

À remettre le lundi 25 février avant la fin du cours

**1** \_\_\_\_\_ (20 points)

[KT no 9.5 p196]

À l'instant 0, on observe une cellule rouge dans un bouillon de culture. Après une minute, la cellule meurt et est remplacée par l'une des combinaisons suivantes:

- 2 cellules rouges (probabilité 1/4);
- 1 cellule rouge et une blanche (probabilité 2/3);
- 2 cellules blanches (probabilité 1/12).

Sachant que chaque cellule vit une minute, que les cellules blanches ne se reproduisent pas, et que les rouges se comportent comme leur parent, déterminer

- la probabilité que la première cellule blanche naisse après  $n + \frac{1}{2}$  minutes;
- la probabilité d'extinction de la population.

**2** \_\_\_\_\_ (20 points)

[KT no 9.8 p197]

Déterminer la probabilité d'extinction du processus de ramification correspondant à une loi géométrique:

$$p_k = (1 - c)c^k$$

où  $0 \in (0, 1)$ .

**3** \_\_\_\_\_ (20 points)

Déterminer les probabilités stationnaires de la chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les probabilités limite existent-elles?

**4** \_\_\_\_\_ **(20 points)**

[KT no 1.1 p211]

Cinq boules sont réparties dans deux urnes, A et B. À chaque instant, une urne est choisie au hasard. Si l'urne est non vide, une de ses boules est transférée à l'autre urne. Déterminer la fraction de temps pour laquelle l'urne A est vide.

**5** \_\_\_\_\_ **(20 points)**

[KT no 1.12 p214]

Soit  $P$  la matrice de transition d'une chaîne de Markov finie et régulière. Soit  $\Pi$  la matrice dont chaque ligne correspond au vecteur de probabilités limite  $\pi$ . On pose  $Q = P - \Pi$ .

- Démontrer que  $P^n = \Pi + Q^n$ .
- Trouver une expression explicite pour  $Q^n$  et  $P^n$  pour la matrice

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

**6** \_\_\_\_\_ **(20 points)**

[KT no 2.6 p233]

Un ordinateur tombe en panne, un jour quelconque, avec probabilité  $p$ . Le temps de réparation suit une loi dont la fonction de masse est

$$\beta(1 - \beta)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

avec  $\beta \in (0, 1)$ . Soit  $X_n = 1$  si l'ordinateur est en opération au jour  $n$  et  $X_n = 0$  sinon. Démontrer que  $\{X_n\}$  forme une chaîne de Markov dont la matrice de transition est

$$\begin{pmatrix} 1 - \beta & \beta \\ p & 1 - p \end{pmatrix}$$

et déterminer la probabilité à long terme que l'ordinateur fonctionne.

7 \_\_\_\_\_ (20 points)

On souhaite maximiser le revenu provenant de la production d'une machine. Or, le niveau de production dépend de l'état de la machine, et l'état de la machine dépend de son entretien. Les données du problème sont les suivantes:

- Les états sont: 0 (neuf), 1 (bon état), 2 (mauvais état) et 3 (en panne).
- Les rendements respectifs (par période) sont de 30, 15, 5 et 0.
- Les actions possibles sont: entretenir (1), ne rien faire (2), rénover (3).
- Le revenu par objet produit est de 100\$.
- Le taux d'actualisation est  $\alpha = 0,8$ .

Le tableau suivant fournit les informations sur les revenus associés aux différentes combinaisons d'états et de décision, ainsi quet les probabilités de transition.

état	action	coût	probabilité de transition	nouvel état	revenu (gain – coût)
0	entretenir	500\$	3/4	0	2500\$
			1/4	1	2500\$
	ne rien faire	0\$	4/5	1	3000\$
			1/5	3	3000\$
1	entretenir	1000\$	4/7	1	500\$
			2/7	2	500\$
			1/7	3	500\$
	ne rien faire	0\$	4/5	2	1500\$
			1/5	3	1500\$
			1	0	-1500\$
2	entretenir	1500\$	3/4	2	-1000\$
			1/4	3	-1000\$
	ne rien faire	0\$	1/2	2	500\$
			1/2	3	500\$
rénover	3000\$	1	0	-2500\$	
3	rénover	3000\$	1	0	-3000\$

On considère la politique suivante:

- ne rien faire pour une machine neuve;
- entretenir une machine en bon état;
- entretenir une machine en mauvais état;
- rénover une machine en panne.

Résoudre le problème à l'aide de l'algorithme d'amélioration des politiques et l'algorithme d'amélioration des valeurs.