



DIRO
IFT 1214

EXAMEN INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift1214/](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift1214/)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : 17/02/2004

I	Conversion et Arithmétique en Base n (25 pts).
II	Représentation des Données Entières (10 pts).
III	Représentation Flottante (10 pts).
IV	Simplification des Fonctions Binaires (35 pts).
V	Circuits Séquentiels (22 pts).

Directives

- TOUTE DOCUMENTATION EST PERMISE
 - TOUTE CALCULATRICE EST INTERDITE
-
- Les réponses devront être clairement présentées et justifiées (elles peuvent être concises mais devront néanmoins contenir les résultats intermédiaires nécessaires permettant de montrer sans ambiguïté que vous êtes arrivés au résultat demandé).
 - Si vous ne comprenez pas une question, faites en une interprétation, et proposez une réponse.

I. Conversion et Arithmétique en Base n (25 pts)

1. Convertir 822_{10} en binaire (base 2). Utiliser le résultat de sa conversion en binaire pour trouver son équivalent octal (base 8) et hexadécimal (base 16).
2. Convertir 0.325_{10} en base 2, base 8 et base 16 en utilisant comme notation une barre au dessus d'un éventuel motif de plusieurs bits qui se répéterait.
3. En déduire la représentation de 822.325_{10} en base 2, base 8 et base 16.
4. Convertir le nombre 1.0101_2 en octal et décimal.
5. Convertir le nombre $1.\overline{01}_2$ (i.e., $1.010101\dots$ avec le motif 01 se répétant à l'infinie) en une fraction décimale¹.

Réponse

1.

$$822_{10} = 1100110110_2 = 1466_8 = 336_{16}. \text{ <5 pts>}$$

2.

$$0.325_{10} = 0.010\overline{1001}_2 = 0.2\overline{4631}_8 = 0.5\overline{3}_{16}. \text{ <5 pts>}$$

3.

$$822.325_{10} = 1100110110.010\overline{1001}_2 = 1466.2\overline{4631}_8 = 336.5\overline{3}_{16}. \text{ <5 pts>}$$

4.

$$1.0101_2 = 1.24_8 = \left(\frac{21}{16}\right)_{10} (= 1.3125_{10} = 1 + 2^{-2} + 2^{-4}). \text{ <5 pts>}$$

5.

$$1.\overline{01} \text{ se traduit en décimal par la valeur ; } 1 + 2^{-2} + 2^{-4} \dots = \frac{1-(2^{-2})^\infty}{1-2^{-2}} = \frac{4}{3}. \text{ <5 pts>}$$

II. Représentation des Entiers Signés (10 pts)

1. Calculer les expressions suivantes exprimées en complément à deux (complément vrai) en indiquant celle pour lesquelles apparaît un débordement (dépassement de capacité) ou une retenue.
 - (a) $0101\ 1111 + 0110\ 0001$ (calcul sur 8 bits).
 - (b) $1011 - 1001$ (calcul sur 4 bits).

Réponse

1.

Addition de deux nombres positifs, résultat négatif; cela signifie qu'il y a un dépassement de capacité; on rejette le résultat <2.5 pts> :

$$0101\ 1111 + 0110\ 0001 = (0)\ 1100\ 0000.$$

<2.5 pts>

2.

¹On pourra utiliser la relation permettant d'exprimer la somme des $(n + 1)$ termes d'une suite géométrique de raison q ,

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q}.$$

Équivalent à $1011 + 0111$, on additionne un nombre positif avec un nombre négatif, on obtient un nombre positif avec une retenue <2.5 pts> (qui est ignorée),

$$1011 + 0111 = (1) 0010.$$

<2.5 pts>

III. Représentation Flottante (10 pts)

Avec une représentation flottante binaire avec un format du type $\pm 1.xxxx\dots$ (avec 23 x , i.e., 23 bits pour la mantisse) et un exposant sur 8 bits permettant d'exprimer les valeurs de l'exposant de -127 à 128.

1. Donner en binaire la représentation de la plus petite valeur positive représentable par cette représentation flottante. Convertir cette valeur binaire en valeur décimale.
2. Donner en binaire la représentation de la plus grande valeur positive représentable. Démontrer¹ que cette valeur est égale à $(2 - 2^{-23}) \times 2^{128}$.

Réponse

1. La plus petite valeur représentable par cette représentation est de la forme $1.00\dots 23 \text{ zéros} \dots \times 2^{-127}$ <2.5 pts> qui se traduit en décimal par la valeur 2^{-127} (que l'on appelle *epsilon machine*). <2.5 pts>

2. La plus grande valeur représentable par cette représentation est de la forme $1.11\dots 23 \text{ zéros} \dots \times 2^{128}$ <2.5 pts> qui se traduit en décimal par la valeur,

$$(1 + 2^{-1} + 2^{-2} \dots + 2^{-23}) \times 2^{128} = \frac{1 - (2^{-1})^{24}}{1 - 2^{-1}} \times 2^{128} = 2(1 - 2^{-24}) \times 2^{128} = (2 - 2^{-23}) \times 2^{128}.$$

<2.5 pts>

IV. Simplification des Fonctions Binaires (35 pts)

1. En utilisant la table de Karnaugh, donner sous forme de SOP (Somme de Produit) la forme simplifiée de la fonction binaire suivante,

$$G_1 = \bar{a}\bar{c}d + \bar{a}bc + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}cd$$

2. En utilisant la table de Karnaugh, simplifier de nouveau la fonction G_1 en utilisant les états indifférents (i.e., "don't care");

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}, \bar{a}\bar{b}\bar{c}d, \bar{a}\bar{b}c\bar{d}, \bar{a}\bar{b}cd, a\bar{b}c\bar{d}$$

3. Exprimer la fonction simplifiée exprimée en 2. en utilisant le plus possible d'opérateur logique ou exclusif (\oplus).

4. En utilisant la table de Karnaugh, donner la forme simplifiée,

(a) sous la forme d'une **SOP**

(b) puis ensuite en utilisant un **POS (produit de somme)**, de la fonction binaire suivante,

$$G_2 = ab\bar{d} + b\bar{c}\bar{d} + ab\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}cd,$$

en utilisant les états indifférents ;

$$\bar{a}\bar{b}cd, \bar{a}\bar{b}\bar{c}d, \bar{a}bcd, \bar{a}b\bar{c}\bar{d}, abcd.$$

Réponse

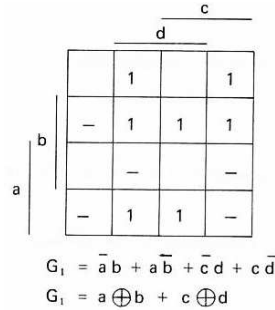
1. La fonction simplifiée G_1 s'écrit (cf. Tableau); $G_1 = \bar{a}\bar{c}d + \bar{a}c\bar{d} + \bar{a}bd + a\bar{b}d$.

(on pouvait trouver aussi la fonction $G_1 = \bar{a}\bar{c}d + \bar{a}bc + a\bar{b}d + \bar{a}c\bar{d}$.)

(on pouvait trouver aussi la fonction $G_1 = \bar{a}bd + \bar{b}c\bar{d} + \bar{a}c\bar{d} + a\bar{b}d$.)

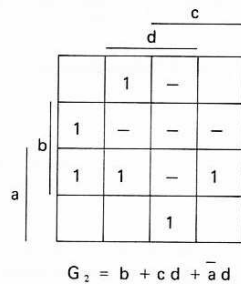
<2.5 pts> pour le tableau et <2.5 pts> pour l'expression.

2.-3. En utilisant les états indifférents, puis en utilisant le plus possible de ou exclusif, on obtient,



<2.5 pts> <5 pts> <5 pts>

4a. En utilisant les états indifférents et une forme SOP, on fait des regroupement de "1" et on obtient,

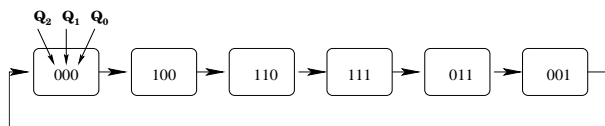


<2.5 pts> <5 pts>

4b. On fait des groupement de "0" et on obtient la forme SOP suivante, $\overline{G_2} = \bar{d}\bar{b} + a\bar{b}\bar{c}$ puis la forme POS pour G_2 ; $G_2 = (b + d).(\bar{a} + b + c)$. <10 pts>

V. Circuits Séquentiels (22 pts)

On voudrait réaliser le compteur synchrone parcourant le cycle suivant $0 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \dots$ en binaire, ou graphiquement,



1. Remplir la table de vérité qui donne l'état futur $Q_0^{t+1}, Q_1^{t+1}, Q_2^{t+1}$ en fonction de l'état présent Q_0^t, Q_1^t, Q_2^t .
2. Donner les expression Booléenne pour $Q_0^{t+1}, Q_1^{t+1}, Q_2^{t+1}$ en fonction de Q_0^t, Q_1^t, Q_2^t avec une expression aussi simplifiée que possible (on pourra utiliser les tableaux de Karnaugh, les propriétés de l'algèbre de Boole, ou autre ...).
3. Dessiner le circuit du compteur.

Réponse

1. Avec des bascules D , on a $D_i^t = Q_i^{t+1}$. Cela permet d'écrire la table d'implication séquentielle,

n° des états	Q_2	Q_1	Q_0	D_2	D_1	D_0
0	0	0	0	1	0	0
4	1	0	0	1	1	0
6	1	1	0	1	1	1
7	1	1	1	0	1	1
3	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0

<5 pts>

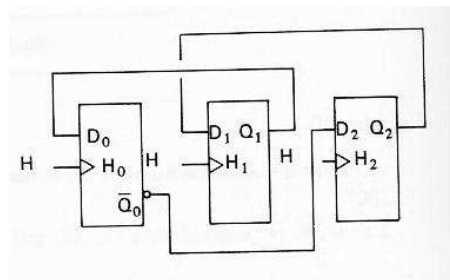
2. D'où l'on déduit (à l'aide de tables de Karnaugh ou directement),

$$Q_0^{t+1} = D_0 = Q_1^t, \quad <4 \text{ pts}>$$

$$Q_1^{t+1} = D_1 = Q_2^t, \quad <4 \text{ pts}>$$

$$Q_2^{t+1} = D_2 = \overline{Q_0^t}. \quad <4 \text{ pts}>$$

3. On en déduit le schéma du compteur,



<5 pts>