

DIRO
IFT 1214

EXAMEN INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift1214/](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift1214/)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : 22/02/2005

I	Conversion et Arithmétique en Base n (25 pts).
II	Représentation des Données Entières (15 pts).
III	Représentation Flottante (10 pts).
IV	Simplification des Fonctions Binaires (25 pts).
V	Circuits Logiques (10 pts).
VI	Circuits Séquentiels (22 pts).

Directives

- TOUTE DOCUMENTATION EST PERMISE
 - TOUTE CALCULATRICE EST INTERDITE
-
- Les réponses devront être clairement présentées et justifiées (elles peuvent être concises mais devront néanmoins contenir les résultats intermédiaires nécessaires permettant de montrer sans ambiguïté que vous êtes arrivés au résultat demandé).
 - Si vous ne comprenez pas une question, faites en une interprétation, et proposez une réponse.

I. Conversion et Arithmétique en Base n (25 pts)

1. Convertir 673_{10} en binaire (base 2). Utiliser le résultat de sa conversion en binaire pour trouver son équivalent octal (base 8) et hexadécimal (base 16). <5 pts>
 2. Convertir 0.70_{10} en base 2, base 8 et base 16 en utilisant comme notation une barre au dessus d'un éventuel motif de plusieurs bits qui se répéterait. <5 pts>
 3. En déduire la représentation de 673.70_{10} en base 2, base 8 et base 16. <5 pts>
 4. Convertir le nombre $0.\overline{011}_2$ (i.e., $0.011\ 011\ 011\ \dots$ avec le motif 011 se répétant à l'infinie) en une fraction décimale¹. <5 pts>
 5. Convertir le nombre 673_{10} en représentation BCD puis préciser ce qu'il aurait pour code en considérant ce nombre comme une chaîne de caractère ASCII et en utilisant la représentation hexadécimal (Nota : le caractère 0 (i.e., zéro) est représenté en codage ASCII par la représentation hexadécimal 30). <5 pts>
-

Réponse

1.

$$673_{10} = 10\ 1010\ 0001_2 = 1241_8 = 2A1_{16}. \quad <5\ pts>$$

2.

$$0.70_{10} = 0.1\overline{0110}_2 = 0.5\overline{4631}_8 = 0.B\overline{3}_{16}. \quad <5\ pts>$$

3.

$$673.70_{10} = 10\ 1010\ 0001.1011\ \overline{0011}_2 = 1241.546\overline{3146}_8 = 2A1.B\overline{3}_{16}. \quad <5\ pts>$$

4.

▷ En utilisant la méthode donnée en note de fin de page :

1. Soit p la conversion en base 10 de $0.\overline{011}_2$. Le nombre n pour lequel la conversion en base 2 de $(2^n p - p)$ nous donne un nombre entier est $n = 3$. En effet, multiplier par 2^3 le nombre $0.\overline{011}_2$ revient à déplacer le point de trois espaces vers la droite et permet d'obtenir $11.\overline{011}_2$. Après soustraction de $11.\overline{011}_2$ avec $0.\overline{011}_2$, on obtient un nombre entier égale à 11_2 .

2- Cette opération permet d'écrire $(2^3 p - p)_{10} = 11_2 = 3_{10}$ et permet finalement d'écrire $8p - p = 7p = 3$ en base 10 et donc de trouver $p = \frac{3}{7}$.

▷ En utilisant les suites géométriques :

$$0.\overline{011} \text{ se traduit en base 10 par la valeur :} \\ (2^{-2} + 2^{-3})(1 + 2^{-3} + 2^{-6} \dots) = (2^{-2} + 2^{-3}) \frac{1 - (2^{-3})^\infty}{1 - 2^{-3}} = \frac{3}{8} \frac{8}{7} = \frac{3}{7}.$$

¹ On pourra utiliser la méthode suivante (ou tout autre méthode de son choix)
Soit p la conversion en base 10 de $0.\overline{011}_2$

1. Sans calculer p , trouver le nombre n , pour lequel $(2^n p - p)$ nous donne un nombre entier q (i.e., sans chiffre après la virgule).
2. Convertir q en base 10 puis mettre p sous la forme d'une fraction décimale grâce à l'équation $2^n p - p = q$.

<5 pts>

5.

$673_{10} = 0110\ 0111\ 0011_{BCD} = 36\ 37\ 33_{ASCII}$. <5 pts>

II. Représentation des Entiers Signés (15 pts)

1. Représenter puis calculer $64 - 58$ sur 8 bits en complément à un (complément logique ou restreint) puis en complément à deux (complément arithmétique ou vrai) en indiquant à chaque fois lorsqu' apparaît un débordement (dépassement de capacité) ou une retenue ainsi que le résultat en base 10 obtenu. <10 pts>
2. Calculer l'expression suivante :

$$1101\ 1111 - 0110\ 0001$$

exprimées en complément à deux (calcul sur 8 bits) en indiquant lorsqu'apparaît un débordement ou une retenue. <5 pts>

Réponse

1.

Sur 8 bits, $64_{10} = 0100\ 0000_2$ et $-58_{10} = -0011\ 1010_2$

En complément à un (sur 8 bits) on a $64_{10} = 0100\ 0000_2$ et $-58_{10} = 1100\ 0101_2$ et l'opération suivante,

$$0100\ 0000 + 1100\ 0101 = 1\ 0000\ 0101 = 0000\ 0101 + 1 = 0000\ 0110.$$

On a une retenue qui est additionnée au résultat pour finalement obtenir 6_{10} . <5 pts>

En complément à deux (sur 8 bits) on a $64_{10} = 0100\ 0000_2$ et $-58_{10} = 1100\ 0110$ et l'opération suivante,

$$0100\ 0000 + 1100\ 0110 = (0)\ 1100\ 0110 = 1\ 0000\ 0110 = 0000\ 0110.$$

On a une retenue qui est ignorée pour finalement obtenir 6_{10} . <5 pts>

2.

Équivalent à $1101\ 1111 + 1001\ 1111$, on additionne deux nombre négatif et on a l'opération suivante,

$$1101\ 1111 + 1001\ 1111 = 1\ 0111\ 1110 = 0111\ 1110.$$

la retenue est ignorée et le résultat est positif signifiant qu'il y a un dépassement de capacité ; on rejette donc le résultat.

<5 pts>

III. Représentation Flottante (10 pts)

Avec une représentation flottante binaire avec un format du type $\pm 0.xxxx\dots$ (avec 23 x , i.e , 23 bits pour la mantisse), un bit de signe et un exposant sur 8 bits permettant d'exprimer les valeurs de l'exposant de -126 à 127 (l'exposant égale à -127 et 128 permettant d'exprimer des valeurs spéciales).

1. Rappelez la convention qui permet d'assurer l'unicité de la représentation. <2 pts>
2. En utilisant la convention qui permet d'assurer l'unicité de la représentation, donner le nombre de valeurs qui auront une représentation exacte avec ce type de format. <6 pts>
3. Que deviendront les valeurs qui n'ont pas de représentation exacte avec ce type de format ? Donner un exemple de valeurs qui est dans ce cas. <2 pts>

Réponse

1.

La convention permettant d'assurer l'unicité de la représentation est que le premier bit b_0 de la mantisse doit être égal à un. <2 pts>

2.

Avec la convention précédente, il existe 1×2^{22} possibilité pour les bits de la mantisse, pour chacune de ces possibilités 126 + 1 + 127 possibilités pour l'exposant (126 valeurs négative + le zéro + 127 valeurs positifs), et pour chacune de ces possibilités, deux signes possibles. A tout cela, il faut ajouter un codage spéciale pour le zéro. Ce qui nous fait

$$(2^{22} \times 254 \times 2) + 1 \quad \text{combinaisons possibles}$$

<6 pts>

3.

Les valeurs qui n'auront pas de représentation exacte seront soit tronquée ou arrondi. Un exemple de valeurs qui n'a pas de représentation exacte en base 2 avec ce type de format (et avec les autres types de format flottant) est par exemple la valeur 0.1_{10} . <2 pts>

IV. Simplification des Fonctions Binaires (25 pts)

1. Sans utiliser la table de Karnaugh (donc seulement en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole), simplifier la fonction binaire suivante, <5 pts>

$$G_1 = ab + \bar{a}c + bc$$

2. En utilisant la table de Karnaugh simplifier le plus possible la fonction binaire précédente,
 - (a) sous la forme d'une **SOP** <5 pts>
 - (b) puis ensuite en utilisant un **POS** (*Produit de Somme*). <5 pts>
3. En utilisant la table de Karnaugh, donner sous forme de SOP (Somme de Produit) la forme (la plus) simplifiée de la fonction binaire suivante, <5 pts>

$$G_2 = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + abcd + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + \bar{b}c\bar{d}$$

4. En utilisant la table de Karnaugh, simplifier de nouveau la fonction G_2 en utilisant en plus les états indifférents (i.e., "don't care") (soit G_3 cette fonction); <5 pts>

$$ab\bar{c}\bar{d}, ab\bar{c}d, abc\bar{d}$$

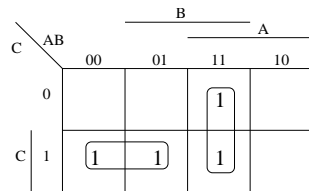
Réponse

1.

$$\begin{aligned}
 G_1 &= ab + \bar{a}c + bc = ab(c + \bar{c}) + \bar{a}c(b + \bar{b}) + bc(a + \bar{a}) \\
 &= abc + ab\bar{c} + \bar{a}cb + \bar{a}c\bar{b} + bca + bc\bar{a} = abc + ab\bar{c} + \bar{a}cb + \bar{a}c\bar{b} = ab(c + \bar{c}) + \bar{a}c(b + \bar{b}) \\
 &= ab + \bar{a}c. \quad <5 \text{ pts}>
 \end{aligned}$$

2.1

2.(a)

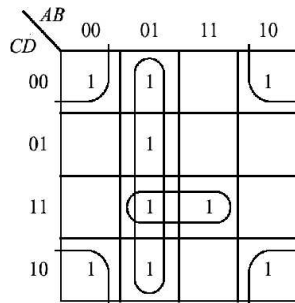


$$G_1 = ab + \bar{a}c \quad <5 \text{ pts}>$$

2.(b)

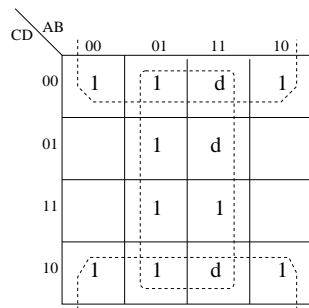
On fait des groupement de "0" et on obtient la forme SOP suivante, $\overline{G_1} = \bar{a}\bar{c} + a\bar{b}$ puis la forme POS pour G_2 ; $G_1 = (a + c).(\bar{a} + b)$. <5 pts>

3.



$$F = BCD + \bar{B}\bar{D} + \bar{A}B \quad <5 \text{ pts}>$$

4.



$$G_3 = b + \bar{d} \quad <5 \text{ pts}>$$

V. Circuits logiques (10 pts)

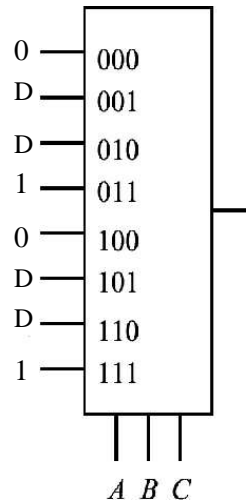
1. Une société a quatre actionnaires ayant les nombres suivants d'actions : $A : 60, B : 100, C : 160, D : 180$. On désire construire une machine permettant le vote automatique lors des réunions. Chaque actionnaire, dont le poids du vote est proportionnel au nombre, appuie sur un bouton qui porte son nom (A, B, C, D). Si un actionnaire vote OUI, sa variable (par exemple A) vaut 1; s'il vote NON, elle vaut 0. Une résolution sera votée ($V = 1$) si la somme des actions correspondant aux votes OUI représente au moins la moitié des actions plus une.
- (a) Construire la table de vérité de V en fonction des quatre variables Booléennes A, B, C, D . **<3 pts>**
- (b) Implémenter l'expression brute (i.e., non simplifiée) de cette fonction V avec un $MUX_{8 \times 1}$ en utilisant les variables A, B, C comme entrée de contrôle du MUX. **<7 pts>**

Réponse

1.

A :60	B :100	C :160	D180	V
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

<3 pts>



<7 pts>

VI. Circuits Séquentiels (22 pts)

Soit un distributeur (simplifié) de sandwiches qui n'accepte que les pièces de 1 \$ et 2 \$. Le prix des sandwiches est de 3 \$. Comme il n'y a qu'un seul type de sandwich, il n'y a pas de bouton et dès que la somme est suffisante, le sandwich est donné et la monnaie est rendue.

Il y a deux signaux d'entrée U et D correspondant respectivement à l'introduction d'une pièce de 1 \$ (entrée U) et d'une pièce de 2 \$ (entrée D) et deux signaux de sortie; respectivement, le signal de sortie R qui signifie rendre une pièce de 1 \$ (dans le cas où on a mis deux pièces de 2 \$ dans la machine) et le signal S qui signifie délivrer un sandwich (qui doit être activé dans le cas où on a mis suffisamment d'argent dans le distributeur).

On supposera que deux pièces ne peuvent être introduites simultanément et on considérera aussi qu'il y a toujours suffisamment de monnaie dans la machine. On vous demande de

- Dessiner le diagramme de transition d'états de ce système¹. <8 pts>
 Indice : les trois états du système que l'on devra considérer sont les suivants :
 - État A : il y a 0 \$ dans le distributeur.
 - État B : il y a 1 \$ dans le distributeur.
 - État C : il y a 2 \$ dans le distributeur.
 On choisira les codes binaires suivant pour coder chacun de ces états ($A = 00$, $B = 01$ et $C = 10$).
 Donner ensuite la table d'état de ce système. <2 pts> et préciser le nombre de bascules nécessaires à ce système. <1 pt>
- Établir la table de vérité de ce système. <5 pts>
- Donner les équations logiques (simplifiées au maximum) des signaux de sortie et des états futurs de ce système. <6 pts>.

Réponse

1.

Entrées :

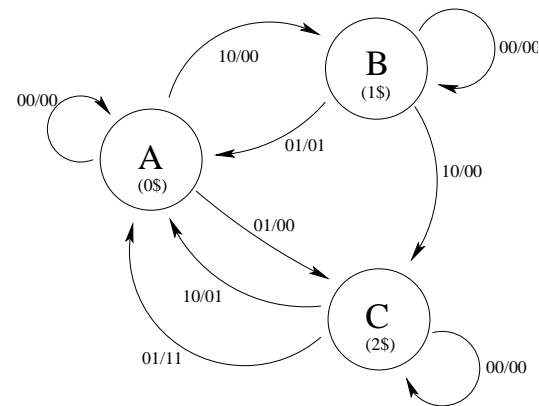
- U : introduction d'une pièce de 1 \$.
- D : introduction d'une pièce de 2 \$.

Sorties :

- R : rendre une pièces de 1 \$.
- S : délivrer un sandwich.

En utilisant sur les flèches de transition d'états, la convention suivante : Entrée/Sortie avec Entrée= $\{U, D\}$ et Sorties= $\{R, S\}$, on obtient le graphe suivant,

Graphe de Transition d'États :



<8 pts>

Table d'États :

¹ On utilisera sur les flèches de transition d'états, la convention suivante Entrée/Sortie, i.e., UD/RS du style 10/00 indiquant que l'on a entré une pièce de 1 \$ dans le distributeur mais qu'en sortie celui ci considère que $R = 0$ et $S = 0$ (on ne rend pas de monnaie et on ne délivre pas de sandwich) ou encore du style 01/01 indiquant que l'on a entré une pièce de 2 \$ dans le distributeur et qu'en sortie le distributeur ne rend aucune monnaie ($R = 0$) mais délivre le sandwich ($S = 1$).

Input Etat present	UD		
	00	10	01
A : 00	A:00 / 00	B :01/ 00	C :10/ 00
B : 01	B :01/ 00	C :10/ 00	A :00/ 01
C : 10	C :10/ 00	A :00/ 01	A :00/ 11

<2 pts>

Il faut donc deux bascules pour coder ces trois états possibles. <1 pt>

2.

Table de Vérité :

$q_1(t)$	$q_0(t)$	U D	$q_1(t+1)$	$q_0(t+1)$	R S
00	00	00	00	00	00
00	00	10	01	00	00
00	00	01	10	00	00
01	00	00	01	00	00
01	00	10	10	00	00
01	00	01	00	01	01
10	00	00	10	00	00
10	00	10	00	01	01
10	00	01	00	11	11

<5 pts>

3.

Équations Logiques :

On trouve, à partir de la table de vérité, les équations suivantes qui sont déjà simplifiées au maximum,

$$S = \bar{q}_1(t) q_0(t) \bar{U} D + q_1(t) \bar{q}_0(t) U \bar{D} + q_1(t) \bar{q}_0(t) \bar{U} D$$

$$R = q_1(t) \bar{q}_0(t) \bar{U} D$$

$$q_0(t+1) = \bar{q}_1(t) q_0(t) \bar{U} \bar{D} + \bar{q}_1(t) \bar{q}_0(t) U \bar{D}$$

$$q_1(t+1) = \bar{q}_1(t) \bar{q}_0(t) \bar{U} D + \bar{q}_1(t) q_0(t) U \bar{D} + q_1(t) \bar{q}_0(t) \bar{U} \bar{D}$$

<6 pts>

Nota : On aurait pu simplifier un peu plus ces expressions si on avait considéré des états indifférents pour les combinaisons des bascules $q_1(t)q_0(t) = 11$ et pour le cas physiquement impossible $UD = 11$. Dans

ce cas un bonus de deux points <2 pts> est offert et on aurait trouvé :

$$S = q_0(t)D + q_1(t)U + q_1(t)D$$

$$R = q_1(t)D$$

$$q_0(t+1) = q_0(t)\overline{U}\overline{D} + \overline{q}_1(t)\overline{q}_0(t)U$$

$$q_1(t+1) = q_1(t)\overline{U}\overline{D} + q_0(t)U + \overline{q}_1(t)\overline{q}_0(t)U$$