

Remettre le jeudi 13 février 2003 au début du cours

1 _____ (20 points)

Soit le programme mathématique

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{sujet à} & g(x) \leq 0 \\ & x \in X. \end{array}$$

Démontrer qu'un point (x^*, u^*) est un point de selle du lagrangien si et seulement s'il satisfait aux conditions suivantes:

1. $L(x^*, u^*) = \min_{x \in X} L(x, u^*)$;
2. $g(x^*) \leq 0$;
3. $u^* g(x^*) = 0$.

2 _____ (20 points)

Illustrer le dual lagrangien, la fonction de perturbation, les solutions primales et duales du programme mathématique

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = -2x_1 + x_2 \\ \text{sujet à} & x_1 + x_2 - 3 \leq 0 \\ & x \in X, \end{array}$$

où $X = \{(0, 0), (0, 4), (4, 4), (4, 0), (1, 2), (2, 1)\}$.**3** _____ (20 points)

Formuler un programme convexe avec contraintes d'inégalité satisfaisant la condition de Slater (intérieur du domaine non vide) comme un programme mathématique impliquant une seule contrainte non différentiable. Écrire les conditions d'optimalité (Kuhn-Tucker) du programme non différentiable et montrer qu'on retrouve les conditions traditionnelles.

4 _____ (20 points)

Déterminer le cône tangent des ensembles suivants:

1. $\{(x_1, x_2) : x_2 + x_1^3 \geq 0\}$;
2. $\{(x_1, x_2) : x_1 \text{ entier et } x_2 = 0\}$;
3. $\{(x_1, x_2) : x_1 \text{ rationnel et } x_2 = 0\}$.

5 _____ (20 points)

Tout programme mathématique

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i \in I \end{array}$$

peut s'écrire:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & h_i(x) = 0 \quad i \in I \end{array}$$

en introduisant de nouvelles variables y_i et en posant $h_i(x) = g_i(x) + y_i^2$. Le nouveau programme ne contient pas de contraintes d'inégalités! Montrer que cette idée n'est pas si bonne qu'elle le paraît à prime abord, des points de vue de la convexité et des qualifications des contraintes.