

À remettre le mercredi 19 avril 2011 (examen final)

1 _____ (25 points)

Le puzzle “Instant Insanity” consiste à disposer l’un sur l’autre quatre cubes dont les faces portent l’une des couleurs Blanc, Bleu, Vert ou Rouge, de façon à créer une tour dont chaque côté comporte les quatre couleurs. Voir par exemple

http://en.wikipedia.org/wiki/Instant_Insanity

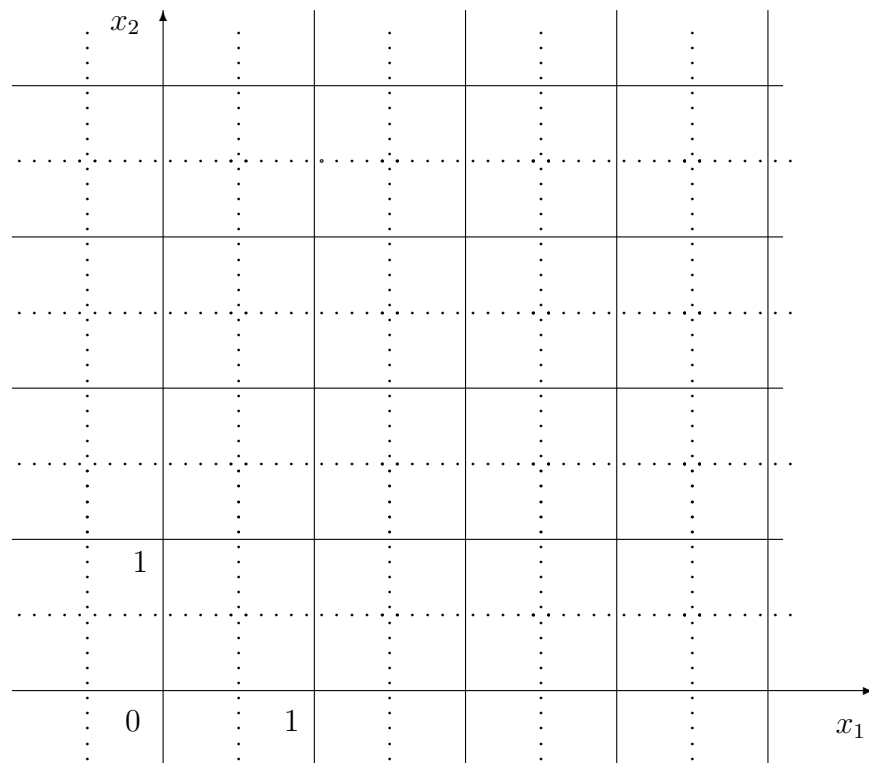
Formuler ce problème à l’aide de contraintes linéaires en nombres entiers.

2 _____ (25 points)

Soit le programme linéaire en variables entières :

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & x_1 - x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 4x_1 - 6x_2 \leq 9 \\ & 10x_1 + 4x_2 \leq 41 \quad x_1, x_2 \text{ entiers non négatifs.} \end{aligned}$$

1. Tracer le domaine réalisable sur la partie quadrillée de la page ;
2. énumérer l’ensemble des points admissibles ;
3. quelle est la solution optimale (justifier votre réponse) ?
4. où se trouve sur la figure la solution optimale de la relaxation linéaire du problème ?
5. trouver une coupe de Gomory à la solution optimale de la relaxation linéaire ; tracer la droite correspondant à cette coupe sur le graphique ;
6. résoudre le problème par la technique de Branch-and-Bound. Brancher sur la variable x_1 en priorité. Vous pouvez trouver “géométriquement” la solution des problèmes linéaires.



3 _____ (25 points)

Soit le problème d'affectation avec contrainte de budget :

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\
 \text{sujet à} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \\
 & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i \\
 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq B.
 \end{aligned}$$

1. Il y a deux relaxations lagrangiennes naturelles. Laquelle est la plus forte ? Pourquoi ?
2. Soit $c_{11} = 1$, $c_{12} = 2$, $c_{21} = 3$, $c_{22} = 2$, $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 1$ et $a_{22} = 2$. Déterminer la valeur optimale de la relaxation lagrangienne dans chaque cas.

Soit le programme linéaire en variables entières

$$\begin{aligned} \max \quad & c_1x_1 + c_2x_2 \\ Ax \leq & b \\ & x_1, x_2 \text{ entiers non négatifs.} \end{aligned}$$

où les coefficients c_1 et c_2 sont entiers.

En appliquant la technique de Branch-and-Bound (parcours de l'arbre **en profondeur**) un étudiant obtient l'arbre d'énumération partiel suivant, où sont indiquées la valeur z et la solution optimale de la relaxation linéaire. Identifier 5 erreurs grossières ou impossibilités lors du parcours de cet arbre.

