

À remettre le lundi 21 avril avant le coucher du soleil

1 _____ (20 points)

On considère une file d'attente $M/M/2$ possédant les caractéristiques suivantes:

- le taux d'arrivée des clients est de 4 par période;
- le temps moyen de service du premier serveur est égal à $1/2$ période;
- le temps moyen de service du second serveur est égal à 1 période;
- si le serveur 1 est libre, tout client (qui arrive ou qui se fait servir) se dirige vers le serveur 1;
- si un serveur n'est pas libre, les clients ne se joignent pas à la file (ils quittent).

Vous devez alors

- déterminer le générateur infinitésimal du processus de naissance et de mort correspondant à cette file d'attente;
- déterminer les probabilités stationnaires du nombre de clients dans le système;
- Déterminer le taux moyen d'occupation du premier serveur;
- déterminer la proportion de clients qui quittent sans s'être fait servir;
- déterminer le temps moyen passé dans le système pour les clients ayant accédé à un serveur.
- répondre à la première question en supposant que, lorsque les deux serveurs sont inoccupés, le prochain client se dirige indistinctement vers le serveur 1 ou le serveur 2 et ne peuvent quitter un serveur pour un autre.

2 _____ (10 points)

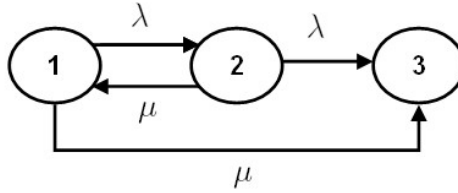
Soit une file d'attente où le processus d'arrivée est amnésique (processus de Poisson) de taux λ et où le temps de service de l'unique serveur suit une loi uniforme $U[0, 1]$.

- déterminer le nombre moyen de clients dans le système;
- déterminer la probabilité que le *second* client n'attende pas avant d'accéder au serveur;
- déterminer la durée moyenne d'attente du second client.

Dans un deuxième temps, répondre à la question en supposant que les durées de stationnement sont uniformes de moyenne 30 minutes.

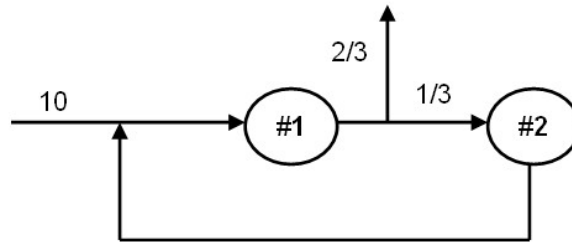
3 _____ (10 points)

On considère une chaîne de Markov continue dont le diagramme de transition est illustré ci-dessous. Sachant que les états (chiffres dans les cercles) représentent un revenu, déterminer le revenu moyen à long terme.



4 _____ (15 points)

Soit le réseau de files d'attente markovien illustré ci-dessous, où les files d'attente aux sommets 1 et 2 sont de type $M/M/s_1$ et $M/M/s_2$, respectivement. Les taux de service de tous les serveurs étant égaux à μ , déterminer le nombre minimal de serveurs s_1 et s_2 requis pour que le système soit stable à long terme, c'est-à-dire qu'il existe des probabilités limites.



5 _____ (10 points)

[TK 6.3 p 407] Soient $X_i(t)$ N chaînes de Markov continues indépendantes de générateur infinitésimal commun (les états sont 0 et 1)

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Déterminer le générateur infinitésimal de la chaîne $\sum_{i=1}^N X_i(t)$.

6 _____ **(10 points)**

Soit une machine dont le taux de panne est exponentiel de paramètre β , et pour lequel le taux de réparation est exponentiel (et indépendant) de paramètre α .

1. Spécifier le générateur infinitésimal de la chaîne de Markov continue.
2. Écrire les équations de Chapman-Kolmogorov vers l'avant.
3. À l'aide de la formule

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [M(t) - \frac{t}{\mu}] = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2}$$

(formule (4.5) page 442 de TK), donner une expression asymptotique pour le nombre moyen de pannes à l'instant t .

7 _____ **(10 points)**

[TK 2.1 p 556] Pour une file d'attente $M/M/2$, tracer les courbes représentant $1 - \pi_0$ (probabilité que la file ne soit pas vide) et L (longueur de la file) en fonction de l'intensité du trafic $\rho = \lambda/2\mu$.

8 _____ **(10 points)**

[TK 6.1 p 598]

9 _____ **(10 points)**

[TK 4.1 p 522] Quelle est la probabilité qu'un mouvement brownien standard croise la droite d'équation $a + bt$ ($a, b > 0$)? (Comparer avec un mouvement brownien avec dérive).