

Devoir 4

à remettre au plus tard à 13:31 le vendredi 2 juillet

Voici d'abord trois problèmes de décision et leurs langages associés:

DIVPLUS:

Donnée: deux nombres naturels a et c .

Question: existe-t-il un naturel x tel que $ax + 1$ divise c sans reste?

Le langage DIVPLUS est $\{u\#v : u \in \{0, 1\}^+, v \in \{0, 1\}^+ \text{ est la représentation binaire de } c \text{ et il existe un naturel } x \text{ tel que } ax + 1 \text{ divise } c \text{ sans reste}\}$.

CIRCUIT:

Donnée: un circuit booléen de m entrées fixées.

Question: la dernière porte du circuit prend-elle la valeur booléenne 1?

Le langage CIRCUIT est $\{C \in \{0, 1, \#, \neg, \vee, \wedge\}^* : C \text{ représente un circuit booléen de } m \text{ entrées fixées dont la dernière porte prend la valeur booléenne } 1\}$.

Remarque: Un mot $e_1e_2 \cdots e_m\#u_1\#v_1\#o_1\#u_2\#v_2\#o_2\#\cdots\#u_t\#v_t\#o_t$ encode un circuit dont les m portes d'entrées numérotées de 1 à m sont fixées à $e_1, e_2, \dots, e_m \in \{0, 1\}$ si $t \geq 0$ et pour $1 \leq i \leq t$, $o_i \in \{\neg, \vee, \wedge\}$ et u_i et v_i sont les représentations binaires d'entiers a_i et b_i vérifiant $1 \leq a_i, b_i < m + i$, indiquant que la porte numérotée $m + i$ est le o_i des portes numérotées a_i et b_i (seul a_i étant utilisé lorsque $o_i = \neg$).

STOP:

Donnée: $u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_m \in \{a, b\}^*$ et un nombre naturel k .

Question: est-il possible de former un mot $u_{i_1}u_{i_2} \cdots u_{i_k}$ (avec répétitions permises des u_j) égal au mot $v_{i_1}v_{i_2} \cdots v_{i_k}$?

Le langage STOP est $\{u_1\#v_1\#\cdots\#u_m\#v_m\#w : u_i, v_i \in \{a, b\}^+, \text{ et } w \in \{0, 1\}^+ \text{ est le binaire d'un entier } k \text{ permettant de former un mot } u_{i_1}u_{i_2} \cdots u_{i_k} \text{ égal à } v_{i_1}v_{i_2} \cdots v_{i_k}\}$.

1. Une réduction *polichinelle* est une réduction calculable en temps $O(n^3)$.
 - (a) Montrez que le problème PATH se réduit polichinellement au problème STOP.
 - (b) Est-ce que la réduction polichinelle est transitive en général? (Justifiez.)
2. Pour DIVPLUS, CIRCUIT et STOP, esquissez un algorithme déterministe efficace résolvant le problème et analysez son temps d'exécution. Lequel (lesquels) de ces problèmes avez-vous ainsi réussi à placer dans la classe P?
3. Justifiez que DIVPLUS, CIRCUIT et STOP appartiennent à NP.