

FONCTIONS MID-CONVEXES

Une fonction f est **mid-convexe** si:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)].$$

Une fonction convexe est trivialement mid-convexe, et il n'est pas difficile de démontrer qu'une fonction mid-convexe *et continue* est convexe. Il est alors légitime de se demander s'il existe des fonctions mid-convexes réelles qui ne sont pas convexes?

La réponse à cette question n'est pas évidente. En fait, elle dépend de votre foi en une conjecture qui ne peut être démontrée sous les axiomes de la théorie "classique" (Zermelo-Fraenkel) des ensembles:

Conjecture 1 (AXIOME DU CHOIX) (*Zermelo*) : *Si C une collection d'ensembles non vides, il est possible de constituer un ensemble possédant un élément de chaque ensemble de la collection. Autrement dit, il existe une fonction de sélection f telle que, pour tout $S \in C$, on ait: $f(S) \in S$.*

Une bonne partie des mathématiques modernes est basée sur sa validité. Pour de plus amples renseignements, on consultera avec profit la page

<http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/ccc/choice.html>

où l'on cite cette jolie phrase du philosophe, pacifiste et mathématicien Bertrand Russell (1872 – 1970):

"To choose one sock from each of infinitely many pairs of socks requires the Axiom of Choice, but for shoes the Axiom is not needed."

En effet, une fonction de sélection peut toujours choisir le soulier *gauche* (ou le soulier droit), alors que cette possibilité est exclue dans le cas de chaussettes identiques!

L'axiome du choix est équivalent à deux énoncés célèbres, le *principe du bon ordre* et le *lemme de Zorn*.

Lemme 1 (ZORN) : *Soit X un ensemble partiellement ordonné (revoir vos ou mes notes du cours de mathématiques discrètes) où toute chaîne (sous-ensemble totalement ordonné) possède une borne supérieure. Alors, X possède un élément maximal.*

Principe 1 (PRINCIPE DU BON ORDRE) : *Tout ensemble peut être totalement ordonné.*

Considérons maintenant l'espace vectoriel des nombres réels associé au corps des rationnels, qui jouent ainsi le rôle des scalaires. Si l'on admet l'axiome du choix (ou un énoncé équivalent), alors on peut démontrer l'existence d'une **base de Hamel**, c'est-à-dire un sous-ensemble $B = \{b_k\}$ des réels tel que

1. les éléments de B sont linéairement indépendants: pour tout ensemble *fini* de scalaires (rationnels!) $\{a_k\}_{k=1}^n$, on a:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = 0 \Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k;$$

2. tout réel peut s'exprimer comme une combinaison rationnelle d'un nombre *fini* d'éléments de la base B .

À partir d'une base de Hamel, il est trivial de construire une fonction *mid-linéaire* en donnant une valeur arbitraire à $f(b_k)$ et en posant:

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right) = \sum_{k=1}^n a_k f(b_k).$$

Puisque les valeurs de f aux point b_k sont arbitraires, il est en effet facile de faire en sorte que f ne soit pas convexe.

Remarques

1. Un mathématicien constructiviste ne sera pas impressionné par les arguments ci-dessus.
2. Une fonction mid-convexe mais non convexe est un objet mathématique plutôt bizarre. En effet (i) toute fonction *mesurable* et mid-convexe est convexe (ii) si f est mid-convexe et qu'il existe un ouvert (non vide) où f est bornée, alors f est convexe.
3. On consultera avec profit l'excellent livre "Convex Functions" de A. Wayne Roberts et Dale E. Vargas, publié chez Academic Press (1973).