

Remettre le mardi 28 janvier 2003 au début du cours

1 \_\_\_\_\_ (20 points)

Soit  $f$  une fonction continue définie sur  $R^n$  et satisfaisant:

$$f((x+y)/2) \leq (f(x) + f(y))/2 \quad \forall x, y \in R^n.$$

La fonction  $f$  est-elle convexe sur  $R^n$ ? Si oui,  $f$  est-elle toujours convexe si on supprime l'hypothèse de continuité?

2 \_\_\_\_\_ (15 points)

Soit  $g$  une fonction convexe et non décroissante d'une seule variable et  $f$  une fonction convexe définie sur un sous-ensemble convexe  $C$  de  $R^n$ . Montrer que la fonction  $g(f(x))$  est convexe sur  $C$ . En déduire des conditions sur le scalaire  $a$  et la matrice  $Q$  pour que la fonction  $\exp(ax^t Qx)$  soit convexe.

3 \_\_\_\_\_ (15 points)

Démontrer l'inégalité arithmétique-géométrique

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

où tous les nombres sont non négatifs et où  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ .**Suggestion:** démontrer et utiliser la convexité de la fonction  $-\log x$ .

4 \_\_\_\_\_ (20 points)

Soit  $\beta \in R^n$  et soit  $X$  un sous-ensemble convexe de  $R^n$  tel que  $\min_{x \in X} \beta x > 0$ . Calculer le hessien de la fonction

$$f(x) = \frac{(\alpha x)^2}{\beta x}$$

et en déduire que la fonction  $f$  est convexe sur  $X$ .

5 \_\_\_\_\_ (20 points)

Soit la fonction

$$f(u_1, u_2) = \min_{x_1, x_2} \quad x_1(1 - u_1) + x_2(1 - u_2)$$

sujet à  $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ .

- Montrer que la fonction  $f$  est concave.
- Évaluer  $f(1, 1)$ .
- Décrire l'ensemble  $\partial\{-f(1, 1)\}$ .