DIRO
IFT 1215

INTRODUCTION AUX SYSTÈMES INFORMATIQUES

CODES CORRECTEURS

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

CODES CORRECTEURS

SOMMAIRE

CODES CORRECTEURS
INTRODUCTION - CONTRÔLE DE PARITÉ

Introduction

- Codes auto vérificateur
Codes permettant de détecter des erreurs

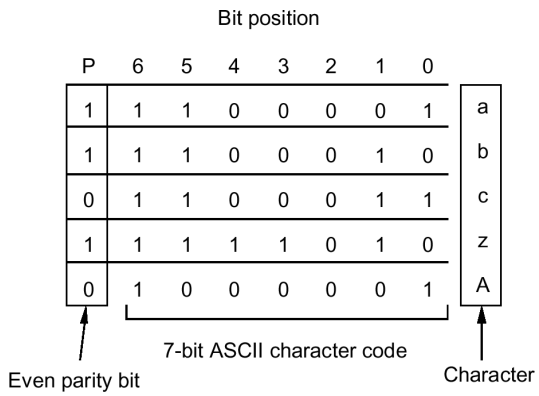
- Code auto correcteurs
Détection et correction d'une ou plusieurs erreurs

BER *Bit Error Rate*

- 1 Bit/10^5 dans les réseaux WAN & LAN
- 1 Bit/10^{12} dans les réseaux locaux
- 1 Bit/10^{18} dans l'ordinateur

Contrôle de Parité

Transmission de caractère ASCII (7 bits) + 1 bit de parité



Le bit de parité force le nombre total de bits à 1 à être pair dans le cas d'un controle de parité pair

CODES CORRECTEURS
DOUBLE PARITÉ

Introduction

Double parité impaire (m=4)

	No de bit							bit de	contrôle
	1	2	3	4	5	6	7	parité	transversal
1. car.= 1	0	1	1	1	0	0	1	0	← faux
2. " = 9	0	1	1	1	0	0	1	1	OK
3. " = 6	0	1	1	0	1	1	0	1	OK
4. " = 8	0	1	1	1	0	0	0	0	OK
bit de parité	1	1	1	1	0	0	1		
contrôle longitudinal	OK	OK	OK	↑ faux	OK	OK	OK		

Codage

Un code de parité impaire sur chaque ligne (**contrôle transversal**) et sur chaque colonne (**contrôle longitudinal**), m caractères = 1 Bloc

DeCodage

Contrôle Transversal ▶ Erreur sur 1^{ere} ligne

Contrôle Longitudinal ▶ Erreur sur la 4^{eme} col.

▼

4^{eme} Bit du 1^{ere} caractère à corriger

[Permet de corriger une seule erreur]

CODES CORRECTEURS
CODE DE HAMMING

Code de Hamming

Code auto-correcteur

m Bits d'info + k bits de contrôle de parité
▶ $m + k = n$ Bits transférés

m	0	0	1	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	...	120	...
k	1	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4		8	...
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...	128	...

Exemple

Si $m = 4$ (nb de Bits d'information), on peut construire un code de Hamming sur $n = 7$ Bits en ajoutant $k = 3$ Bits de contrôle

7	6	5	4	3	2	1
m_4	m_3	m_2	k_3	m_1	k_2	k_1

Les 3 bits de contrôle k_3, k_2, k_1 sont placés sur les puissances de 2

- k_1 en position 1
- k_2 en position 2
- k_3 en position 4

CODES CORRECTEURS
CODE DE HAMMING

Si $m = 4$, $k = 3$
Pour chaque Bit du message ▶ Bit contrôlant sa parité ?

Bit n^o 7	(0111)	Bit n^o 7 est contrôlé par k_3, k_2, k_1
Bit n^o 6	(0110)	Bit n^o 6 est contrôlé par k_3, k_2
Bit n^o 5	(0101)	Bit n^o 5 est contrôlé par k_3, k_1
Bit n^o 4	(0100)	*Bit de contrôle* k_3
Bit n^o 3	(0011)	Bit n^o 5 est contrôlé par k_2, k_1
Bit n^o 2	(0010)	*Bit de contrôle* k_2
Bit n^o 1	(0001)	*Bit de contrôle* k_1

Inversement, qui contrôle qui ?

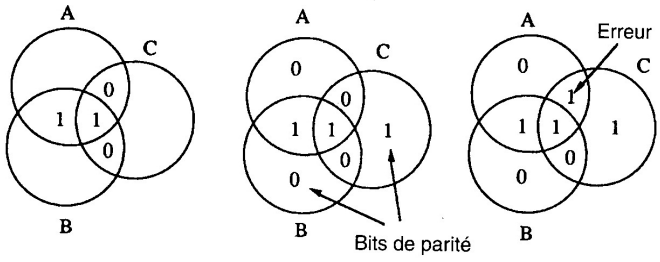
k_1	contrôle les bits	1, 3, 5, 7
k_2	contrôle les bits	2, 3, 6, 7
k_3	contrôle les bits	4, 5, 6, 7

Exemple

Avec une parité paire, k_1 doit être tel que le nombre de bits à 1, compté sur les bits 1, 3, 5, 7 soit pair

Compréhension graphique

Codage du mot 1100



CODES CORRECTEURS
CODE DE HAMMING

k_1	contrôle les bits	1, 3, 5, 7
k_2	contrôle les bits	2, 3, 6, 7
k_3	contrôle les bits	4, 5, 6, 7

Quand on reçoit l'information, on effectue à nouveau le contrôle de parité et pour chaque bit de contrôle, on compare la valeur reçue à celle recalculée

Si elles sont identiques, On assigne la valeur 0 à la variable binaire A_i au bit de contrôle k_i, sinon on lui assigne la valeur 1

La valeur des A_i nous donne la position de l'erreur

- $A_3A_2A_1 = 000$ indique une absence d'erreur
- $A_3A_2A_1 = 001$ indique une erreur sur le bit n^o 1
- ...

Exemple

$m = 4$, $k = 3$, *parité paire, réception de* 1011100

numéro	7	6	5	4	3	2	1
type	m_4	m_3	m_2	k_3	m_1	k_2	k_1
valeur	1	0	1	1	1	0	0

$k_1 = 0$, (bits 1, 3, 5, 7) est donc faux $\rightarrow A_1 = 1$

$k_2 = 0$, (bits 2, 3, 6, 7) est juste $\rightarrow A_2 = 0$

$k_3 = 1$, (bits 4, 5, 6, 7) est donc faux $\rightarrow A_3 = 1$

L'adresse binaire de l'erreur est $A_3A_2A_1 = 101_2 = 5_{10}$
Le bit 5 *est faux. Le message corrigé est* 1001100
sans les bits de contrôle, le message corrigé est 1001

CODES CORRECTEURS
CODE DE HAMMING

Exemple 8 *Bits d'info* + 4 *Bits de contrôle, parité paire*

Bit position	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Position number	1100	1011	1010	1001	1000	0111	0110	0101	0100	0011	0010	0001
Data bit	D8	D7	D6	D5		D4	D3	D2		D1		
Check bit					C8				C4		C2	C1

$$
\begin{array}{lllllllll}
C1 = & D1 \oplus & D2 \oplus & & D4 \oplus & D5 \oplus & & D7 & \\
C2 = & D1 \oplus & & D3 \oplus & D4 \oplus & & D6 \oplus & D7 & \\
C4 = & & D2 \oplus & D3 \oplus & D4 \oplus & & & & D8 \\
C8 = & & & & & D5 \oplus & D6 \oplus & D7 \oplus & D8
\end{array}
$$

Word stored as	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
Word fetched as	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
Position number	1100	1011	1010	1001	1000	0111	0110	0101	0100	0011	0010	0001
Check bit					0				0		0	1

$$
\begin{array}{l}
C1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \\
C2 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \\
C4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \\
C8 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0
\end{array}
$$

Calcul

$$
\begin{array}{l}
C1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \\
C2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \\
C4 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \\
C8 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0
\end{array}
$$

Lu

Erreur sur le 6ième Bit, cad D_3

CODES CORRECTEURS
CODE DE HAMMING

Calcul Simplifié du code de Hamming

1 Transmission d'un message

Coder 10101011001 avec une parité paire
$m = 11$ donc $k = 4$ ($n = 15$)

numéro	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
type	m_{11}	m_{10}	m_9	m_8	m_7	m_6	m_5	k_4	m_4	m_3	m_2	k_3	m_1	k_2	k_1
valeur	1	0	1	0	1	0	1	?	1	0	0	?	1	?	?

Dans le message à transmettre, on a des bits à 1 dans les positions : 15, 13, 11, 9, 7, 3

On transforme ces positions en valeur binaire et on les additionne modulo 2 : on met 1 lorsque l'on a un nombre impair de 1 et 0 pour un nombre pair de 1

```
15  =  1  1  1  1
13  =  1  1  0  1
11  =  1  0  1  1
 9  =  1  0  0  1
 7  =  0  1  1  1
 3  =  0  0  1  1
      ------------
      0  1  0  0  → bits de parité
      k4 k3 k2 k1
```

Message codé 101010101001100

Nota

Parité impaire, Nb impair de 1 ▷ 0 (Nb pair de 1 ▷ 1)

CODES CORRECTEURS
CODE DE HAMMING

2 Réception d'un message

Réception de 101000101001100 avec une parité impaire $m = 11$ donc $k = 4$ ($n = 15$)

On a des Bits à 1 dans les positions : 15, 13, 9, 7, 4, 3

```
15  =  1  1  1  1
13  =  1  1  0  1
 9  =  1  0  0  1
 7  =  0  1  1  1
 4  =  0  1  0  0
 3  =  0  0  1  1
      ------------    addition modulo 2 inversée
        0  1  0  0
       A4 A3 A2 A1    → erreur à la position 4
```

Après correction du Bit en position 4*, on a le message*
101000101000100

Après correction, ce message à des à 1 dans les positions

```
15  =  1 1 1 1
13  =  1 1 0 1
 9  =  1 0 0 1
 7  =  0 1 1 1
 3  =  0 0 1 1
      ---------    addition modulo 2 inversée
        0 0 0 0    →  aucune erreur détectée
```

Après élimination des bits redondant, le message est
10100011001

CODES CORRECTEURS
CODE DE HAMMING

Code de Hamming et erreurs groupés

Arrangement matriciel du code de Hamming :

ASCII	code de Hamming (pour chaque lettre)											
	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	(numéros)
H -> 1001000	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	
a -> 1100001	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	
m -> 1101101	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	
m -> 1101101	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	
i -> 1101001	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	
n -> 1101110	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	
g -> 1100111	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	

On transmet les Bits colonnes par colonne (on aura un bit maximal erroné par ligne)

CODES CORRECTEURS
DÉTECTION D'ERREURS GROUPÉS : CODE CRC

Code CRC

[*Cyclic Redundant Coding*] ou codes polynomiaux

Information de n Bits $\triangleright$ *polynôme de degré* $n-1$

$$1\,1\,0\,1 \rightarrow x^3+x^2+1$$
$$1\,1\,0\,0\,0\,1 \rightarrow x^5+x^4+1$$

Pour calculer les bits de contrôle, on utilisera l'addition et la soustraction modulo 2

Somme modulo 2	*Soustraction modulo 2*
10011011	11110000
+ 11001010	- 10100110
01010001	01010110

Algorithme

$M(x)$ $\triangleright$ Polynôme associé au message original M
$G(x)$ $\triangleright$ Polynôme générateur de degré r choisi

— Envoie —

- 1 $M(x) \leftarrow M(x)x^r$ ($\triangleright$ ajout de r "0" à la fin de M)
- 2 Effectuer la division (modulo 2)

$$\frac{M(x)x^r}{G(x)} = Q(x) + R(x)$$

CODES CORRECTEURS
DÉTECTION D'ERREURS GROUPÉS : CODE CRC

•3 Le Quotient $Q(x)$ est ignoré
Le reste $R(x)$ [*checksum*] contient r bits (degré $r-1$)

On effectue la soustraction modulo 2

$$M(x)x^r - R(x) = T(x)$$

$T(x)$ ▷ Polynôme cyclique & message à envoyé

— Réception —

•1 On effectue la division

$$\frac{T(x)}{G(x)}$$

— Si le reste $= 0$ il n'y a pas d'erreur

— Si le reste $\neq 0$, il y a erreur, on doit retransmettre

Nota
En choisissant judicieusement $G(x)$, on peut détecter toute erreur sur 1 Bit, 2 Bits, une séquence de n bits et au delà la détection est possible avec une très grande probabilité

CODES CORRECTEURS
CODE CRC -EXEMPLE

Exemple 1 : — *Envoie* —

Message $M = 101101 \triangleright M(x) = x^5 + x^3 + x^2 + 1$

Poly. générateur $G = 1011 \triangleright G(x) = x^3 + x + 1$

•1 $M(x) \leftarrow M(x)\ x^r$

$$M(x)x^3 = 101101000$$

•2 Division modulo 2 de $\frac{M(x)x^r}{G(x)}$

```
1 0 1 1 0 1 0 0 0  |  1 0 1 1
1 0 1 1            ---------------
-------               1 0 0 0 0 1
0 0 0 0 0 1 0 0 0
          1 0 1 1
          -------
          0 0 1 1   →  R(x) = 0 1 1
```

•3 $Q(x)$ ignoré, Soustraction modulo 2

$$M(x)x^r - R(x) = T(x)$$

$$T(x) = 101101011$$

CODES CORRECTEURS
CODE CRC -EXEMPLE

Exemple 2 : — *Réception d'un message* —

Message $M = 11010101 = T(x)$

Poly. générateur $G = 1011 \triangleright G(x) = x^3 + x + 1$

•1 On effectue la division (modulo 2) $\frac{T(x)}{G(x)}$

```
1 1 0 1 0 1 0 1  |  1 0 1 1
1 0 1 1          ------------
-------             1 1 1 1 0
0 1 1 0 0
  1 0 1 1
  -------
  0 1 1 1 1
    1 0 1 1
    -------
    0 1 0 0 0
      1 0 1 1
      -------
      0 0 1 1 1  →  R(x) = 1 1 1
```

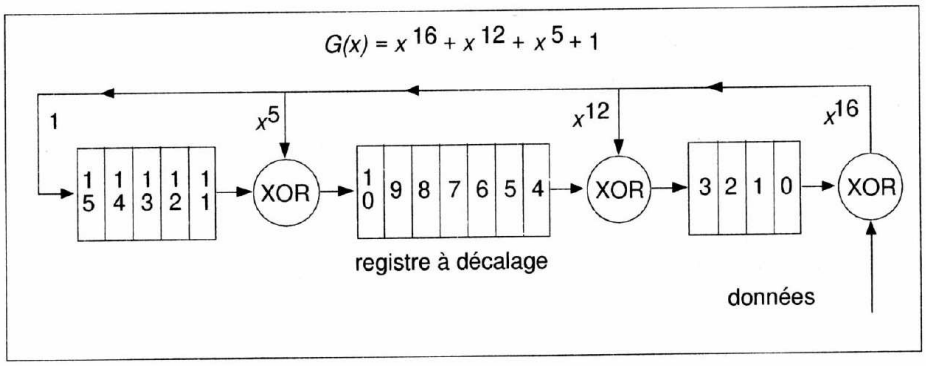
Des erreurs de transmission ont été détecté

Il faut retransmettre

CODES CORRECTEURS
CODE CRC -POLYNÔMES GÉNÉRATEUR

Polynôme Générateur

$$\begin{aligned} \text{CRC–12} &= x^{12} + x^{11} + x^3 + x^2 + x + 1; \\ \text{CRC–16} &= x^{16} + x^{15} + x^2 + 1; \\ \text{CRC–CCITT} &= x^{16} + x^{12} + x^5 + 1. \end{aligned}$$



Circuits permettant de calculer R(x)

• Au départ le registre à décalage contient tous ses (16) bits à 0, à la fin, il contient le CRC

• Pour chaque bit en entrée, on effectue un décalage de gauche à droite en tenant compte des sorties des différents XOR

CODES CORRECTEURS
EXERCICES

Exo -1-

Transmission par codage de Hamming du message 116570_8, parité impaire

Message $\triangleright$ $116570_8 = 1\,001\,110\,101\,111\,000_2$

Nb de Bits de contrôle : $k = 5$

k_1	contrôle les bits	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 $\triangleright$ 0
k_2	contrôle les bits	2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19 $\triangleright$ 0
k_3	contrôle les bits	4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21 $\triangleright$ 1
k_4	contrôle les bits	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 $\triangleright$ 0
k_5	contrôle les bits	16, 17, 18, 19, 20, 21 $\triangleright$ 0

Le message codé à transmettre est
100 110 101 011 101 001 000

Avec la méthode de Hamming simplifiée

21	$\rightarrow$	1 0 1 0 1
18	$\rightarrow$	1 0 0 1 0
17	$\rightarrow$	1 0 0 0 1
15	$\rightarrow$	0 1 1 1 1
13	$\rightarrow$	0 1 1 0 1
11	$\rightarrow$	0 1 0 1 1
10	$\rightarrow$	0 1 0 1 0
9	$\rightarrow$	0 1 0 0 1
7	$\rightarrow$	0 0 1 1 1
		0 0 1 0 0

CODES CORRECTEURS
EXERCICES

Exo -2-

Réception du message 6130014_8, codage de Hamming, parité impaire

Nb de Bits de contrôle : $k = 5$, $n = 21$

k_1 = 0, il contrôle les bits 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21; il est juste $\rightarrow A_1 = 0$
k_2 = 0, il contrôle les bits 2,3,6,7,10,11,14,15,18,19; il est donc faux $\rightarrow A_2 = 1$
k_3 = 1, il contrôle les bits 4,5,6,7,12,13,14,15,20,21; il est juste $\rightarrow A_3 = 0$
k_4 = 0, il contrôle les bits 8,9,10,11,12,13,14,15; il est donc faux $\rightarrow A_4 = 1$
k_5 = 1, il contrôle les bits 16,17,18,19,20,21; il est juste $\rightarrow A_5 = 0$.
L'adresse binaire de l'erreur est : $A_5\,A_4\,A_3\,A_2\,A_1$ = 0 1 0 1 0 = 10.

Le Bit 10 du message transmis est donc faux

Le message corrigé est
1 100 001 100 100 001

Avec la méthode de Hamming simplifiée

21	$\rightarrow$	1 0 1 0 1
20	$\rightarrow$	1 0 1 0 0
16	$\rightarrow$	1 0 0 0 0
14	$\rightarrow$	0 1 1 1 0
13	$\rightarrow$	0 1 1 0 1
4	$\rightarrow$	0 0 1 0 0
3	$\rightarrow$	0 0 0 1 1
		0 1 0 1 0

CODES CORRECTEURS
EXERCICES

Exo -3-

Méthode CRC, Message à transm. $M = 456_8 = 100\,101\,110_2$
Poly. générateur $G = 100011 \triangleright G(x) = x^5 + x + 1$
Message à envoyer ?

- $M(x) \leftarrow M(x)\ x^r \qquad M = 10010111000000$

-

```
1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0  |  1 0 0 0 1 1
1 0 0 0 1 1                   ------------------
-----------                     1 0 0 1 1 0 1 0 0
0 0 0 1 1 0 1 1 0
      1 0 0 0 1 1
      -----------
      0 1 0 1 0 1 0
        1 0 0 0 1 1
        -----------
        0 0 1 0 0 1 0 0
            1 0 0 0 1 1
            -----------
            0 0 0 1 1 1 0 0
```

- $R(x) = 11100 \triangleright$ Message à envoyer
  $T(x) = 10010111011100 = 22734_8$

CODES CORRECTEURS
EXERCICES

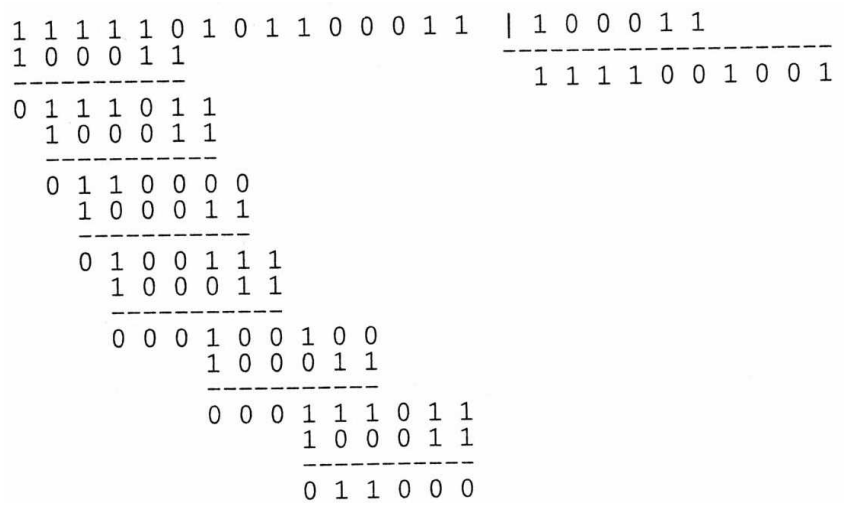
Exo -4-

CRC, Recep. du message $M = 76543_8 = 111\,110\,101\,100\,011_2$

Poly. générateur $G = 100011 \triangleright G(x) = x^5 + x + 1$

Message à re-envoyer ?

•



Le reste est $\neq 0$

Il faut retransmettre le message