

Remettre le mardi 1er avril 2003 au début du cours

1 _____ (20 points)

- Trouver une fonction qui soit monotone sans que toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne associée soient non négatives.
- Trouver une fonction qui ne soit pas monotone alors que toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne associée sont positives.

2 _____ (60 points)

Soit le programme mathématique convexe :

$$\min_{(x,y) \in X} f(x,y)$$

où

$$X = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\},$$

que vous tentez de résoudre par un programme informatique implantant la méthode de Frank et Wolfe. Dans votre implantation, vous n'utilisez que l'information fournie par le gradient, c'est-à-dire que vous n'évaluez jamais la fonction objectif f .¹ Malheureusement, en codant l'algorithme de Frank et Wolfe, vous avez commis des fautes de frappe et fourni comme gradient,

$$\nabla f(x,y) = (-y, x).$$

1. Si $x^0 = (1, 1)$, quelle est la suite de points engendrée par votre programme ?
2. Suite aux problèmes de convergence, vous réalisez que votre gradient n'en est pas un et qu'en fait vous tentez de résoudre une inéquation variationnelle monotone. Vous décidez de la résoudre. Quelle est sa solution ?
3. Vous implantez l'algorithme de projection 'simple' avec pas α . La situation s'améliore-t-elle (par rapport au pseudo algorithme de Frank et Wolfe), même pour des valeurs très faibles du paramètre α ?
4. Proposer un algorithme convergent et illustrer une ou deux itérations.
5. (Bonus) Expliquer en quelques lignes, sans utiliser de notation mathématique, en quoi la situation serait modifiée si $X = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$?

Pour répondre aux questions précédentes, vous êtes libre d'utiliser des représentations graphiques ou même un programme informatique, dans le langage de votre choix.

3 _____ (20 points)

Considérer l'algorithme de projection

$$x^{k+1} = \text{proj}_X(x^k - \alpha F(x^k))$$

pour résoudre l'inéquation variationnelle monotone

$$\langle F(x), x - y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in X.$$

Donner un exemple pour lequel l'algorithme converge si $\alpha < 2\beta/L^2$ mais ne converge pas pour tout $\alpha < 2/L$.

¹Si d est la direction de Frank et Wolfe au point x et $x^+ = x + t^*d$ l'itéré subséquent, alors soit $\langle \nabla f(x+d), d \rangle \leq 0$ et $t^* = 1$ soit t^* satisfait : $\langle \nabla f(x + t^*d), d \rangle = 0$.