

À remettre le mercredi 30 janvier avant la fin du cours

1 \_\_\_\_\_ (20 points)

On considère un modèle d'inspection périodique du niveau de stock. Soit  $\xi_n$  la demande (aléatoire) pour la production à la période  $n$  et  $X_n$  le niveau de stock à la fin de la période  $n$ . La politique de commande est de type  $(s, S) = (1, 4)$ . On a  $X_0 = 4$ .

- Déterminer  $\{X_n\}_{n=1, \dots, 8}$ , sachant que  $\xi_1 = 2, \xi_2 = 3, \xi_3 = 4, \xi_4 = 0, \xi_5 = 2, \xi_6 = 1, \xi_7 = 2, \xi_8 = 2$ .
- On suppose que les variables aléatoires  $\xi_i$  sont i.i.d. avec :

$$\begin{array}{c|cccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline P\{\xi_i = k\} & 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{array}$$

Soit  $P$  la matrice de transition associée à la chaîne de Markov  $\{X_n\}$ . Évaluer  $P_{41}$  et  $P_{04}$ .

2 \_\_\_\_\_ (10 points)

Déterminer, pour tous les états initiaux possibles, la probabilité d'absorption en l'état 0, ainsi que le temps moyen avant l'absorption pour la chaîne de Markov dont la matrice de transition, définie sur les états 0, 1, 2 et 3 est:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 \_\_\_\_\_ (20 points)

Soit  $X_0 = 1$  et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer le temps moyen passé en  $i$  ( $i = 1, 2$ ) avant absorption et vérifier que la somme de ces deux nombres est bien égale au temps moyen avant absorption dans l'un ou l'autre de ces deux états.

Au badminton, en simple, un joueur accumule des points tant qu'il possède le service. Si l'échange est perdu par le joueur possédant le service, alors aucun point n'est compté et le service est donné à l'adversaire. Soient  $p_1$  et  $p_2$  les probabilités respectives que l'un des deux joueurs remporte un échange alors qu'il est en possession du service. Un set de  $N$  points est remporté par le premier joueur atteignant  $N$  points si la différence de points est *au moins de 2*. Si cette dernière condition n'est pas satisfaite, le set se poursuit jusqu'à ce que la différence de points soit égale à 2.

1. Décrire le déroulement d'un set à l'aide d'une chaîne de Markov.
2. Déterminer la probabilité de remporter un set de  $N = 2$  points pour un joueur possédant le service au début du set en utilisant les valeurs suivantes de  $p_1$  et  $p_2$ : (i)  $p_1 = p_2 = .5$  (ii)  $p_1 = p_2 = .4$ .
3. Soit  $p_1 = p_2 = .5$ . Quelle est la durée moyenne d'un set (en nombre d'échanges)? Quel est le nombre moyen de passages en un état où le score est égal?

**4** \_\_\_\_\_ **(10 points)**

On considère une matrice de transition de la forme suivante (les \* représentent des probabilités positives):

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & * & 0 \\ * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les classes de communication et classifier les états de cette chaîne de Markov.
2. Pour quels entiers positifs  $n$  a-t-on  $P_{12}^n > 0$ ?

**5** \_\_\_\_\_ **(10 points)**

[KT, section IV.4, problème 3.3] Déterminer les probabilités de premier retour  $f_{00}^{(n)}$ ,  $n = 1, \dots, 5$  correspondant à la chaîne de Markov dont la matrice de transition est

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$