



## Résolution numérique des équations différentielles

Rappels:

2 grandes classes:

1. Les équations différentielles ordinaires:  
une seule variable.
2. Les équations aux dérivées partielles:  
plusieurs variables.  
(équation de la chaleur, des ondes, ...)

**Ordre d'une équation différentielle : dérivée la plus élevée.**

Équation différentielle linéaire :

émission radioactive : 
$$\frac{dR(t)}{dt} = -\lambda R(t)$$

Équation différentielle non linéaire :

Variation de population : 
$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t) - bN(t)^{1.7}$$

Convection : 
$$\frac{du(t)}{dt} = -k(u(t) - T)^{\frac{5}{4}}$$

nécessite des conditions initiales.

## Résolution numérique des équations différentielles

Exemple du pendule :

Équation différentielle non linéaire  
du second ordre.

Impossible de trouver une solution analytique.

Pour de petit mouvements :

$$\sin(\theta) \approx \theta$$

Équation du pendule:

t: temps

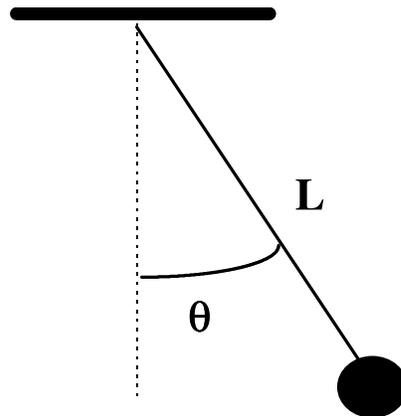
$\theta$ : Position angulaire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0$$

Conditions initiales usuelles:

$$\theta(t_0) = \theta_0$$

$$\theta'(t_0) = \theta'_0$$



## Méthode des séries de Taylor

Ordre 1:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$y(t_0) = y_0$$

Développement de Taylor au voisinage de  $t_j = t_0 + j h$

$$y_{j+1} = y_j + h y'(t_j) + \frac{h^2}{2} y''(t_j) + \frac{h^3}{6} y'''(t_j) + O(h^4)$$

Devient:

$$y_{j+1} = y_j + h f(t_j, y_j) + \frac{h^2}{2} f'(t_j, y_j) + \frac{h^3}{6} f''(t_j, y_j) + O(h^4)$$

### Remarques:

1. L'ordre local est en  $h^4$ .
2. Pas d'estimée de l'erreur.
3. Les dérivées de la fonction  $f(t, y(t))$  se font:

$$\frac{df}{dt} = f'(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f$$

4. Si l'ordre local est en  $h^n$ , **l'ordre global** sera en  $h^{n-1}$ .

Exemple:

Appliquer la méthode de Taylor avec un pas  $h = 0.1$   
et un ordre local en  $h^3$  pour:

$$y'(t) = f(t, y(t)) = -t y^2(t)$$
$$y(t_0) = y_0 = 1$$

$$\text{Solution analytique: } y(t) = \frac{2}{2+t^2}$$

Le pas est  $h = 0.1$ , nous allons calculer les valeurs de  $y(t)$  pour  
 $t = 0, t = 0.1, t = 0.2, \dots$ , etc.

Si nous utilisons un ordre local en  $h^3$ , nous avons:

$$y_{j+1} = y_j + h y'(t_j) + \frac{h^2}{2} y''(t_j) + O(h^3)$$

Exprimons  $y''(t)$

$$y''(t) = f'(t, y(t)) = -y^2(t) + (-t) 2 y(t) y'(t)$$

$$\text{or } y'(t) = f(t, y(t)) = -t y^2(t)$$

$$\text{donc } y''(t) = -y^2(t) + (-t) 2 y(t) (-t y^2(t))$$

$$y''(t) = -y^2(t) + 2 t^2 y^3(t)$$

La formule de Taylor d'ordre local  $h^3$  devient alors:

$$y_{j+1} = y_j + h(-t_j y^2(t_j)) + \frac{h^2}{2}(-y^2(t_j) + 2 t_j^2 y^3(t_j)) + O(h^3)$$

pour  $t_1 = t_0 + h$

$$y_1 = y_0 - h t_0 y^2(t_0) + \frac{0.1^2}{2}(-y^2(t_0) + 2 t_0^2 y^3(t_0))$$

$$y_1 = 1 - 0.005 = 0.995$$

Valeur exacte:  $y(0.1) = \frac{2}{2+0.1^2} = \frac{2}{2.01} \approx 0.99502487\dots$

pour  $t_2 = t_0 + 2h$

$$y_2 = y_1 - h t_1 y^2(t_1) + \frac{h^2}{2}(-y^2(t_1) + 2 t_1^2 y^3(t_1))$$

$$y_2 = 0.995 - 0.1 (0.1(0.995)^2) + \frac{0.1^2}{2}(- (0.995)^2 + 2 \cdot 0.1^2 (0.995)^3)$$

$$y_2 = 0.9802486\dots$$

Valeur exacte:  $y(0.2) = \frac{2}{2+0.2^2} = \frac{2}{2.04} \approx 0.980392156\dots$

pour  $t_3 = t_0 + 3h$

Etc.

**Ordre global  $h^2$ .**

## Méthode d'Euler (ordinaire)

Ordre 1:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

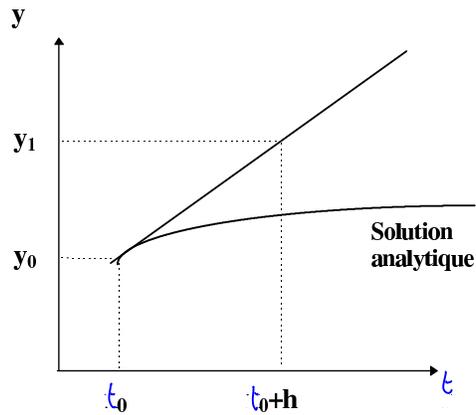
$$y(t_0) = y_0$$

Méthode d'Euler = Méthode de Taylor  
d'ordre local en  $h^2$ .  
Ordre global en  $h$ .

$$y_{j+1} = y_j + h y'(t_j) + O(h^2)$$

$$y_{j+1} = y_j + h f(t_j, y(t_j)) + O(h^2)$$

Interprétation géométrique:



## Erreur globale vs Erreur locale

$Y_n$  = Valeur calculée en  $x_n$ .

$y_n$  = Valeur exacte en  $x_n$ .

$$e_n = y_n - Y_n = \text{erreur en } Y_n; \quad Y_n = y_n + e_n$$

Avec la méthode d'Euler, nous avons:

$$Y_{n+1} = Y_n + h f(x_n, Y_n)$$

En utilisant les séries de Taylor:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \quad \text{avec } x_n \leq \xi_n \leq x_n + h$$

$$e_{n+1} = y_{n+1} - Y_{n+1} = y_n - Y_n + h[f(x_n, y_n) - f(x_n, Y_n)] + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$e_{n+1} = e_n + h \left[ \frac{f(x_n, y_n) - f(x_n, Y_n)}{(y_n - Y_n)} \right] (y_n - Y_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$e_{n+1} = e_n + h f_y(x_n, \eta_n) e_n + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \quad \text{avec } \eta_n \text{ entre } y_n \text{ et } Y_n$$

$$e_{n+1} \leq (1 + hK)e_n + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

## Erreur globale vs Erreur locale (suite)

$$e_0 = 0$$

$$e_1 \leq (1+hK)e_0 + \frac{h^2}{2} y''(\xi_0) = \frac{1}{2} h^2 y''(\xi_0)$$

$$e_2 \leq (1+hK) \left[ \frac{1}{2} h^2 y''(\xi_0) \right] + \frac{h^2}{2} y''(\xi_1) = \frac{1}{2} h^2 \left[ (1+hK) y''(\xi_0) + y''(\xi_1) \right]$$

$$e_3 \leq \frac{1}{2} h^2 \left[ (1+hK)^2 y''(\xi_0) + (1+hK) y''(\xi_1) + y''(\xi_2) \right]$$

...

$$e_n \leq \frac{1}{2} h^2 \left[ (1+hK)^{n-1} y''(\xi_0) + (1+hK)^{n-2} y''(\xi_1) + \dots + 1 y''(\xi_{n-1}) \right]$$

$$e_n \leq \frac{1}{2} h^2 M \left[ (1+hK)^{n-1} + (1+hK)^{n-2} + \dots + 1 \right]$$

Sachant que :

$$1 + s + s^2 + \dots + s^{n-1} = \frac{s^n - 1}{s - 1}$$

Nous obtenons :

$$e_n \leq \frac{1}{2} h^2 M \frac{(1+hK)^n - 1}{(1+hK) - 1} \Leftrightarrow e_n \leq \frac{hM}{2K} (1+hK)^n - \frac{hM}{2K}$$

$$e^{hK} = 1 + hK + \frac{(hK)^2}{2} + \frac{(hK)^3}{3!} + \dots \quad \text{Maclaurin}$$

$$1 + hK < e^{hK} \quad (K > 0)$$

$$e_n \leq \frac{hM}{2K} (e^{hK})^n - \frac{hM}{2K} = \frac{hM}{2K} (e^{nhK} - 1) = \frac{hM}{2K} (e^{(x_n - x_0)K} - 1) = O(h)$$

## Méthode d'Euler modifiée

Taylor d'ordre local en  $h^3$  :

$$y_{j+1} = y_j + h f(t_j, y_j) + \frac{h^2}{2} f'(t_j, y_j) + O(h^3)$$

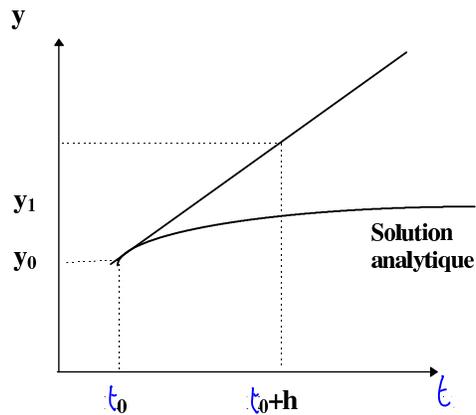
Différence avant pour évaluer  $f'$  :

$$f'(t_j, y_j) = \frac{f(t_{j+1}, y_{j+1}) - f(t_j, y_j)}{h} + O(h)$$

Formule d'Euler modifiée :

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_{j+1})] + O(h^3)$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [y'_j + y'_{j+1}] + O(h^3)$$



**Méthode d'Euler ordinaire**  
Algorithme

$y_0$  donné

$$y_{j+1} = y_j + h f(t_j, y(t_j))$$

Une seule étape de calcul

Ordre global en  $h$ .

---

Méthode d'Euler ordinaire  
Pour résoudre:

$$y'(t) = -t y^2(t)$$

$$y(0) = 1$$

$t_i$	$y_i$	erreur
0.1	1.0000	$-5.0 \cdot 10^{-3}$
0.2	0.9900	$-9.6 \cdot 10^{-3}$
0.3	0.9704	$-1.3 \cdot 10^{-2}$
0.4	0.94215	$-1.6 \cdot 10^{-2}$

**Méthode d'Euler modifiée**  
Algorithme

$y_0$  donné

$$\tilde{y}_{j+1} = y_j + h f(t_j, y(t_j))$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1})]$$

Deux étapes de calcul:

1. la **prédiction**.
2. La **correction**.

Ordre global en  $h^2$ .

---

Méthode d'Euler modifié  
Pour résoudre:

$$y'(t) = -t y^2(t)$$

$$y(0) = 1$$

$t_i$	$y_i$ prédit	$y_i$ corrigé	erreur
0.1	1.000000	0.995000	$2.5 \cdot 10^{-5}$
0.2	0.985100	0.980346	$4.6 \cdot 10^{-5}$
0.3	0.961124	0.956878	$6.0 \cdot 10^{-5}$
0.4	0.929410	0.925868	$6.0 \cdot 10^{-5}$
0.5	0.891579	0.888851	$3.8 \cdot 10^{-5}$
0.6	0.847458	0.847458	$5.2 \cdot 10^{-8}$

**Note:** L'étape de correction peut être répétée 2 à 3 fois, au delà, il est préférable de réduire  $h$ .

---

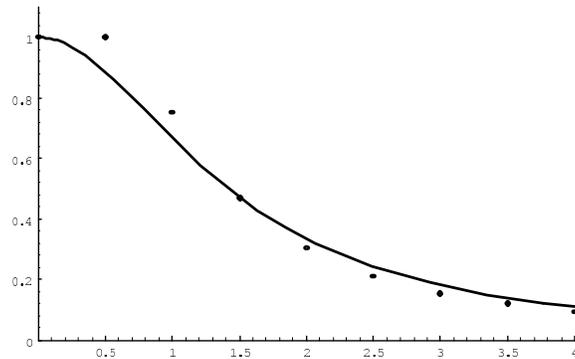
---

### Méthode d'Euler ordinaire

$$y'(t) = -t y^2(t)$$
$$y(0) = 1$$

$h = 0.5$

$t_i$	$y_i$
0	1
0.5	1
1.	0.75
1.5	0.46875
2.	0.303955
2.5	0.211566
3.	0.155616
3.5	0.119291
4.	0.0943882



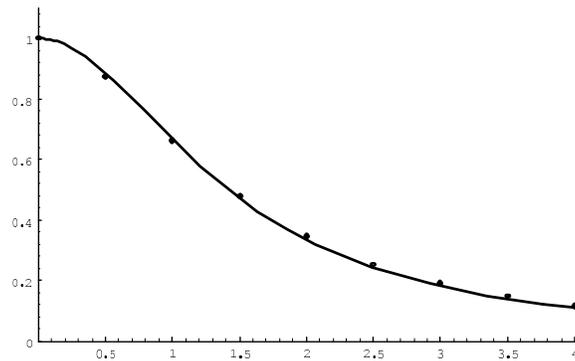
---

---

### Méthode d'Euler Modifié

$h = 0.5$

$t_i$	$y_i$
0	1
0.5	0.875
1.	0.662472
1.5	0.479149
2.	0.345942
2.5	0.254107
3.	0.191201
3.5	0.147512
4.	0.116497



## Méthode de Runge Kutta Développement à l'ordre 2

$y_0$  donné

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_n, y_n) \\ k_2 &= h f(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + a k_1 + b k_2 \end{aligned}$$

Trouver les valeurs de : a, b,  $\alpha$  et  $\beta$ .

Développement de Taylor :

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f'(x_n, y_n) + O(h^3)$$

or

$$\begin{aligned} f'(x_n, y_n) &= (f_x + f_y y')_n \\ &= (f_x + f_y f)_n \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} (f_x + f_y f)_n + O(h^3) \quad (1)$$

Algorithme de Runge Kutta d'ordre 2 :

$$y_{n+1} = y_n + a h f(x_n, y_n) + b h f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h f(x_n, y_n))$$

Développons au premier ordre :

$$f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h f(x_n, y_n)) \cong f_n + (f_x)_n \alpha h + (f_y)_n \beta h f_n$$

$$y_{n+1} = y_n + (a+b)h f_n + h^2 \left\{ (f_x)_n \alpha b + (f_y)_n \beta b f_n \right\} \quad (2)$$

## Méthode de Runge Kutta : développement à l'ordre 2

$y_0$  donné

$$\begin{aligned}k_1 &= h f(x_n, y_n) \\k_2 &= h f(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \\y_{n+1} &= y_n + a k_1 + b k_2\end{aligned}$$

Trouver les valeurs de :  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} (f_x + f_y f)_n + O(h^3) \quad (1)$$

$$y_{n+1} = y_n + (a+b)h f_n + h^2 \{ (f_x)_n \alpha b + (f_y)_n \beta b f_n \} \quad (2)$$

En forçant (1) = (2), nous avons :

$$a + b = 1$$

$$\alpha b = \frac{1}{2}$$

$$\beta b = \frac{1}{2}$$

Ordre local en  $h^3$   
Ordre global en  $h^2$ .

Choix Courants :

$$a = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{1}{2} \text{ et } \alpha = \beta = 1 \rightarrow \text{Type I : Euler modifié}$$

$$a = 0 \rightarrow b = 1 \text{ et } \alpha = \beta = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Type II}$$

$$a = \frac{2}{3} \rightarrow b = \frac{1}{3} \text{ et } \alpha = \beta = \frac{3}{2} \rightarrow \text{Type III}$$

## Méthode de Runge Kutta d'ordre global 2

Le plus courant :

$y_0$  donné

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{3}{2}h, y_n + \frac{3}{2}k_1\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + O(h^3)$$

## Méthode de Runge Kutta d'ordre global 4

Le plus courant :

$y_0$  donné

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 + O(h^5)$$

Les méthodes de Runge Kutta sont très efficaces car :

1. Elles suivent de près la solution analytique.
2. Avec une valeur du pas relativement élevé.
3. Moins coûteux que les autres méthodes pour un  $O(h^n)$  donné.

Pas encore d'approximation de l'erreur commise.

Nécessité de choisir le pas en fonction de l'erreur maximale recherchée.

Solution : calculer avec un pas égal à  $h, h/2, \dots$

Jusqu'à la stabilité de la solution.

**Coût élevé !**

Les méthodes qui ajustent le pas sont dites méthodes à **pas adaptatif**.

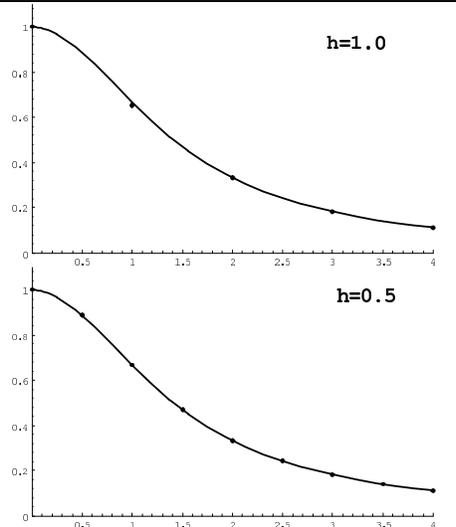
Méthode de Runge Kutta d'ordre global  $h^4$  :

$$y'(t) = -t y^2(t)$$

$$y(0) = 1$$

$$h = 0.1$$

$t_j$	$y_j$	$y_j$ Réel
0	1	1
0.1	0.9950249	0.9950249
0.2	0.9803922	0.9803922
0.3	0.9569377	0.9569378
0.4	0.9259258	0.9259259



**Algorithme de Runge Kutta Merson  
d'ordre global 4 avec estimé de l'erreur.**

$$\begin{aligned}
 y_0 \text{ donné} & & k_1 &= h f(x_n, y_n) \\
 k_2 &= h f\left(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}k_1\right) & k_3 &= h f\left(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2\right) \\
 k_4 &= h f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_3\right) & k_5 &= h f\left(x_n + h, y_n + \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4\right) \\
 \\ 
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5 + O(h^5) \\
 E &\approx \left[ \frac{1}{15}k_1 - \frac{3}{10}k_3 + \frac{4}{15}k_4 - \frac{1}{30}k_5 \right]
 \end{aligned}$$

**Algorithme de Runge Kutta Fehlberg  
d'ordre global 5 avec estimé de l'erreur.**

$$\begin{aligned}
 y_0 \text{ donné} & & k_1 &= h f(x_n, y_n) \\
 k_2 &= h f\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1\right) & k_3 &= h f\left(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \\
 k_4 &= h f\left(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 + \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) \\
 k_5 &= h f\left(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right) \\
 k_6 &= h f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right) \\
 \\ 
 y_{n+1} &= y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5 + O(h^6) \\
 E &\approx \left[ \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \right]
 \end{aligned}$$

Exemple : Algorithme de Runge Kutta Fehlberg  
d'ordre global 5 avec estimé de l'erreur.

$$y'(t) = -t y^2(t)$$
$$y(0) = 1$$

$$h = 0.1$$

$t_i$	$y_i$	Erreur
0	1	0.0
0.1	0.95025	$7.47241 \cdot 10^{-8}$
0.2	0.980392	$1.97673 \cdot 10^{-7}$
0.3	0.956938	$2.75904 \cdot 10^{-7}$
0.4	0.925926	$2.98256 \cdot 10^{-7}$
0.5	0.888889	$2.69385 \cdot 10^{-7}$
0.6	0.847457	$2.01399 \cdot 10^{-7}$

$$y_6 = \underline{0.84745762}$$

Méthode efficace et populaire  
avec contrôle de l'erreur.

### **Méthodes à pas unique**

utilisent seulement le pas précédent :

$$y_n \text{ et } y'_n$$

Exemples :  
Méthodes de Taylor et de Runge Kutta.

### **Méthodes à pas multiples** (multistep methods)

utilisent plusieurs pas précédents :

$$y_n \text{ et } y'_n \\ \text{et aussi } y_{n-1} \text{ et } y'_{n-1}$$

( $y_{n-2}$  et  $y'_{n-2}$  possible)

---

### **Méthodes ouvertes**

n'utilisent que les valeurs précédentes

$$y_n, y_{n-1}, y_{n-2} \dots$$

### **Méthodes fermées**

(de type prédiction correction)

utilisent autant les valeurs précédentes

$$y_n, y_{n-1}, y_{n-2} \dots$$

que les valeurs suivantes

$$y_{n+1}, y_{n+2} \dots$$

Exemple : méthode d'Euler modifiée.

## Méthode d'Adams

Équations différentielles sous la forme

$$dy = f(x, y) dx$$

à intégrer sur  $[x_n, x_{n+1}]$  :

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} dy = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx$$

remplacer la fonction  $f(x, y(x))$   
par un polynôme de collocation :  $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$

Polynôme quadratique de Newton Grégory **a**scendant :

$$P_2(s) = f_n + s\Delta f_{n-1} + \frac{s(s+1)}{2}\Delta^2 f_{n-2} + \frac{s(s+1)(s+2)}{6}h^3 f'''(\xi)$$

Calcul des intégrales :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \left[ f_n + \frac{1}{2}\Delta f_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{n-2} \right] + O(h^4) \\ &= y_n + \frac{h}{12} [23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}] + O(h^4) \end{aligned}$$

Note :

Le résultat sera **d'ordre local n+2** pour un polynôme de degré **n**.  
Attention : Degré trop élevé  $\Rightarrow$  erreurs d'arrondis.

## Méthodes d'Adams

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + h \left[ f_n + \frac{1}{2} \Delta f_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 f_{n-2} \right] + O(h^4) \\ &= y_n + \frac{h}{12} [23 f_n - 16 f_{n-1} + 5 f_{n-2}] + O(h^4)\end{aligned}$$

Remarques :

1. Pour démarrer, les valeurs de  $y'_0$ ,  $y'_1$  et  $y'_2$  (donc  $f_0$ ,  $f_1$ , et  $f_2$ ) sont nécessaires.  
Amorçage : méthode de Runge Kutta.
2. Pas question d'adapter le pas directement.
3. Problème : extrapolation avec le polynôme de collocation ; moins précis qu'interpolation.

Adams (ordre local en  $h^3$ )

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [3 f_n - f_{n-1}] + O(h^3)$$

Adams (ordre local en  $h^5$ )

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}] + O(h^5)$$

## Méthodes d'Adams Moulton (prédiction correction)

2 étapes :

1. une étape de **prédiction**  
où nous extrapolons  
 $\Rightarrow$  approximation de  $y_{n+1}$

2. une étape de **correction**  
où nous interpolons  
pour trouver  $y_{n+1}$  en se servant de  $f_{n+1}$   
tel que prédit par la première étape.

Méthode d'Adams Moulton  
(d'ordre local en  $h^4$ )

$y_0, y_1, y_2$  donnés

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} [23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}] + O(h^4)$$

Calcul de  $\tilde{f}_{n+1} = f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} [5\tilde{f}_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}] + O(h^4)$$

## Méthodes d'Adams Moulton

Remarques :

1. Le correcteur : même ordre que prédicteur, mais précision plus grande.
2. La valeur exacte entre le prédicteur et le correcteur.
3. Deux évaluations de la fonction  $f$  à chaque étape (comparée à 4 pour Runge Kutta du même ordre).
4. Pour amorcer : Runge Kutta du même ordre.

## Méthodes d'Adams Moulton (d'ordre local $h^5$ )

$y_0, y_1, y_2, y_3$  donnés

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}] + \frac{251}{720} h^5 y''(\xi)$$

Calcul de  $\tilde{f}_{n+1} = f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [9\tilde{f}_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}] - \frac{19}{720} h^5 y''(\xi)$$

Méthode d'Adams Moulton  
Mesure de la précision

$$y_{exact} \approx y_{corrige} - \frac{19}{270}(y_{corrige} - y_{predit})$$

N décimales exactes lorsque :

$$\left| y_{corrige} - y_{predit} \right| 10^N \leq 14.2$$

L'erreur globale est stable donc pas de divergence.

Comparaison des méthode pour résoudre :

$$y'(t) = -t y^2(t)$$

$$y(0) = 1$$

Méthode	t <sub>1</sub> = 0.1	t <sub>2</sub> = 0.2
Solution analytique	0.995025	0.980392
Euler O(h <sup>2</sup> )	1.000000	0.990000
Taylor O(h <sup>3</sup> )	0.995000	0.980248
Taylor O(h <sup>4</sup> )	0.995000	0.980346
Euler Modifié O(h <sup>3</sup> )	0.995000	0.980346
RK type II O(h <sup>3</sup> )	0.995000	0.980297
RK type III O(h <sup>3</sup> )	0.995000	0.980394
RK O(h <sup>5</sup> )	0.995025	0.980392
Adams Moulton	0.995025	0.980392

$$y_{exact} = y_{predit} + \frac{251}{720} h^5 y^v(\xi)$$

$$y_{exact} = y_{corrige} - \frac{19}{720} h^5 y^v(\xi)$$

$$0 = y_{predit} - y_{corrige} + \frac{270}{720} h^5 y^v(\xi)$$

$$h^5 y^v(\xi) = \frac{720}{270} (y_{corrige} - y_{predit})$$

Donc

$$y_{exact} = y_{corrige} - \frac{19}{720} \frac{720}{270} (y_{corrige} - y_{predit})$$

$$y_{exact} = y_{corrige} - \frac{19}{270} (y_{corrige} - y_{predit})$$

## Résoudre un système d'équations différentielles du premier ordre:

Exemple:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy + t \\ \frac{dy}{dt} = ty + x \end{cases} \quad \text{Conditions initiales:} \\ x(0) = 1 \text{ et } y(0) = -1$$

Méthode de Taylor avec ordre local en  $h^4$ :

$$x_{j+1} = x_j + h x'(t_j) + \frac{h^2}{2} x''(t_j) + \frac{h^3}{6} x'''(t_j) + O(h^4)$$

$$y_{j+1} = y_j + h y'(t_j) + \frac{h^2}{2} y''(t_j) + \frac{h^3}{6} y'''(t_j) + O(h^4)$$

$$\begin{cases} x' = xy + t \\ y' = ty + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = xy' + x'y + 1 \\ y'' = y + ty' + x' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''' = x'y' + xy'' + x''y + x'y' \\ y''' = y' + y' + ty'' + x'' \end{cases}$$

Euler modifié

$$\begin{cases} \tilde{x}_{j+1} = x_j + h f(t_j, x(t_j), y(t_j)) \\ \tilde{y}_{j+1} = y_j + h g(t_j, y(t_j), x(t_j)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j + \frac{h}{2} [f(t_j, x_j, y_j) + f(t_{j+1}, \tilde{x}_{j+1}, \tilde{y}_{j+1})] \\ y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [g(t_j, y_j, x_j) + g(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1}, \tilde{x}_{j+1})] \end{cases}$$

---

Exemple:  $\begin{cases} x' = xy + t \\ y' = ty + x \end{cases}$  Conditions initiales:  $x(0) = 1$  et  $y(0) = -1$

$h = 0.1$

Prédiction:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_0 + h f(t_0, x_0, y_0) = 1 + 0.1[(1)(-1) + 0] = 0.9 \\ \tilde{y}_1 = y_0 + h g(t_0, y_0, x_0) = -1 + 0.1[(0)(-1) + 1] = -0.9 \end{cases}$$

Correction:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{h}{2} [f(t_0, x_0, y_0) + f(t_1, \tilde{x}_1, \tilde{y}_1)] = 1 + \frac{0.1}{2} (-1 + [0.9(-0.9) + 0.1]) \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [g(t_0, y_0, x_0) + g(t_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}_1)] = -1 + \frac{0.1}{2} (1 + [0.1(-0.9) + 0.9145]) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0.9145 \\ y_1 = -0.9088 \end{cases}$$

## Équation différentielles d'ordre supérieur

Ordre n :

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

Conditions initiales :

$$y^{(k)}(t_0) = y_0^{(k)} \text{ donnés pour } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Remarque :

Il est rarement possible de trouver une solution analytique.

Équation du pendule:  
(pour de petits mouvements)

t: temps

$\theta$ : Position angulaire

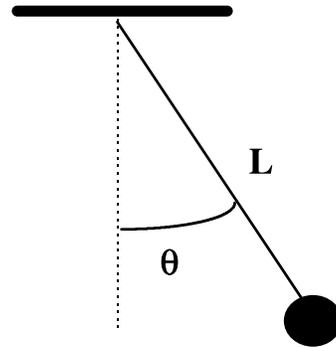
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Conditions initiales usuelles:

$$\theta(t_0) = \theta_0$$

$$\theta'(t_0) = \theta'_0$$

$$\theta'(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) + \sqrt{\frac{L}{g}} \theta'_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)$$



## Transformation d'une équation différentielle d'ordre 2 en un système d'ordre 1 :

Ordre 2 :

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

Conditions initiales :

$$y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y'_0$$

**En posant :**  $x(t) = y'(t)$

Système équivalent :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, y(t), x(t)) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

avec conditions initiales :  $y(t_0) = y_0$  et  $x(t_0) = y'_0$

Remarque:

Il est **toujours possible** de transformer  
une équation différentielle d'ordre n  
en un **système** d'équations différentielles d'ordre 1.

Équation différentielle d'ordre n:

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

Conditions initiales :

$$y^{(k)}(t_0) = y_0^{(k)} \text{ donnés pour } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

En posant:  $x_k(t) = y^{(k)}(t)$  pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Nous obtenons un système de n équations d'ordre 1:

$$\begin{cases} x_0'(t) = x_1(t) \\ x_1'(t) = x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-2}'(t) = x_{n-1}(t) \\ x_{n-1}'(t) = f(t, x_0(t), x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)) \\ \quad = y^{(n)}(t) \end{cases}$$

Avec conditions initiales:

$$x_k(t_0) = y_0^{(k)} \text{ pour } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Exemple: Résoudre

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

Conditions initiales:  
 $x(0) = 0.5$  et  $x'(0) = 0$

Mise sous la  
forme de  
système:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = (1-x^2)y - x \end{cases}$$

Conditions initiales:  
 $x(0) = 0.5$   
et  $y(0) = x'(0) = 0$

**Euler** avec  $h = 0.1$

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j + h f(t_j, x(t_j), x'(t_j)) \\ y_{j+1} = y_j + h g(t_j, y(t_j), y'(t_j)) \end{cases}$$

Ici  $j = 0$ :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h y_0 \\ y_1 = y_0 + h [(1-x_0^2)y_0 - x_0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0.5 + (0.1)(0) \\ y_1 = 0 + (0.1)[(1-0.25)0 - 0.5] \end{cases}$$

Calculer  $x''(0)$  et  $x''(0.1)$

$$x''(0) = (1-x_0^2)y_0 - x_0$$

$$x''(0.1) = (1-x_1^2)y_1 - x_1$$

## Méthodes d'Adams Moulton d'ordre global 4 Pour les systèmes d'ordre 2.

- $x_0, x_1, x_2, x_3$  donnés  
et  $y_0, y_1, y_2, y_3$  donnés

- Calcul des prédicteurs :

$$\tilde{x}_{n+1} = x_n + \frac{h}{24} [55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}] + O(h^5)$$

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [55g_n - 59g_{n-1} + 37g_{n-2} - 9g_{n-3}] + O(h^5)$$

- Nouveaux estimés de la fonction :

$$\tilde{f}_{n+1} = f(t_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$$

$$\tilde{g}_{n+1} = g(t_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$$

- Calcul des correcteurs :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24} [9\tilde{f}_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}] + O(h^5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [9\tilde{g}_{n+1} + 19g_n - 5g_{n-1} + g_{n-2}] + O(h^5)$$

Correcteur : même ordre que le prédicteur.  
Valeur exacte entre le prédicteur et le correcteur.

Exemple :

Soit le système :

$$\begin{cases} x' = xy + t \\ y' = ty + x \end{cases} \quad \text{avec pour conditions initiales : } \begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{matrix}$$

	t	x	x'	t	y	y'
Valeurs	0.0	1.0	-1.0	0.0	-1.0	1.0
de	0.025	0.9759	-0.9271	0.025	-0.9756	0.9515
départ	0.050	0.9536	-0.8582	0.050	-0.9524	0.9060
	0.075	0.9330	-0.7929	0.075	-0.9303	0.8632
Prédiction	0.10			0.10		
Correction						

- Calcul des prédicteurs :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(0.1) &= x_{0.075} + \frac{0.025}{24} [55f_{0.075} - 59f_{0.05} + 37f_{0.025} - 9f_0] \\ &= 0.9330 + \frac{0.025}{24} [55(-0.7929) - 59(-0.8582) + 37(-0.9271) - 9(-1)] \\ &= 0.91396 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}(0.1) &= -0.9303 + \frac{0.025}{24} [55(0.8632) - 59(0.9060) + 37(0.9515) - 9(1.0)] \\ &= -0.9092296875 \end{aligned}$$

- Nouveaux estimés de la fonction :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n+1} &= f(t_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) = 0.91396(-0.9092296) + 0.1 = -0.7309995 \\ \tilde{g}_{n+1} &= g(t_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) = 0.1(-0.9092296) + 0.91396 = 0.823037 \end{aligned}$$

- Calcul des correcteurs :

$$\begin{aligned} x(0.1) &= 0.9330 + \frac{0.025}{24} [9(-0.7309995) + 19(-0.7929) - 5(-0.8582) + (-0.9271)] = 0.9139581 \\ y(0.1) &= -0.9303 + \frac{0.025}{24} [9(0.823037) + 19(0.8632) - 5(0.906) + 0.9515] = -0.9092274 \\ x(0.1) &= \underline{0.9139581} \\ y(0.1) &= \underline{-0.9092274} \end{aligned}$$

## Comparaison des méthodes pour les équations différentielles

	Euler Modifié	Runge Kutta d'ordre 4	Adams Moulton
Type de méthode	Pas unique	Pas unique	Pas multiple
Erreur locale	$O(h^3)$	$O(h^5)$	$O(h^5)$
Erreur globale	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^4)$
nb d'évaluation de fonction	2	4	2
Stabilité	bonne	bonne	bonne
Facilité pour changer le pas	oui	oui	non
<b>Recommandée</b>	<b>NON</b>	<b>OUI</b>	<b>OUI</b>

**Ift 2421**

## **Chapitre 6**

Résolution  
des équations  
différentielles:

Conditions limites

## Problèmes aux limites

Équation différentielle d'ordre 2

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

Avec les 2 conditions limites :

$$y(t_0) = y_0 \text{ et } y(t_1) = y_1$$

Type différent de celles données  
avec des conditions initiales.

Les méthodes vues précédemment ne s'appliquent pas  
car nous ne connaissons pas  $y'(t_0)$

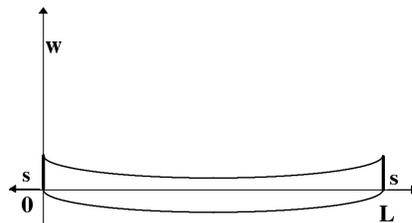
Exemple :  
Déformation d'une poutre :

$w(x)$  : déformation en  
fonction de l'abscisse  $x$ .

$q$  : charge uniforme.  
 $E$  : Coefficient d'élasticité.  
 $L$  : longueur de la poutre.  
 $S$  : tension aux limites.  
 $I$  : moment central d'inertie.

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{EI} w + \frac{qx}{2EI} (x - L)$$

Avec les conditions limites  
 $w(0) = w(L) = 0$



## Problèmes linéaires aux limites

Pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2  
ou d'un autre ordre tant qu'elle est linéaire *en y*

$$y''(t) = H(t) + G(t)y(t) + F(t)y'(t) \quad (1)$$

Nous avons :

### Théorème :

Si  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  sont deux solutions de (1)

alors

$$y_3(t) = \alpha y_1(t) + (1 - \alpha)y_2(t)$$

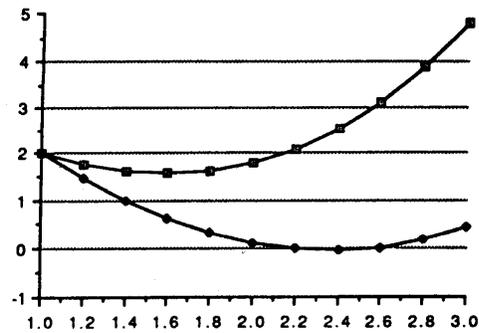
est aussi solution de (1).

Le théorème pour des  
équations différentielles  
**linéaires seulement.**

Cas homogène :

Où  $H = 0$ , nous acceptons  
toute combinaison linéaire :

Pour tout  $\alpha$  et  $\beta$ ,  
 $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$   
est aussi solution de (1).



## Méthode de tir

Problème linéaire à résoudre

$$x''(t) = t + (1 - 0.2 t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites (frontières) :

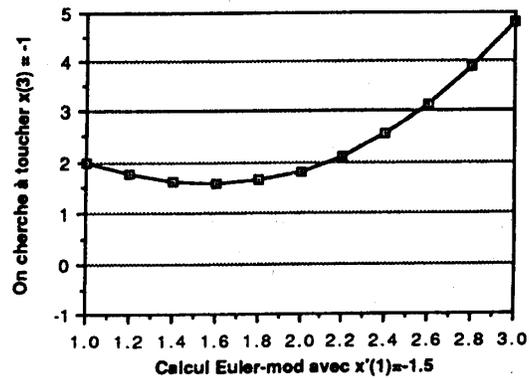
$$x(1) = 2 \text{ et } x(3) = -1$$

On essaie un premier tir en remplaçant  
par les conditions initiales :

$$x_1(1) = 2$$

$$x'_1(1) = -1.5$$

**Premier tir:**



Raté : nous trouvons  $x_1(3) = 4.811$

## Méthode de tir

Problème linéaire à résoudre

$$x''(t) = t + (1 - 0.2 t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites (frontières) :

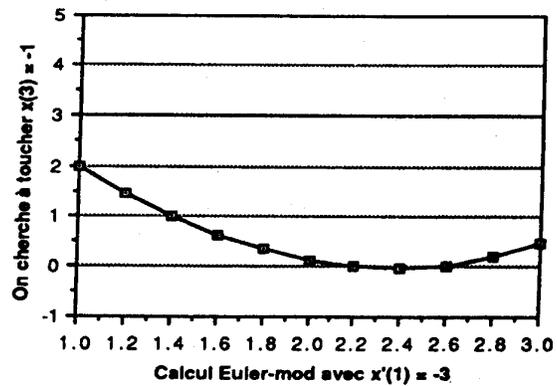
$$x(1) = 2 \text{ et } x(3) = -1$$

On essaie un deuxième tir en remplaçant  
par les conditions initiales :

$$x_2(1) = 2$$

$$x'_2(1) = -3$$

Deuxième tir:



Encore raté : nous trouvons  $x_2(3) = 0.453$

## Combinaison des tirs

Mais nous avons :

$$x_3(t) = \alpha x_1(t) + (1 - \alpha)x_2(t)$$

qui sera aussi une solution.

de

$$x''(t) = t + (1 - 0.2 t)x(t)$$

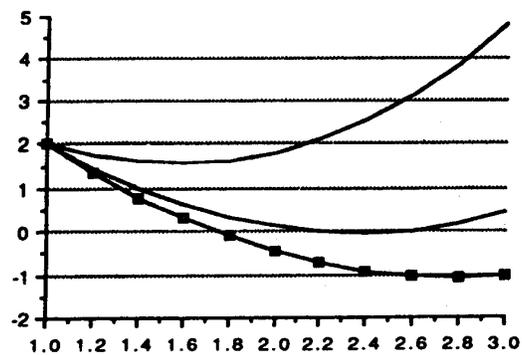
Il faut donc déterminer  $\alpha$  pour avoir  $x_3(3) = -1$ .

$$\begin{aligned}x_3(3) &= \alpha x_1(3) + (1 - \alpha)x_2(3) \\ -1 &= \alpha(4.811) + (1 - \alpha)(0.453)\end{aligned}$$

$$\alpha = -0.3334$$

Solution en tout point :

$$x_3(t) = -0.3334 x_1(t) + 1.3334 x_2(t)$$



## Combinaison des tirs

Notes :

1. Problèmes linéaires du second ordre convergent en 2 tirs.
2. Ordre plus élevé : la méthode fonctionne aussi.
3. Ordre global et précision de la méthode employée pour les conditions initiales.
4. Peu généralisables en 2D et 3D, peu utilisée en pratique.

Problème linéaire à résoudre

$$x''(t) = t + (1 - 0.2 t)x(t)$$

t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
<b>1.0</b>	2.000	2.000	2.000
1.2	1.751	1.449	1.348
1.4	1.605	0.991	0.786
1.6	1.561	0.619	0.305
1.8	1.625	0.328	-0.105
2.0	1.803	0.118	-0.444
2.2	2.105	-0.007	-0.711
2.4	2.542	-0.045	-0.908
2.6	3.128	0.013	-1.026
2.8	3.880	0.175	-1.061
<b>3.0</b>	<b>4.811</b>	<b>0.453</b>	<b>-1.000</b>

## Pour les équations non linéaires :

- Convergence de la méthode de tir comme une méthode de point fixe.  
 $X(3)=f(x'(1))$
- peu de chance que l'interpolation linéaire procure la solution exacte.
- Sert à estimer la prochaine pente.

Problème non linéaire à résoudre

$$x''(t) = t + (1 - 0.2 t)x(t)x'(t)$$

avec CL :  $x(1)=2$  et  $x(3)=-1$

Valeur assumée pour $x'(1)$	valeur Calculée pour $x(3)$
-1.5	-0.016
-3.0	-2.085
-2.213*	-1.271
-2.0	-0.972
-1.8	-0.642
-2.017*	-0.998
-2.01	-0.987
-2.02	-1.002
-2.018*	-1.000

\*valeur obtenue par interpolation linéaire.

## Méthodes des différences finies

2 étapes :

1. Étape de discrétisation :

- Diviser l'intervalle en sous intervalle de longueur  $h$ .
- Dérivées approchées par des formules de différence.

2. Résolution du système discrétisé :

- Systèmes linéaires pour des équations différentielles linéaires et systèmes non linéaires pour des équations différentielles non linéaires.
- Propriétés mathématiques des matrices obtenues par discrétisation (matrices tridiagonales, ou symétriques, ou définies positives).

---

Problème linéaire à résoudre

$$x''(t) = t + (1 - 0.2 t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites (frontières) :

$$x(1) = 2 \text{ et } x(3) = -1$$

Différences centrées :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h} + O(h^2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Substituer ces formules dans l'équation différentielle et choisir un pas.

## Méthodes des différences finies

### Étape de discrétisation

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} = t_i + (1 - 0.2t_i)x_i$$

Pour  $i = 2, \dots, n-1$

avec  $t_i = t_1 + (i-1)h$  et  $x_i = x(t_i)$

Nous avons:  $t_1=1$  et  $x_1=2$                        $t_n=3$  et  $x_n=-1$

Précision de l'approximation:

- Valeur du pas  $h$
- Type de différences utilisées.

$$x_{i-1} - [2 + h^2(1 - 0.2t_i)]x_i + x_{i+1} = h^2 t_i$$

Remarque:

Ici:  $O(h^2)$

Appliquer la technique d'extrapolation de Richardson.

Calculer une solution  $x_i^{(1)}$  avec un pas  $h$ .

Calculer une solution  $x_{2i+1}^{(2)}$  avec un pas  $2h$ .

Ensuite grâce à l'extrapolation de Richardson, calculer une nouvelle solution.

$$x_{2i+1}^{(extrapolation)} = x_{2i+1}^{(4)} + \frac{1}{3}(x_{2i+1}^{(4)} - x_{2i+1}^{(2)})$$

## Méthodes des différences finies

Pour  $i = 2, \dots, n-1$

$$x_{i-1} - [2 + h^2(1 - 0.2t_i)]x_i + x_{i+1} = h^2t_i$$

Nous avons:  $t_1=1$  et  $x_1=2$ ,  $t_n=3$  et  $x_n=-1$

Considérons  $h = 0.5$  :

$$x_1 - [2 + h^2(1 - 0.2t_2)]x_2 + x_3 = h^2t_2$$

$$x_2 - [2 + h^2(1 - 0.2t_3)]x_3 + x_4 = h^2t_3$$

$$x_3 - [2 + h^2(1 - 0.2t_4)]x_4 + x_5 = h^2t_4$$

$$\begin{bmatrix} -2.175 & 1 & 0 \\ 1 & -2.150 & 1 \\ 0 & 1 & -2.125 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.625 \\ 0.500 \\ 1.625 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 0.552$$

$$x_3 = -0.424$$

$$x_4 = -0.964$$

$$x_5 = -1$$

$$x''(t) = t + (1 - 0.2t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites :  $x(1) = 2$  et  $x(3) = -1$

Pour  $h=0.2$  :

$$\begin{bmatrix} -2.0304 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2.0288 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2.0272 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2.0256 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2.0240 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.0224 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.0208 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.0192 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.0176 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} -1.952 \\ 0.056 \\ 0.064 \\ 0.072 \\ 0.080 \\ 0.088 \\ 0.096 \\ 0.104 \\ 1.112 \end{bmatrix}$$

Note: le système est tridiagonal.

Résultats:

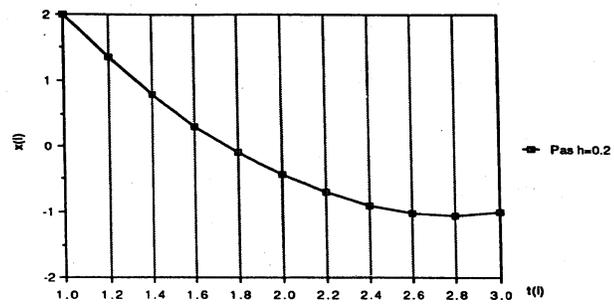
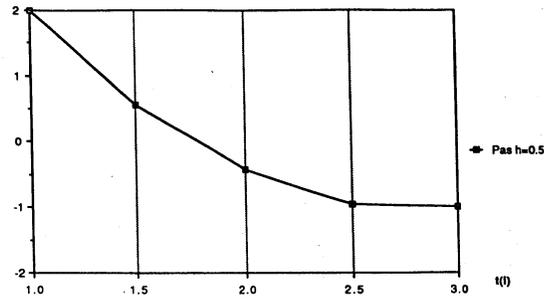
<b>t</b>	<b>Méthode des différences finies</b>	<b>Méthode de tir</b>
1.0	2.000	2.000
1.2	1.351	1.348
1.4	0.792	0.787
1.6	0.311	0.305
1.8	-0.097	-0.104
2.0	-0.436	-0.443
2.2	-0.705	-0.712
2.4	-0.903	-0.908
2.6	-1.022	-1.026
2.8	-1.058	-1.060
3.0	-1.000	-1.000

## Méthodes des différences finies

$$x''(t) = t + (1 - 0.2t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites (frontières) :

$$x(1) = 2 \text{ et } x(3) = -1$$



**Conditions limites sur les dérivées.  
Méthode de tir.**

$$x''(t) = t + (1 - 0.2 t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites :

$$x'(1) = 0 \text{ et } x'(3) = -1$$

Essais sur la valeur de  $x(1)$ :

On essaie 2 tirs en remplaçant par les conditions initiales:

$$\text{Premier tir: } x_1(1) = 2 \text{ et } x_1'(1) = 0$$

$$\text{Deuxième tir: } x_2(1) = 8 \text{ et } x_2'(1) = 0$$

Combiner les 2 solutions avec  $x_1'(3)$  et  $x_2'(3)$

$x_1'(3)$  et  $x_2'(3)$  sont estimées avec la formules des différences divisées.

**Conditions limites sur les dérivées.  
Méthode des différences finies.**

$$x''(t) = t + (1 - 0.2 t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites :

$$x'(1) = 0 \text{ et } x'(3) = -1$$

Se discrétise en :

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} = t_i + (1 - 0.2t_i)x_i$$

$$x_{i-1} - [2 + h^2(1 - 0.2t_i)]x_i + x_{i+1} = h^2 t_i$$

Mais maintenant, cela est valable pour  $i = 1, \dots, n$ .

Nous rajoutons 2 points :  $(t_0, x_0)$  et  $(t_{n+1}, x_{n+1})$   
tels que:

$$x_2 - x_0 = 2h x'(t_1)$$

$$x_{n+1} - x_{n-1} = 2h x'(t_n)$$

**Remarque:**

Nous connaissons les dérivées aux limites

$$x'(1) = 0 \text{ et } x'(3) = -1$$

Exemple:

$$x''(t) = t + (1 - 0.2t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites :  $x'(1) = 0$  et  $x'(3) = -1$

Considérons  $h = 0.5$  :

$$x_1 - [2 + h^2(1 - 0.2t_2)]x_2 + x_3 = h^2t_2$$

$$x_2 - [2 + h^2(1 - 0.2t_3)]x_3 + x_4 = h^2t_3$$

$$x_3 - [2 + h^2(1 - 0.2t_4)]x_4 + x_5 = h^2t_4$$

$$x_2 - x_0 = 2h x'(t_1)$$

$$x_6 - x_4 = 2h x'(t_5)$$

$$\begin{bmatrix} -2.2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2.175 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2.15 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2.125 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.250 \\ 0.375 \\ 0.500 \\ 0.625 \\ 1.750 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -3.4795 \\ x_2 &= -3.70245 \\ x_3 &= -4.19833 \\ x_4 &= -4.82395 \\ x_5 &= -5.42757 \end{aligned}$$