

À remettre le mardi 17 novembre au début du cours

1 _____ (20 points)

Soit le programme linéaire en variables entières:

$$\begin{array}{ll} \min_x & cx \\ \text{s.c.} & A_1x = b_1 \\ & A_2x = b_2 \\ & x \in Z_+^n, \end{array}$$

où les contraintes $A_1x = b_1$ correspondent à celles d'un réseau (la matrice A_1 est totalement unimodulaire). Si l'on dualise la contrainte $A_2x = b_2$, on obtient un problème de réseau qu'on peut résoudre comme un programme traditionnel. Si on dualise l'autre contrainte, on obtient un programme combinatoire auquel on ne peut appliquer directement l'algorithme du simplexe, mais que l'on suppose résoluble par une autre méthode. Quelle relaxation est la plus forte?

2 _____ (20 points)

Soit le problème de sac-à-dos:

$$\begin{array}{ll} \max_x & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{s.c.} & \sum_{i=1}^n w_i x_i \leq b. \end{array}$$

En supposant que tous les quotients c_i/w_i sont distincts, trouver une valeur b^* de b telle que, dans toute solution optimale du problème, on ait $x_1 \geq 1$, où l'indice "1" est celui du meilleur produit, en terme de rapport qualité/poids. En déduire qu'en connaissant la solution des problèmes correspondant à des valeurs de b inférieures à b^* , on peut obtenir directement la solution d'un problème correspondant à $b \geq b^*$.

3 _____ (15 points)

Formuler le problème d'arbre sous-tendant minimal comme un problème impliquant des variables de flot sur les arcs d'un réseau orienté que vous déterminerez.

4 _____ (15 points)

Le jeu INSTANT INSANITY est composé de 4 cubes dont les faces sont colorées de blanc, de bleu de rouge ou de vert, et qu'il faut réarranger en une colonne dont chaque face comporte les quatre couleurs. Formuler ce problème à l'aide de contraintes linéaires et de variables entières. Pour plus d'information sur ce jeu, vous pouvez consulter:

http://en.wikipedia.org/wiki/Instant_Insanity .

5 _____ (15 points)

Quelle est la meilleure formulation de l'ensemble X , parmi les trois ci-dessous

$$X = \{x \in \{0, 1\}^4 : 97x_1 + 32x_2 + 25x_3 + 20x_4 \leq 139\}$$

$$X = \{x \in \{0, 1\}^4 : 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3\}$$

$$X = \{x \in \{0, 1\}^4 : x_1 + x_2 + x_3 \leq 2, \\ x_1 + x_3 + x_4 \leq 2, x_1 + x_2 + x_4 \leq 2\} \quad ?$$

6 _____ (15 points)

Déterminer deux coupes de Gomory pour le programme linéaire en variables entières

$$\begin{array}{ll} \max_{x \in Z_+^n} & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 9. \end{array}$$

Illustrer les coupes sur une figure. Y en a-t-il une préférable à l'autre?