

Remettre le mardi 28 janvier 2003 au début du cours

1 _____ (20 points)

Soit f une fonction continue définie sur R^n et satisfaisant:

$$f((x+y)/2) \leq (f(x) + f(y))/2 \quad \forall x, y \in R^n.$$

La fonction f est-elle convexe sur R^n ? Si oui, f est-elle toujours convexe si on supprime l'hypothèse de continuité?

2 _____ (15 points)

Soit g une fonction convexe et non décroissante d'une seule variable et f une fonction convexe définie sur un sous-ensemble convexe C de R^n . Montrer que la fonction $g(f(x))$ est convexe sur C . En déduire des conditions sur le scalaire a et la matrice Q pour que la fonction $\exp(ax^t Qx)$ soit convexe.

3 _____ (15 points)

Démontrer l'inégalité arithmétique-géométrique

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

où tous les nombres sont non négatifs et où $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.**Suggestion:** démontrer et utiliser la convexité de la fonction $-\log x$.

4 _____ (20 points)

Soit $\beta \in R^n$ et soit X un sous-ensemble convexe de R^n tel que $\min_{x \in X} \beta x > 0$. Calculer le hessien de la fonction

$$f(x) = \frac{(\alpha x)^2}{\beta x}$$

et en déduire que la fonction f est convexe sur X .

5 _____ (20 points)

Soit la fonction

$$f(u_1, u_2) = \min_{x_1, x_2} \quad x_1(1 - u_1) + x_2(1 - u_2)$$

sujet à $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$.

- Montrer que la fonction f est concave.
- Évaluer $f(1, 1)$.
- Décrire l'ensemble $\partial\{-f(1, 1)\}$.