) \right. \\
&+ \left. \int_{t_n}^t c_1(x(t_n^+)) e^{-\alpha(\zeta-t_n)} d\zeta + c_2(x(t_n), \mu(t_n, x(t_n))) \right] \\
&= \sum_{j=1}^m q_j(t | H_n^+) \left[V_{\pi}^n(t, H_n) - \int_{t_n}^t c_1(x(t_n^+)) e^{-\alpha(\zeta-t_n)} d\zeta \right. \\
&- \left. c_2(x(t_n), \mu(t_n, x(t_n))) - \int_X V_{\pi}^{n+1}(t, t, z) e^{-\alpha(t-t_n)} dF(z | H_n^+, t; j) \right]
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Par le principe d'optimalité, une politique $\pi^* = (\mu^*, \tilde{\theta})$ est optimale pour $\tilde{\theta}$ fixé si et seulement si pour tout autre μ admissible, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall H_n \in [0, T) \times X$, $\forall t \in [t_n, T]$, on a :

$$V_{\pi^*}^n(t, H_n) \leq V_{(\mu, \tilde{\theta})}^n(t, H_n) \tag{4.29}$$

Dans ce cas, π^* est solution optimale au problème de trouver une politique admissible de type $\pi = (\mu, \tilde{\theta})$ qui minimise V_{π}^n sous les contraintes (4.28), (4.24) et (4.25).

Pour $\tilde{\theta}$ fixé, par une démarche semblable à celle de Rishell dans [23], on devrait pouvoir montrer que les conditions suivantes sont nécessaires pour que π^* soit une politique optimale :

$$(i) \quad \text{Max}_{R \in M} \left\{ \sum_{j=1}^m q_j(t|t_n, \rho(x(t_n), R)) \left[V_{\pi^*}^n(t, H_n) - \int_{t_n}^t c_1(\rho(x(t_n), R)) e^{-\alpha(\zeta - t_n)} d\zeta \right. \right. \\ \left. \left. - c_2(x(t_n), R) - \int_X V_{\pi^*}^{n+1}(t, t, z) e^{-\alpha(t - t_n)} dF(z|t_n, \rho(x(t_n), R), t; j) \right] \right\} \\ \text{est atteint pour } R = \mu^*(t_n, x(t_n)) \quad (4.30)$$

(ii) Pour $t \in [t_n, \bar{\theta}(H_n))$, $V_{\pi^*}^n(t, H_n)$ satisfait l'équation (4.28)

(iii) Pour $t = \bar{\theta}(H_n)$, l'équation (4.24) est vérifiée si $t < T$ et l'équation (4.25) l'est si $t = T$.

Evidemment, comme le coût espéré à venir ne dépend pas du nombre de sauts qui ont déjà eu lieu, il est clair que $V_{\pi^*}^n$ ne doit pas dépendre de n .

Par ailleurs, comme le nombre espéré de sauts durant $[0, \bar{T}]$ sous la politique optimale doit être fini (par un raisonnement analogue au lemme 4.1), il serait raisonnable de choisir une valeur approximative de $V_{\pi^*}^n$ pour un n suffisamment grand et de calculer une suite $V_{\pi^*}^{n-1}, V_{\pi^*}^{n-2}, \dots, V_{\pi^*}^0$ satisfaisant les équations de la programmation dynamique (i), (ii) et (iii). On devrait s'attendre à ce que $V_{\pi^*}^0$ représente convenablement le coût espéré à venir tel que défini en (4.23), (4.24) et (4.25).

Des équations du même type ont été obtenus par Alj et Haurie [1] et par Goyette et Haurie [16] dans des contextes un peu plus particuliers.

Des techniques de résolution numériques pour ce genre d'équations sont en développement.

Lorsque la fonction θ n'est pas fixée, on doit choisir θ_{n+1} à l'instant t_n de façon à minimiser l'expression (4.26) où $v = \theta_{n+1}$ et $V_{\pi}^n(\theta_{n+1}, H_n)$ satisfait (4.24) ou (4.25) selon le cas. On a alors affaire à un problème de contrôle impulsif. Aux conditions d'optimalité de la page précédente, devraient alors s'ajouter certaines inéquations variationnelles dont la nature exacte devra faire l'objet de futures recherches.

Il serait intéressant de caractériser la fonction V_{π}^n par des théorèmes du type de ceux des sections 2.3 et 2.4. Sous quelles conditions est-ce-que $V_{\pi}^n(t, t_n, x)$ est-elle monotone en t ? en x ? en t_n ? De telles caractérisations seraient de nature à simplifier la résolution numérique des équations de la programmation dynamique.

CONCLUSION

La plus grande partie des recherches ayant trait aux politiques optimales de remplacements préventifs ont été faites pour le cas d'un système à une seule composante, alors qu'en pratique, on a surtout affaire à des systèmes à plusieurs composantes qui ne sont pas nécessairement indépendantes.

Nous avons vu, dans les chapitres précédents, comment il est possible d'utiliser la théorie moderne du contrôle stochastique pour obtenir des conditions d'optimalité d'une politique de remplacements. Une telle politique peut être obtenue, théoriquement, en utilisant les équations de la programmation dynamique. En pratique, la résolution numérique risque cependant de poser des difficultés majeures. Même en discrétisant le temps et l'ensemble des états, la taille du problème devient souvent beaucoup trop grande pour permettre une adaptation directe de la procédure numérique présentée au chapitre 2.

Des efforts restent à faire pour développer des algorithmes efficaces permettant de résoudre numériquement de tels problèmes. Il serait raisonnable de diriger ces efforts vers des problèmes plus particuliers. Les algorithmes pourraient ainsi exploiter les particularités des problèmes et possiblement différer d'un problème à l'autre.

Par ailleurs, on peut aussi se restreindre à chercher une politique optimale parmi certaines classes de politiques plus simples. Des exemples numériques (section 3.4) suggèrent qu'on peut obtenir ainsi, dans certains cas, une solution presque optimale. Il serait intéressant de poursuivre les recherches dans cette direction.

Idéalement, un modèle réaliste peut tenir compte de la capacité limitée des facilités de réparations (files d'attentes), de l'inventaire des pièces (que l'on peut possiblement contrôler), de dépendances économiques et possiblement stochastiques entre les composantes, etc. Souvent, l'état de chaque composante ne peut être décrit correctement que par plusieurs paramètres, i.e.: par un vecteur (Il serait judicieux, dans ce cas, d'utiliser l'analyse discriminante afin de partitionner les états en un nombre fini de classes).

De tels problèmes sont très difficiles à résoudre, surtout lorsqu'il y a dépendance stochastique entre les différentes composantes. Dans de tels cas, pour l'instant, on doit faire appel à la simulation. Ces problèmes offrent un défi de taille aux spécialistes du contrôle stochastique.

APPENDICE A

LEMME A.1

Soit $\{F(\cdot|r)\}_{r \in Y}$ une famille de fonctions de répartition définies sur $\mathbb{R} \cup \{d\}$ et où Y est un borélien des réels non-négatifs. Supposons que $\forall y \in [0, \infty]$, $F(y|r)$ est décroissante selon r . Soit $X = B \cup \{d\}$ où B est un borélien des réels non-négatifs et soit $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Borel-mesurable, croissante et bornée en valeur absolue par $K > 0$.

Alors $\int_X g(\tau) dF(\tau|r)$ est une fonction croissante selon r .

Preuve

On sait que g est croissante et toujours comprise entre $-K$ et K .

Divisons l'intervalle $[-K, K]$ en $2n+1$ sous-intervalles et partitionnons X en $2n+1$ parties (dont certaines peuvent être vides) correspondant aux images inverses des sous-intervalles de $[-K, K]$:

Pour $i = -n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$, posons:

$$S_i^{(n)} \triangleq \left\{ \tau \in X \mid \frac{i}{n} \leq \frac{g(\tau)}{K} < \frac{i+1}{n} \right\} \quad (\text{A.1})$$

Soit:

$$g_n(\tau) = \frac{iK}{n} \quad \text{si} \quad \tau \in S_i^{(n)} \quad (\text{A.2})$$

Comme les $S_i^{(n)}$ forment une partition de X , g_n est une fonction bien définie sur X .

On a aussi:

$$0 \leq g(\tau) - g_n(\tau) < \frac{K}{n} \quad \forall \tau \in X. \quad (\text{A.3})$$

Posons:

$$\xi_i^{(n)} \triangleq \text{Inf}\{\tau \in X \mid g(\tau) \geq \frac{iK}{n}\} \quad (\text{A.4})$$

et

$$I^{(n)} \triangleq \{i \in \mathbb{Z} \mid -n \leq i \leq n \text{ et } g(\xi_i^{(n)}) \geq \frac{iK}{n}\}. \quad (\text{A.5})$$

$I^{(n)}$ est l'ensemble des indices i pour lesquels l'infimum est atteint dans (A.4).

On a alors:

$$P(g(\tau) \geq \frac{iK}{n} \mid r) = \left\{ \begin{array}{l} P(\tau \geq \xi_i^{(n)} \mid r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (1 - F(\xi_i^{(n)} - \varepsilon \mid r)) \quad \text{Si } i \in I^{(n)} \\ P(\tau > \xi_i^{(n)} \mid r) = 1 - F(\xi_i^{(n)} \mid r) \quad \text{Si } i \notin I^{(n)} \end{array} \right\} \quad (\text{A.6})$$

et on peut maintenant écrire:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{X}} g_n(\tau) dF(\tau|r) &= \sum_{i=-n}^n \frac{iK}{n} P(\tau \in S_i^{(n)} | r) \\
&= \frac{K}{n} \sum_{i=-n}^n \sum_{\ell=i}^n P(\tau \in S_i^{(n)} | r) \\
&= \frac{K}{n} \sum_{i=-n}^n P(g(\tau) \geq \frac{iK}{n} | r) \\
&= \frac{K}{n} \left[\sum_{\substack{i=-n \\ i \in I^{(n)}}}^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (1 - F(\xi_i^{(n)} - \varepsilon | r)) + \sum_{\substack{i=-n \\ i \notin I^{(n)}}}^n (1 - F(\xi_i^{(n)} | r)) \right]
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Par hypothèse, $F(\xi_i^{(n)} - \varepsilon | r)$ et $F(\xi_i^{(n)} | r)$ sont décroissantes en r . Le terme de droite de l'Eq. (A.7) est donc croissant en r , ce qui implique que $\int_{\mathbb{X}} g_n(\tau) dF(\tau|r)$ est une fonction croissante en r .

Mais, par l'équation (A.3),

$$0 \leq \int_{\mathbb{X}} g(\tau) dF(\tau|r) - \int_{\mathbb{X}} g_n(\tau) dF(\tau|r) \leq \int_{\mathbb{X}} \frac{K}{n} dF(\tau|r) = \frac{K}{n} \tag{A.8}$$

ce qui implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{X}} g_n(\tau) dF(\tau|r) = \int_{\mathbb{X}} g(\tau) dF(\tau|r) \tag{A.9}$$

et donc $\int_{\mathbb{X}} g(\tau) dF(\tau|r)$ est une fonction croissante selon r . C.Q.F.D.

APPENDICE BMESURE EXTERIEURE

Les preuves des propriétés énoncées dans cet appendice, ainsi qu'un traitement plus détaillé, se trouvent dans l'Appendice A de [8].

Soit (X, τ, F) un espace de probabilité. Dans ce qui suit, f, g et h désignent des fonctions définies sur X et à valeur dans $[-\infty, \infty]$.

DEFINITION

Soit $f \geq 0$. On définit la mesure extérieure de f par rapport à F par

$$\int^* f(x) dF(x) \triangleq \begin{cases} \int f(x) dF(x) & \text{si } f \text{ est } \tau\text{-mesurable} \\ \text{Inf}\{\int g(x) dF(x) \mid g \geq f \text{ et } g \text{ est } \tau\text{-mesurable}\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour f quelconque, on définit

$$\int^* f(x) dF(x) \triangleq \int^* \max\{0, f(x)\} dF(x) - \int^* \max\{0, -f(x)\} dF(x)$$

en prenant pour convention que $\infty - \infty = \infty$.

LEMME B.1

Si $f \geq 0$, alors il existe une fonction $g \geq f$ telle que g est τ -mesurable et

$$\int^* f(x) dF(x) = \int g(x) dF(x) \geq 0.$$

LEMME B.2

Si $f \geq 0$ et $g \geq 0$, alors

$$\int^*(f+g)(x)dF(x) \leq \int^*f(x)dF(x) + \int^*g(x)dF(x).$$

De plus, si f ou g est τ -mesurable, alors l'égalité tient.

LEMME B.3

Si $\varepsilon > 0$ et si $f \leq g \leq f+\varepsilon$, alors

$$\int^*f(x)dF(x) \leq \int^*g(x)dF(x) \leq \int^*f(x)dF(x) + 2\varepsilon.$$

APPENDICE C.

Soit $\{J_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{Z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions définies respectivement sur $X \stackrel{\Delta}{=} (\mathbb{N} \cup \{d\})^m$ et \mathbb{N}^m par:

$$Z_0 \equiv J_0 \equiv 0 \quad (C.1)$$

et pour $k = 1, 2, 3, \dots$; $\forall x \in X$:

$$J_k(x) = \text{Min}_{R \in U(x)} \{C \uparrow_{(R \neq \emptyset)} + c|R| + Z_k(r)\} \quad (C.2)$$

où

$$Z_k(r) = \beta \sum_{G \in \mathcal{M}} P(G|r) J_{k-1}(\tau(r, G)) \quad (C.3)$$

$$r = \rho(x, R) \quad (C.4)$$

$$\tau(r, G)_i = \begin{cases} d & \text{si } i \in G \\ r_i + 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (C.5)$$

$$P(G|r) = \prod_{i \in G} p(r_i) \prod_{i \in \mathcal{M}-G} (1-p(r_i)) \quad (C.6)$$

$$U(x) = \{R \in \mathcal{M} \mid i \in R \quad \forall i \text{ tel que } x_i = d\}. \quad (C.7)$$

Notons par $\mu_*(x, J_{k-1})$ l'ensemble pour lequel le minimum est atteint dans (c.2).

On suppose aussi que $p: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ est une fonction croissante.

LEMME C.1

Pour $k = 0, 1, 2, \dots$, on a :

(i) Si $x, r \in \mathbb{N}^m$ sont tels que $x \geq r$ et $Q \triangleq \{i \in M \mid x_i > r_i\} \subseteq M$,

alors :

$$0 \leq Z_k(x) - Z_k(r) \leq \beta(C+c|Q|) \quad (\text{C.8})$$

et $\forall G \subseteq M, \quad \forall Q \cap G:$

$$0 \leq J_k(\tau(x, G)) - J_k(\tau(x, (G \cap \bar{Q}) \cup V)) \leq C+c|Q|. \quad (\text{C.9})$$

$$(ii) \quad \mu_*(x, J_{k-1}) = \phi \quad \forall x \in \mathbb{N}^m. \quad (\text{C.10})$$

PREUVE

La preuve se fait par induction sur k .

Pour $k=0$, les relations (C.8) et (C.9) sont évidentes. De plus, comme $\phi \in U(x) \quad \forall x \in \mathbb{N}^m$, il est clair, par (C.2), que $\mu_*(x, 0) = \phi$.

Supposons maintenant que les énoncés (i) et (ii) sont vrais pour $k-1$. Pour montrer que cela implique qu'ils sont vrais pour k , nous aurons besoin de l'égalité suivante :

$$Z_k(x) - Z_k(r) =$$

$$\beta \sum_{G \subseteq M} \sum_{V \subseteq G \cap Q} \{ [J_{k-1}(\tau(x, G)) - J_{k-1}(\tau(r, (G \cap \bar{Q}) \cup V))] \prod_{i \in (G \cap \bar{Q}) \cup V} p(r_i) \prod_{i \in G} (1-p(x_i)) \prod_{i \in Q \cap \bar{V}} (p(x_i) - p(r_i)) \}. \quad (\text{C.11})$$

Vérifions d'abord cette équation. Au cours de la démarche, le lecteur pourra se référer au diagramme de la figure C.1:

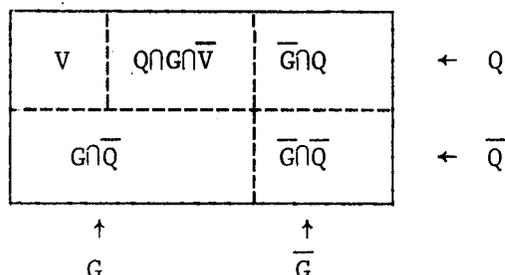


Figure C.1: Partition de M.

A partir des équations (C.3) et (C.6), on peut écrire:

$$Z_k(x) = \beta \sum_{G \in \mathcal{M}} J_{k-1}(\tau(x, G)) \prod_{i \in G} p(x_i) \prod_{i \in \bar{G}} (1-p(x_i)). \quad (C.12)$$

Mais puisque $r_i = x_i \quad \forall i \in \bar{Q}$ et $p(x_i) \geq p(r_i) \quad \forall i \in Q$,

on a:

$$\begin{aligned} \prod_{i \in G} p(x_i) &= \prod_{i \in G \cap Q} (p(r_i) + (p(x_i) - p(r_i))) \prod_{i \in G \cap \bar{Q}} p(r_i) \\ &= \left[\sum_{v \subseteq G \cap Q} \prod_{i \in v} p(r_i) \prod_{i \in Q \cap G \cap \bar{v}} (p(x_i) - p(r_i)) \right] \prod_{i \in G \cap \bar{Q}} p(r_i) \\ &= \sum_{v \subseteq G \cap Q} \left[\prod_{i \in (G \cap \bar{Q}) \cup v} p(r_i) \prod_{i \in Q \cap G \cap \bar{v}} (p(x_i) - p(r_i)) \right] \end{aligned} \quad (C.13)$$

de sorte que:

$$\begin{aligned} Z_k(x) &= \beta \sum_{G \in \mathcal{M}} \sum_{v \subseteq G \cap Q} \left[J_{k-1}(\tau(x, G)) \cdot \prod_{i \in (G \cap \bar{Q}) \cup v} p(r_i) \right. \\ &\quad \left. \prod_{i \in \bar{G}} (1-p(x_i)) \prod_{i \in Q \cap G \cap \bar{v}} (p(x_i) - p(r_i)) \right] \end{aligned} \quad (C.14)$$

D'autre part, on a aussi:

$$Z_k(r) = \beta \sum_{G' \subseteq M} J_{k-1}(\tau(r, G')) \prod_{i \in G'} p(r_i) \prod_{i \in G'} (1-p(r_i)) \quad (C.15)$$

et:

$$\begin{aligned} \prod_{i \in \bar{G}'} (1-p(r_i)) &= \prod_{i \in \bar{G}'} \left\{ (1-p(x_i)) + (p(x_i) - p(r_i)) \right\} \\ &= \prod_{i \in \bar{G}' \cap \bar{Q}} (1-p(x_i)) \prod_{i \in \bar{G}' \cap Q} \left\{ (1-p(x_i)) + (p(x_i) - p(r_i)) \right\} \\ &= \sum_{W \subseteq \bar{G}' \cap Q} \prod_{i \in W} (1-p(x_i)) \prod_{i \in \bar{G}' \cap Q \cap \bar{W}} (p(x_i) - p(r_i)) \prod_{i \in \bar{G}' \cap \bar{Q}} (1-p(x_i)) \\ &= \sum_{W \subseteq \bar{G}' \cap Q} \prod_{i \in (\bar{G}' \cap \bar{Q}) \cup W} (1-p(x_i)) \prod_{i \in \bar{G}' \cap Q \cap \bar{W}} (p(x_i) - p(r_i)) \quad (C.16) \end{aligned}$$

de sorte que:

$$\begin{aligned} Z_k(r) &= \beta \sum_{G' \subseteq M} \sum_{W \subseteq \bar{G}' \cap Q} \left[J_{k-1}(\tau(r, G')) \prod_{i \in G'} p(r_i) \right. \\ &\quad \left. \prod_{i \in (\bar{G}' \cap \bar{Q}) \cup W} (1-p(x_i)) \prod_{i \in \bar{G}' \cap Q \cap \bar{W}} (p(x_i) - p(r_i)) \right] \quad (C.17) \end{aligned}$$

On peut définir une bijection entre les ensembles $\{(G, V) \mid G \subseteq M, V \subseteq G \cap Q\}$ et $\{(G', W) \mid G' \subseteq M, W \subseteq \bar{G}' \cap Q\}$ par:

$$\left. \begin{aligned} G' &= (G \cap \bar{Q}) \cup V \\ W &= \bar{G} \cap Q \end{aligned} \right\} \quad (C.18)$$

On peut vérifier, par quelques manipulations algébriques longues mais sans intérêt, que les équations (C.18) définissent bien une bijection et impliquent:

$$\begin{aligned} G &= (G'UQ) - W \\ V &= G' \cap Q \\ \bar{G} &= (\bar{G}' \cap \bar{Q}) \cup W \\ Q \cap G \cap \bar{V} &= \bar{G}' \cap Q \cap \bar{W}. \end{aligned} \tag{C.19}$$

On peut alors réécrire l'équation (C.17):

$$\begin{aligned} Z_k(x) &= \beta \sum_{G \in M} \sum_{V \subseteq G \cap Q} \left[J_{k-1}(\tau(x, (G \cap \bar{Q}) \cup V)) \right. \\ &\quad \left. \prod_{i \in (G \cap \bar{Q}) \cup V} p(x_i) \prod_{i \in \bar{G}} (1 - p(x_i)) \prod_{i \in Q \cap G \cap \bar{V}} (p(x_i) - p(r_i)) \right]. \end{aligned} \tag{C.20}$$

En soustrayant (C.20) de (C.14), on obtient l'équation (C.11).

De plus, par (C.6):

$$\begin{aligned} &\sum_{G \in M} \sum_{V \subseteq G \cap Q} \prod_{i \in (G \cap \bar{Q}) \cup V} p(x_i) \prod_{i \in \bar{G}} (1 - p(x_i)) \prod_{i \in Q \cap G \cap \bar{V}} (p(x_i) - p(r_i)) \\ &= \sum_{G \in M} P(G|x) = 1. \end{aligned} \tag{C.21}$$

En supposant que (C.9) est vraie pour $k-1$, les équations (C.11) et (C.21) impliquent que (C.8) est vérifiée pour k .

Montrons maintenant (C.10). Soit $x \in \mathbb{N}^m$. De (C.8), on obtient:

$$Z_k(x) \leq C + c|R| + Z_k(\rho(x, R)) \quad \forall R \in M$$

et ainsi:

$$Z_k(x) \leq \min_{R \in M} \{C + c|R| + Z_k(\rho(x, R))\} .$$

Mais comme $\phi \in U(x)$, cela implique par (C.2) que:

$$J_k(x) = Z_k(x)$$

et donc que $\mu_*(x, J_{k-1}) = \phi$, ce qui vérifie (C.10).

Il reste à démontrer (C.9). Notons:

$$R_r \stackrel{\Delta}{=} \mu_*(\tau(r, (G \cap \bar{Q})UV), J_{k-1}) .$$

On a alors:

$$J_k(\tau(r, (G \cap \bar{Q})UV)) \geq c|R_r| + Z_k(\rho(r+1, R_r)) . \quad (C.22)$$

De plus, comme $(G \cap \bar{Q})UV \subseteq R_r$, il est clair que $G \subseteq R_r \cup Q$, de sorte que $R_r \cup Q$ est candidat pour le minimum dans la définition de $J_k(\tau(x, G))$.

On a alors:

$$\begin{aligned} J_k(\tau(x, G)) &\leq C + c|R_r \cup Q| + Z_k(\rho(\tau(x, G), R_r \cup Q)) \\ &\leq C + c|R_r| + c|Q| + Z_k(\rho(r+1, R_r)) \end{aligned} \quad (C.23)$$

par (C.8), puisque $r_i = x_i \quad \forall i \in \bar{Q}$, et que $\rho(r+1, R_r \cup Q) \leq \rho(r+1, R_r)$.

Par (C.22) et (C.23), on obtient facilement l'inégalité de droite de (C.9). Celle de gauche découle directement du Théorème 2.1 ■

APPENDICE DPROGRAMMATION DE L'ALGORITHME DE LA SECTION 3.2

Nous donnons ici quelques détails concernant la programmation de l'algorithme de la section 3.2, en langage FORTRAN.

Les J_K sont des fonctions à m variables. D'une itération à l'autre, il faut mémoriser les valeurs d'une telle fonction pour chaque $x \in X_0$.

Au lieu de mémoriser ces valeurs dans un tableau à m dimensions, on les mémorise plutôt dans un tableau unidimensionnel de taille:

$$\text{TAILLE} = |X_0| = C_{m+a}^a \quad (\text{D.1})$$

Afin de retrouver facilement l'adresse de chaque vecteur $x \in X_0$, il s'agit de définir une bijection entre X_0 et l'ensemble des nombres naturels de 1 à TAILLE.

On établira la correspondance de façon à ce que les vecteurs x se retrouvent dans le tableau exactement dans le même ordre qu'ils sont traités, pour le calcul de J_K , à l'étape 2 de la procédure ITERER:

| rang(x) | x_1 | x_2 | x_3 | ... | x_m |
|------------------------|-------|-------|-------|-----|-------|
| 1 | 0 | 0 | 0 | ... | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | ... | 0 |
| 3 | 2 | 0 | 0 | ... | 0 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | ⋮ |
| a+1 | a | 0 | 0 | ... | 0 |
| a+2 | 1 | 1 | 0 | ... | 0 |
| a+3 | 2 | 1 | 0 | ... | 0 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | ⋮ |
| 2a+1 | a | 1 | 0 | ... | 0 |
| 2a+2 | 2 | 2 | 0 | ... | 0 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | ⋮ |
| $\frac{(a+1)(a+2)}{2}$ | a | a | 0 | ... | 0 |
| ⋮ | 1 | 1 | 1 | ... | 0 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | ⋮ |
| ⋮ | a | 1 | 1 | ... | 0 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | ⋮ |
| ⋮ | a | a | a | ... | 0 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | ⋮ |
| $\frac{(a+m)!}{m!a!}$ | a | a | a | ... | a |

$\left. \begin{array}{l} \text{a+1} \\ \text{a} \\ \text{1} \end{array} \right\}$

$\frac{(a+1)(a+2)}{2} \dots$

$\left. \begin{array}{l} \text{1} \\ \text{1} \\ \text{1} \end{array} \right\}$

$\frac{(m+a)!}{m!a!}$

Tableau D.1 : Ordonnancement des vecteurs de X_0 .

On note par $\text{rang}(x_1, \dots, x_m)$ le rang du vecteur (x_1, \dots, x_m) dans le tableau.

Pour $1 < i \leq m$ et $1 \leq x_i \leq a$, on a:

$$\begin{aligned}
 & \text{rang}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, 0, \dots, 0) - \text{rang}(\underbrace{x_i, \dots, x_i}_{i \text{ fois}}, 0, \dots, 0) \\
 &= \text{rang}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, 0, \dots, 0) - \text{rang}(\underbrace{x_i, \dots, x_i}_{i-1 \text{ fois}}, 0, 0, \dots, 0) \\
 &= \text{nombre de vecteurs de type } (r_1, \dots, r_{i-1}) \in \mathbb{N}^{i-1} \text{ tels que:}
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \geq r_1 \geq r_2 \dots \geq r_{i-1} \geq x_i \text{ et} \\ \left\{ \begin{array}{l} r_{i-1} < x_{i-1} \\ \text{ou } r_{i-1} = x_{i-1} \text{ et } r_{i-2} < x_{i-2} \\ \vdots \\ \text{ou } r_{i-1} = x_{i-1}, \dots, r_2 = x_2 \text{ et } r_1 < x_1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Par ailleurs, si $1 \leq \xi \leq a$, alors:

$$\text{rang}(\underbrace{\xi, \dots, \xi}_{i \text{ fois}}, 0, \dots, 0) - \text{rang}(\underbrace{\xi-1, \dots, \xi-1}_{i \text{ fois}}, 0, \dots, 0) \tag{D.3}$$

représente le nombre de vecteurs de type $(r_1, \dots, r_{i-1}, \xi-1, 0, \dots, 0)$ dans X_0 . C'est le nombre de façons de choisir $i-1$ éléments parmi $\{\xi-1, \xi, \dots, a\}$ avec répétitions et sans tenir compte de l'ordre. Ce nombre est égal à:

$$K_{a-\xi+2}^{i-1} = C_{a+i-\xi}^{i-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\text{rang}(\underbrace{v, \dots, v}_{i \text{ fois}}, 0, \dots, 0) &= \sum_{\xi=1}^v \left[\begin{array}{l} \text{rang}(\xi, \dots, \xi, 0, \dots, 0) \\ -\text{rang}(\xi-1, \dots, \xi-1, 0, \dots, 0) \end{array} \right] \\
&\quad + \text{rang}(0, \dots, 0) \\
&= 1 + \sum_{\xi=1}^v C_{a+i-\xi}^{i-1} \\
&= 1 + \sum_{\xi=a+i-v}^{a+i-1} C_{\xi}^{i-1} \\
&= 1 + \sum_{\xi=i-1}^{a+i-1} C_{\xi}^{i-1} - \sum_{\xi=i-1}^{a+i-v-1} C_{\xi}^{i-1} \\
&= 1 + C_{a+i}^i - C_{a+i-v}^i. \tag{D.4}
\end{aligned}$$

LEMME D.1

Pour $i = 1, \dots, m$, $\forall (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, 0, \dots, 0) \in X_0$, on a :

$$\begin{aligned}
&\text{rang}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, 0, \dots, 0) - \text{rang}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, 0, \dots, 0) \\
&= C_{a+i-1}^i - C_{a+i-x_i-1}^i.
\end{aligned}$$

Preuve

La preuve se fait par induction sur i . Pour $i=1$, $a \geq x_1 \geq 0$, on a bien :

$$\begin{aligned}
&\text{rang}(x_1, 0, \dots, 0) - \text{rang}(0, 0, \dots, 0) = x_1 \\
&= C_a^1 - C_{a-x_1}^1.
\end{aligned}$$

Soit $i > 1$ et supposons que l'énoncé est vrai pour $i-1$. On a alors, par (D.2) et (D.4) :

$$\begin{aligned}
& \text{rang}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, 0, \dots, 0) - \text{rang}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, 0, \dots, 0) \\
& = \underbrace{\text{rang}(x_1, \dots, x_i, x_i, 0, \dots, 0)}_{i \text{ fois}} - \underbrace{\text{rang}(x_1, \dots, x_i, 0, 0, \dots, 0)}_{i-1 \text{ fois}} \\
& = 1 + C_{a+i}^i - C_{a+i-x_i}^i - \left[1 + C_{a+i-1}^{i-1} - C_{a+i-x_i-1}^{i-1} \right] \\
& = C_{a+i}^i - C_{a+i-1}^{i-1} - \left[C_{a+i-x_i}^i - C_{a+i-x_i-1}^{i-1} \right] \\
& = C_{a+i-1}^i - C_{a+i-x_i-1}^i \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Par suite du Lemme précédent, il devient clair que l'on peut écrire:

$$\text{rang}(x_1, \dots, x_m) = 1 + \sum_{i=1}^m \text{ind}(i, x_i) \quad (\text{D.5})$$

où, pour $i=1, \dots, m$ et $0 \leq x_i \leq a$:

$$\text{ind}(i, x_i) \stackrel{\Delta}{=} C_{a+i-1}^i - C_{a+i-x_i-1}^i = \frac{\prod_{\ell=1}^i (a+\ell-1) - \prod_{\ell=0}^{i-1} (a+\ell-x_i)}{i!} \quad (\text{D.6})$$

Dans le programme, on utilise tour à tour deux tableaux de taille C_{m+a}^m pour mémoriser les valeurs $\{J_{K-1}(x)\}_{x \in X_0}$ et $\{J_K(x)\}_{x \in X_0}$ respectivement.

On les appelle TA et TB.

Deux autres tableaux servent à mémoriser respectivement les valeurs $\{J_{K-1}(x)\}_{x \in X_D - X_0}$ et $\{\ell_*(x)\}_{x \in X_D - X_0}$. Ils sont de taille:

$$\text{KTAIL} = C_{m+a}^a - C_{m+a-1}^{a-1} = C_{m+a-1}^a$$

et leurs noms dans le programme sont TOGO et KPRE.

Soit $(d, \dots, d, x_{j+1}, \dots, x_m) \in X_D - X_0$, i.e. tel que $j \geq 1$ et $a \geq x_{j+1} \geq \dots \geq x_m \geq 1$. La position d'un tel vecteur dans les tableaux TOGO et KPRE est donnée par:

$$\text{rang}(d, \dots, d, x_{j+1}, \dots, x_m) = 1 + \sum_{i=j+1}^m \text{ind}(i-j, x_i)$$

où la fonction ind est définie en (D.6).

Les vecteurs sont ainsi disposés dans le même ordre qu'ils sont traités à l'étape 1 de la procédure ITERER.

Par ailleurs, comme les exigences de FORTRAN nous empêchent d'utiliser des indices de valeur 0, (x_1, \dots, x_m) sera représenté dans le programme par

$$(i_1, \dots, i_m) = (x_1+1, \dots, x_m+1).$$

D'autres correspondances entre les variables du programme et celles de la section 3.2 sont données au tableau D.2.

Dans le cas d'une politique de type II (seuil fixe), l'équation (3.21) est remplacée par (3.29). Dans le programme on lit $LIM = a^*$ au début et l'étape 1 de la sous-routine ITERER est modifiée. Le programme peut calculer soit la politique optimale, soit une politique de type II (seuil fixe), selon l'option choisie.

| Variable du Programme | Correspond, dans la section 3.2, à: |
|-----------------------|---|
| A | $a+1$ |
| BASE | C |
| B | c |
| BETA | β |
| NREP | n |
| EPSIL | ε |
| GAM1 | γ_1 |
| GAM2 | γ_2 |
| EPS | $\beta\varepsilon_0 / (1-\beta) + \beta(\gamma_2 - \gamma_1) / 2$ |
| IAGE | $x+1$ |
| ISUR | $\tau+1$ |
| $\{i K_i=1\}$ | $\{i x_i=d\}$ |
| NBON | $m-j$ |
| P | $P(\tau x)$ |
| DQ(i) | $P(i)$ |

Tableau D.2: Correspondance entre les variables du programme et celles du texte.

Tableau D.3: Programmation de l'algorithme.

```

PROGRAM REMPLA(INPUT,OUTPUT,TAPE5=INPUT,TAPE6=OUTPUT)
C
C *****
C *
C * POLITIQUE OPTIMALE DE REMPLACEMENT DES COMPOSANTES D'UN *
C * SYSTEME A COMPOSANTES IDENTIQUES. *
C * MODELE EN TEMPS DISCRET. *
C *
C *****
C
C REGLES D'UTILISATION:
C
C 1. DANS LA SOUS-ROUTINE ITERER ET DANS LE PROGRAMME, DIMENSIONNER
C TA ET TB A UNE DIMENSION SUPERIEURE OU EGALE A (M+NA)I/(MINAI)
C ET TOGO ET KPRE A UNE DIMENSION SUPERIEURE OU EGALE A
C (M+NA-1)I/(NAI(M-1)I).
C
C DIMENSIONNER AUSSI DQ(NA+1), DDQ(NA+1), KPLUS(NA+1), IND(M,NA+1)
C
C 2. DISPOSER LES DONNEES COMME SUIT:
C
C PREMIERE CARTE DE DONNEES:
C COL. 1 KOPT (ENTIER) =1 SI ON VEUT LA SOLUTION OPTIMALE
C =2 SI ON A UNE POLITIQUE DE TYPE
C SEUIL FIXE.
C COL. 2 ITOUS (ENTIER) =0 SI L'ON VEUT IMPRIMER LA POLITIQUE
C SEULEMENT POUR LES ETATS OU IL Y A
C AU MOINS UNE PANNE.
C =1 SINON.
C COL. 3-5 LIM (ENTIER) SEUIL A ETOILE. (SI KOPT=2)
C
C DEUXIEME CARTE DE DONNEES:
C COL. 1 M (ENTIER) NOMBRE DE COMPOSANTES (1<M<9).
C COL. 2-4 NA (ENTIER) AGE MAXIMUM D'UNE COMPOSANTE.
C TOUTE COMPOSANTE D'AGE SUPERIEUR A NA
C EST CONSIDEREE EQUIVALENTE A UNE COM-
C POSANTE D'AGE NA.
C COL. 5-7 NREP (ENTIER) ON FERA LE TEST D'ARRET A TOUTES
C LES NREP ITERATIONS.
C COL. 8-10 MAXITER (ENTIER) NOMBRE MAX. D'ITERATIONS.
C COL. 11-20 BETA (REEL) COEFFICIENT D'ACTUALISATION <1.
C COL. 21-30 BASE (REEL) COUT FIXE DE BASE PAR INTERVENTION.
C COL. 31-40 B (REEL) COUT DE REMPLACEMENT PAR COMPOSANTE.
C COL. 41-50 EPSIL (REEL) ON S'ARRETE LORSQU'ON A OBTENU UNE
C POLITIQUE EPSIL-OPTIMALE.
C
C NA+1 AUTRES CARTES DE DONNEES:
C CONTIENNENT DQ(I), I=0,1,...,NA , 1 VALEUR PAR CARTE,
C COL. 1-10 , EN F10.8.
C
C
C INTEGER A, TAILLE, BLANC, CARAC(31), ETAT(8)
C DIMENSION TA(1716), TB(1716)
C COMMON /COM/KEL(9), IAGE(9), ISUR(8)
C COMMON /PROB/DQ(30), DDQ(30), KPLUS(30)
C COMMON //M, MMOINI, A, BETA, B, BASE, IND(8,30), LIM, KOPT
C COMMON //KPRE(792), TOGO(792)
C EQUIVALENCE (KEL(1),K1), (KEL(2),K2), (KEL(3),K3), (KEL(4),K4), (KEL(5)
C +),K5), (KEL(6),K6), (KEL(7),K7), (KEL(8),K8), (KEL(9),K9)
C EQUIVALENCE (IAGE(1),I1), (IAGE(2),I2), (IAGE(3),I3), (IAGE(4),I4), (I
C +AGE(5),I5), (IAGE(6),I6), (IAGE(7),I7), (IAGE(8),I8), (IAGE(9),I9)
C EQUIVALENCE (ISUR(1),J1), (ISUR(2),J2), (ISUR(3),J3), (ISUR(4),J4), (I
C +SUR(5),J5), (ISUR(6),J6), (ISUR(7),J7), (ISUR(8),J8)
C DATA CARAC/3H 0,3H 1,3H 2,3H 3,3H 4,3H 5,3H 6,3H 7,3H 8,
C +3H 9,3H 10,3H 11,3H 12,3H 13,3H 14,3H 15,3H 16,
C +3H 17,3H 18,3H 19,3H 20,3H 21,3H 22,3H 23,3H 24,
C +3H 25,3H 26,3H 27,3H 28,3H 29,3H 30/,
C +BLANC/1H /

```

Tableau D.3: (suite)

```

C
C      LECTURE DES DONNEES.
C      DEFINITION DE VARIABLES ET DE TABLEAUX QUI
C      PERMETTRONT DE SIMPLIFIER LES CALCULS.
C
      READ(5,1000) KOPT,ITOUS,LIM
      READ(5,1001) M,NA,MAXITER,NREP,BETA,BASE,B,EPSIL
      A=NA +1
      DO 10 K=1,A
      READ(5,1002) DQ(K)
      DDQ(K) =1.0 -DQ(K)
10  KPLUS(K) =K+1
C
      ON DEFINIT ICI DES TRANSFORMATIONS D'INDICES PERMETTANT D'ASSOCIER
      UN ENTIER NATUREL A CHAQUE VECTEUR D'AGES POSSIBLE.
C
      TAILLE=1
      NUM1=1
      NDIV=1
      DO 15 I=1,M
      NUM1 = NUM1*(A+I-2)
      NDIV = NDIV*I
      DO 12 K=1,A
      NUM2=1
      DO 11 L=1,I
11  NUM2 = NUM2*(A-K+L-1)
12  IND(I,K) = (NUM1-NUM2)/NDIV
15  TAILLE = TAILLE*(NA+I)/I
C
      KPLUS(A) =A
      KREP = NREP/2
      BET = BETA/(1.0-BETA)
      MMOIN1=M-1
      DO 30 I=1,TAILLE
30  TA(I) =0.0
C
      IMPRESSION DES TITRES.
C
      IF(KOPT.EQ.1) WRITE(6,2005)
      IF(KOPT.EQ.2) WRITE(6,2006)
      WRITE(6,2007) M,A
      IF(KOPT.EQ.2) WRITE(6,2008) LIM
      WRITE(6,2010) BETA,BASE,B,EPSIL
      WRITE(6,2009) NREP
      WRITE(6,2011)
      DO 18 I=1,A
      K=I-1
18  WRITE(6,2012) K,DQ(I)
      WRITE(6,2013) K,DQ(A)
      WRITE(6,2015) K,K
      WRITE(6,2018)
C
      ETAPE 2.
C
      DEBUT DES ITERATIONS.
C
      ITER=0
40  DO 41 NNN=1,KREP
      CALL ITERER(TA,TB)
      CALL ITERER(TB,TA)
41  ITER =ITER +2

```

Tableau D.3: (suite)

```

C
C
C
C
      ETAPES 3 A 6.
      DEBUT DU TEST D'ARRET.
      GAM1 =TA(1) -TB(1)
      GAM2 =GAM1
      DO 43 I=2,TAILLE
      D =TA(I) -TB(I)
      IF(D.LT.GAM1) GAM1 =D
      IF(D.GT.GAM2) GAM2 =D
43  CONTINUE
      GAM1=BET*GAM1
      GAM2=BET*GAM2
      GAMMOY = (GAM2 + GAM1)/2.0
      GAMDIF = BETA*(GAM2 - GAM1)/2.0
      DO 47 I=1,TAILLE
47  TA(I) = TA(I) + GAMMOY
      CALL ITERER(TA,TB)
      EPS0 = 0.0
      DO 48 I=1,TAILLE
      D = ABS(TA(I)-TB(I))
      IF(D.GT.EPS0) EPS0=D
48  CONTINUE
      EPS = BET*EPS0 + GAMDIF
      IF((EPS.GT.EPSIL).AND.(ITER.LT.MAXITER)) GO TO 40
C
C
C
      IMPRESSION DES RESULTATS.
      I =1
      ISUR(M) = 3H 0
      ETAT(M) = 3H *
      IF(M.EQ.8) GO TO 78
      KK=M+1
      DO 70 K=KK,8
      ETAT(K)=BLANC
70  ISUR(K)=BLANC
78  NBON=0

      DO 60 I8=1,2
      DO 60 I7=1,A
      DO 60 I6=I7,A
      DO 60 I5=I6,A
      DO 60 I4=I5,A
      DO 60 I3=I4,A
      DO 60 I2=I3,A
      DO 60 I1=I2,A
      IF((IAGE(M).EQ.2).AND.(ITOUS.EQ.0).OR.(IAGE(M+1).EQ.2)) GO TO 62
      IF(IAGE(NBON+1).EQ.2) NBON=NBON+1
      DO 50 K=1,MMOINI
      ETAT(K) = CARAC(IAGE(K))
      IF(ETAT(K).EQ.3H 0) ETAT(K)=3H *
50  ISUR(K) = 3H 0
      N=KPRE(I)
      NRESTE=NBON-N
      CINTER = B*(M-NRESTE) + BASE

      KK=1
      DO 52 K=1,NRESTE
      ISUR(K) = CARAC(IAGE(K+N))
52  KK = KK+IND(K,IAGE(K+N))
      LL=CARAC(N+1)
      IF(N.EQ.0) LL=BLANC
      WRITE(6,2050) (ETAT(K),K=1,8),LL,CINTER,(ISUR(K),K=1,8),TB(KK)
60  I=I+1

62  WRITE(6,2002) ITER,GAMDIF,EPS
      WRITE(6,2003) GAM1,GAM2,GAMMOY,EPS0
      STOP

```


Tableau D.3: (suite)

```

DO 144 NBON=1,MMOIN1

DO 142 I8=2,3
DO 142 I7=2,A
DO 142 I6=17,A
DO 142 I5=16,A
DO 142 I4=15,A
DO 142 I3=14,A
DO 142 I2=13,A
IF(KOPT.EQ.2) GO TO 170

C          DETERMINATION DE L'ACTION OPTIMALE (KOPT=1)

DO 141 I1=I2,A
IF(IAGE(NBON+1).EQ.3) GO TO 144
I=I+1
MEIL=NBON
CMIN=TA(1)+NBON*B

DO 150 K=1,NBON
L=K-1
II=1
NRESTE=NBON-L
DO 152 J=1,NRESTE
152 II = II+IND(J,IAGE(J+L))
CANDID = TA(II)+FLOAT(L)*B
IF(CANDID.GE.CMIN) GO TO 150
CMIN=CANDID
MEIL=L
150 CONTINUE

IF(MEIL.NE.NBON) GO TO 140
KK=I+A-II
DO 160 K=I,KK
TOGO(K) = T1
160 KPRE(K) = NBON
I=KK
GO TO 142
140 TOGO(I) = CMIN+(M-NBON)*B+BASE
141 KPRE(I) = MEIL
GO TO 142

C          DETERMINATION DE L'ACTION, DANS LE CAS D'UNE
C          POLITIQUE A SEUIL FIXE (KOPT=2).

170 DO 180 I1=I2,A

IF(IAGE(NBON+1).EQ.3) GO TO 144
I=I+1

L=0
DO 172 K=1,NBON
IF(IAGE(K).GT.LIM) L=L+1
172 CONTINUE
IF(L.LT.NBON) GO TO 176

KK=I+A-II
DO 174 K=I,KK
TOGO(K)=T1
174 KPRE(K)=NBON
I=KK
GO TO 142

176 II=1
NRESTE=NBON-L
DO 178 K=1,NRESTE
178 II = II+IND(K,IAGE(K+L))
TOGO(I) = BASE+(M-NRESTE)*B+TA(II)
180 KPRE(I) = L

142 CONTINUE
144 CONTINUE

```

Tableau D.3: (suite)

C
C
C
C
C
C

ETAPE 2.

POUR CHAQUE ETAT I POUR LEQUEL AUCUNE COMPOSANTE N'EST DEFAILLANTE,
 CALCUL DES PROBABILITES DE TRANSITION ET DE TB(I) [CORRESPOND AU
 CALCUL DE JK(X) POUR CHAQUE X DE X0].

I=0

```

DO 300 I9=1,2
DO 300 I8=1,A
DO 300 I7=I8,A
DO 300 I6=I7,A
DO 300 I5=I6,A
DO 300 I4=I5,A
DO 300 I3=I4,A
DO 300 I2=I3,A
DO 300 I1=I2,A
IF(IAGE(M+1).EQ.2) RETURN
TOT=0.0
I=I+1

DO 200 K9=1,2
DO 200 K8=1,2
DO 200 K7=1,2
DO 200 K6=1,2
DO 200 K5=1,2
DO 200 K4=1,2
DO 200 K3=1,2
DO 200 K2=1,2
DO 200 K1=1,2
IF(KEL(M+1).EQ.2) GO TO 300
P=1.0
NBON=0
DO 218 K=1,M
N=IAGE(K)
IF(KEL(K).EQ.2) GO TO 216
NBON = NBON+1
ISUR(NBON) = KPLUS(N)
P = P*DDQ(N)
GO TO 218
216 P = P*DQ(N)
218 CONTINUE
IF(NBON) 225,225,226
225 TOT = TOT+P*T1
GO TO 200
226 ITRANS=1
DO 228 J=1,NBON
228 ITRANS = ITRANS+IND(J,ISUR(J))
IF(NBON.EQ.M) GO TO 229
TOT = TOT+P*TOGO(ITRANS)
GO TO 200
229 TOT = TOT+P*TA(ITRANS)
200 CONTINUE
300 TB(I) = TOT*BETA

RETURN
END

```


BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALJ, A. et HAURIE, A., "Hierarchical Control of a Population Process with Application to Group Preventive Maintenance", Proceedings of the 2nd IFAC Workshop on Large Scale Systems, Toulouse, Juin 1980.
- [2] ANDERSON, M.Q., Monotone Optimal Preventive Maintenance Policies for Stochastically Failing Equipment; U. of New Mexico, Graduate School of Management (1978).
- [3] BARLOW, R.E. et PROSCHAN, F., Mathematical Theory of Reliability, John Wiley and Sons (1965).
- [4] BERG, M. et EPSTEIN, B., "A Modified Block Replacement Policy", N.R.L.Q., Vol. 23, No. 3 (1976) pp. 15-24.
- [5] BERG, M. et EPSTEIN, B., "Grouping of Preventive Maintenance Policies", Proceedings of the NATO Conference on Reliability Testing and Reliability Evaluation (1972).
- [6] BERGMAN, B., "Optimal Replacement Under a General Failure Model", Adv. Appl. Prob., Vol. 10 (1978) pp. 431-451.
- [7] BERTSEKAS, D.P., Dynamic Programming and Stochastic Control, Academic Press (1976).
- [8] BERTSEKAS, D.P. et SHREVE, S.E., Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case, Academic Press (1978).
- [9] BHAT, B.R., "Used Item Replacement Policy", J. Appl. Prob., Vol. 6 (1969) pp. 309-318.
- [10] BROSCH, I., SHLIFER, E., et ZEIRA, Y., "Optimal Maintenance Policy for a Fleet of Vehicles", Man. Sci., Vol. 22, No. 4 (1975) pp. 401-410.
- [11] DERMAN, C., "On Optimal Replacement Rules when Changes of State are Markovian", Mathematical Optimization Techniques, ed. by R. Bellman (1963), Chap. 9, pp. 201-210.
- [12] DERMAN, C., Finite State Markovian Decision Processes, Academic Press (1970).
- [13] DREYFUS, S.E., "A note on an Industrial Replacement Process", Op. Res. Quart., Vol. 8 (1957) pp. 190-193.
- [14] GERTSBAKH, I.B., Models of Preventive Maintenance, North-Holland (1977).

- [15] GERTSBAKH, I.B., "Sufficient Optimality Conditions for Control-limit Policy in a Semi-Markov Process", J. Appl. Prob., Vol. 13 (1976) pp. 400-406.
- [16] GOYETTE, H. et HAURIE, A., "Vers un Modèle de l'Entretien Préventif d'un Système à Composantes Multiples Adapté au Cas d'un Parc de Camions", Miméo (1980).
- [17] HAURIE, A. et L'Ecuyer, P., "Optimal and Suboptimal Strategies for Group Preventive Replacement", Miméo (1980).
- [18] KAO, E.P.C., "Optimal Replacement Rules when Changes of States are Semi-Markovian", Op. Res., Vol. 21 (1973) pp. 1231-1249.
- [19] KOLESAR, P., "Minimum Cost Replacement Under Markovian Deterioration", Man. Sci., Vol. 12, No. 9 (1966) pp. 694-706.
- [20] LUSS, H., "Maintenance Policies When Deterioration Can Be Observed by Inspections", Op. Res., Vol. 24, No. 2 (1976) pp. 359-366.
- [21] MCCALL, J.J., "Maintenance Policies For Stochastically Failing Equipment: A Survey", Man. Sci., Vol. 11, No. 5 (1965) pp. 493-524.
- [22] PIERSKALLA, W.P., and Voelker, A., "A Survey of Maintenance Models: The Control and Surveillance of Deteriorating Systems", N.R.L.Q., Vol. 23, No. 3 (1977) pp. 351-388.
- [23] RISHEL, R., "Optimality for Completely Observed Controlled Jump Processes", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-22, No. 6, pp. 906-908, 1977.
- [24] ROSS, S.M., "A Markovian Replacement Model with a Generalization to Include Stocking", Man. Sci., Vol. 15, No. 11 (1969) pp. 702-715.
- [25] ROSS, S.M., Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden-Day (1970).
- [26] SASIENI, M., "A Markov Chain Process in Industrial Replacement", Op. Res. Quart., Vol. 7 (1957) pp. 148-155.
- [27] TILQUIN, C., Contribution à la Théorie du Remplacement Préventif en Présence de Coûts Opérationnels Liés à l'Age des Composantes, thèse de doctorat, U. de Montréal, dépt. d'informatique (1974).

- [28] VERGIN, C.R., "Optimal Renewal Policies for Complex Systems",
N.R.L.Q., Vol. 15, no. 4 (1968) pp. 523-534.
- [29] VERGIN, R.C. et SCRIABIN, M., "Maintenance Scheduling for Multi-
component Equipment", A.I.I.E. Trans., Vol. 9, no. 3
(1977) pp. 297-305.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier le Professeur Alain Haurie, qui m'a donné l'occasion de m'intégrer au Groupe de Recherche et d'Etudes en Analyse de Décisions (GERAD) et grâce à qui j'ai pu faire ce travail dans d'excellentes conditions. Je remercie aussi le professeur A. Alj pour ses précieux conseils.

Il me fait également plaisir de remercier Joanne Jacques et Carmelle Paré pour leur travail de dactylographie.

* * *