

À remettre le mercredi 12 mars avant la fin du cours

1 _____ (10 points)

Lorsque vous vous présentez à une banque, les deux guichets sont occupés. Dès que l'un des guichets se libère, vous vous y dirigez. Sachant que les temps de service sont exponentiels de taux respectifs λ_1 et λ_2 , quelle est la probabilité que vous quittiez le guichet après le client qui est servi en parallèle?

2 _____ (20 points)

Au port d'Oslo, la fréquence des traversiers est de T minutes. Sachant que les clients se présentent suivant un processus de Poisson de taux λ , démontrer que la somme des temps moyens d'attente de tous les passagers est égale à $\lambda T^2/2$. (Suggestion: utiliser la loi de probabilité de totale.) Ce résultat aurait-il pu être obtenu moins rigoureusement par un argument de "gros bon sens"?

3 _____ (15 points)

Un automobiliste se stationne illégalement pour une période d'une heure, deux fois par jour. Sachant que les contrôles sont effectués selon un processus de Poisson de taux λ , quelle est la probabilité que l'automobiliste s'en tire sans contravention lors d'une semaine donnée?

4 _____ (15 points)

[KT prob. 4.6 p310]

En se basant sur la notation habituelle pour un processus de Poisson de taux λ , déterminer

- $E[W_1|X(t) = 2]$;
- $E[W_3|X(t) = 5]$;
- la fonction de densité conditionnelle de W_2 , sachant que $X(t) = 5$.

5 _____ **(15 points)**

[KT prob. 3.1 p295]

Soit $X(t)$ un processus de Poisson de taux λ . Justifier que

$$\{W_1 > w_1, W_2 > w_2\}$$

si et seulement si

$$\{X(w_1) = 0, X(w_2) - X(w_1) = 0 \text{ ou } 1\}.$$

Utiliser ce résultat pour démontrer que

$$\begin{aligned} P\{W_1 > w_1, W_2 > w_2\} &= P\{X(w_1) = 0, X(w_2) - X(w_1) = 0 \text{ ou } 1\} \\ &= e^{-\lambda w_1} [1 + \lambda(w_2 - w_1)] e^{\lambda(w_2 - w_1)}. \end{aligned}$$

Par différentiation, en déduire la densité conjointe:

$$f(w_1, w_2) = \lambda^2 e^{\lambda w_2}, \quad 0 < w_1 < w_2.$$

6 _____ **(20 points)**

[KT prob. 4.8 p310]

Des impulsions d'amplitudes aléatoires ξ_k sont détectées à des instants W_k correspondant à un processus de Poisson de taux λ . À l'instant t , la contribution de l'impulsion k à la mesure du compteur est décroissante dans le temps et donnée par

$$\theta_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq W_k \\ \xi_k \exp[-\alpha(t - W_k)] & \text{si } t \geq W_k. \end{cases}$$

Déterminer l'espérance de la contribution totale

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} \theta_k(t)\right],$$

sachant que $N(0) = 0$.

7 _____ **(20 points)**

[KT prob. 6.3 p329]

Des chocs d'intensité Y se produisent selon un processus de Poisson de taux λ . Le système est en opération tant que la somme des chocs

$$X(t) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N(t)}$$

demeure inférieure à un nombre a . Si Y suit une loi géométrique:

$$P\{Y = k\} = p(1 - p)^k \quad k \geq 0, \quad 0 < p < 1,$$

déterminer le temps moyen d'opération du système.