



DIRO
IFT 2425

INTRODUCTION AUX ALGORITHMES NUMÉRIQUES ADDENDUM

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Chap. I : Chiffres Sign. & Prop. d'Erreurs

CHIFFRES SIGNIFICATIFS (COMPLEMENT)

Exercice

$$X^* = \underline{4085.6}$$

Intervalle de confiance, erreur absolue & relative ?

Convention

$$X^* = 0.000278\underline{0}$$

7 cse dans X^* (*i.e.*, après la virgule) ou 8 cse en tout

$$X^* = 0.278\underline{0} \times 10^{-3}$$

4 cse dans la mantisse (notation flottante)

$$X^* = 3.000278\underline{0}$$

8 cse (*en tout*)

Chap. I : Chiffres Sign. & Prop. d'Erreurs ERREURS D'ARRONDIS (EXEMPLE)

Défaillance du missile US patriote

Le 25/02/1991, durant la guerre du golf, un missile patriote US à Dharan manque un scud Iraquien et frappe une caserne US tuant 28 soldats et blessant une centaine d'autres.



► La cause de ce problème fut une erreur d'estimation du temps écoulé depuis la mise en tension de l'ordinateur du missile (100 heures), causée par une simple erreur d'affectation.

Tps de l'horloge interne est mesuré en dixième de secondes puis multiplié par la valeur $1/10 = 1/2^4 + 1/2^5 + 1/2^8 + 1/2^9 + \dots = (0.00110011001\dots)_2$ (stocké dans un registre de 24 bits).

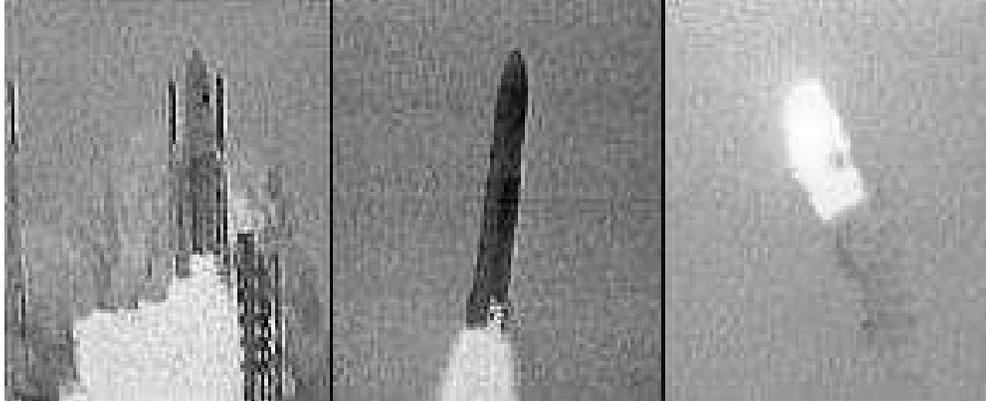
► introduit une erreur de $\epsilon = (0. - 23 \times 0 - 11001100\dots)_2$ ou $(0.000000095)_{10}$. Soit une erreur totale $= \epsilon \times 100 \times 60 \times 60 \times 10 = 0.34$ secondes.

Cf. Page Web du Cours (Rubriques : Interesting Links)

Chap. I : Chiffres Sign. & Prop. d'Erreurs ERREURS D'OVERFLOW (EXEMPLE)

L'explosion de la fusée Ariane 5 juste après son décollage le 04/06/1996 est la conséquence d'un simple overflow.

Explosion d'Ariane 5



► La cause de la défaillance venait d'une erreur logicielle dans le système de référence inertielle. Plus précisément un nombre flottant de 64 bits (> 32768) lié à la vitesse horizontale de la fusée fut convertit en 16 bits.

Chap. II : Résol. d'Éqs Non-Linéaires

CONDITION DE CONVERGENCE DU POINT FIXE

Méthode de Newton / du point fixe ► $x_n = g(x_{n-1})$

L'erreur d'estimation à l'itération n est ► $\varepsilon = |x_n - r|$

$$\begin{aligned}(x_n - r) &= \frac{g(x_{n-1}) - g(r)}{(x_{n-1} - r)} (x_{n-1} - r) \\ &= g'(\xi) (x_{n-1} - r)\end{aligned}$$

avec $\xi \in J$ (J est un interval contenant x_0, x_1, \dots, x_n)

Si g est continue sur $J = [a, b]$

$$\exists \xi \in J \quad \text{tq} \quad \frac{g(b) - g(a)}{(b - a)} = g'(\xi)$$

En posant $K = |g'(\xi)|$

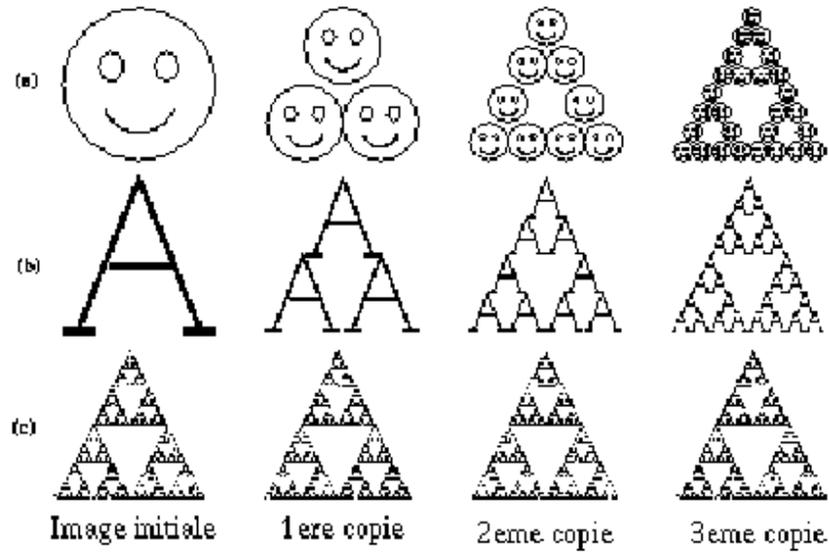
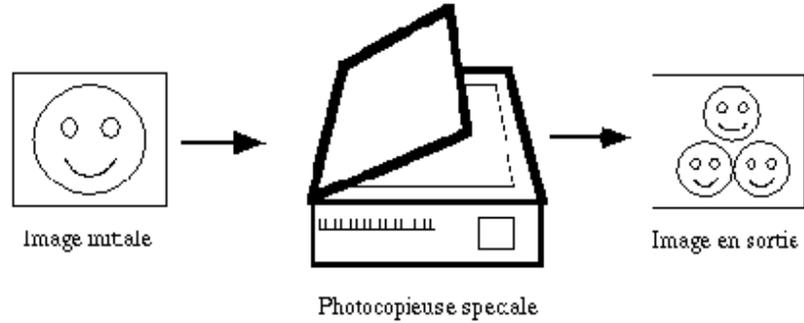
$$\begin{aligned}|x_n - r| &= K |x_{n-1} - r| \\ &= K^2 |x_{n-2} - r| \\ &= \dots \\ &= K^n |x_0 - r| \\ &\leq K^n (b - a)\end{aligned}$$

Convergence si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$, cad ssi $|g'(\xi)| < 1$ ($\forall \xi \in J$)

Convergence d'autant plus rapide que $K < 1$

Chap. II : Résol. d'Éqs Non-Linéaires APPLICATION DES POINTS FIXES

Génération d'images fractales



Les trois premières copies générées par la photocopieuse pour différentes images d'entrée

- Toute les copies convergent vers la même image finale, que l'on appelle l'attracteur

Chap. II : Résol. d'Éqs Non-Linéaires

COMPRESSION FRACTALE (2)

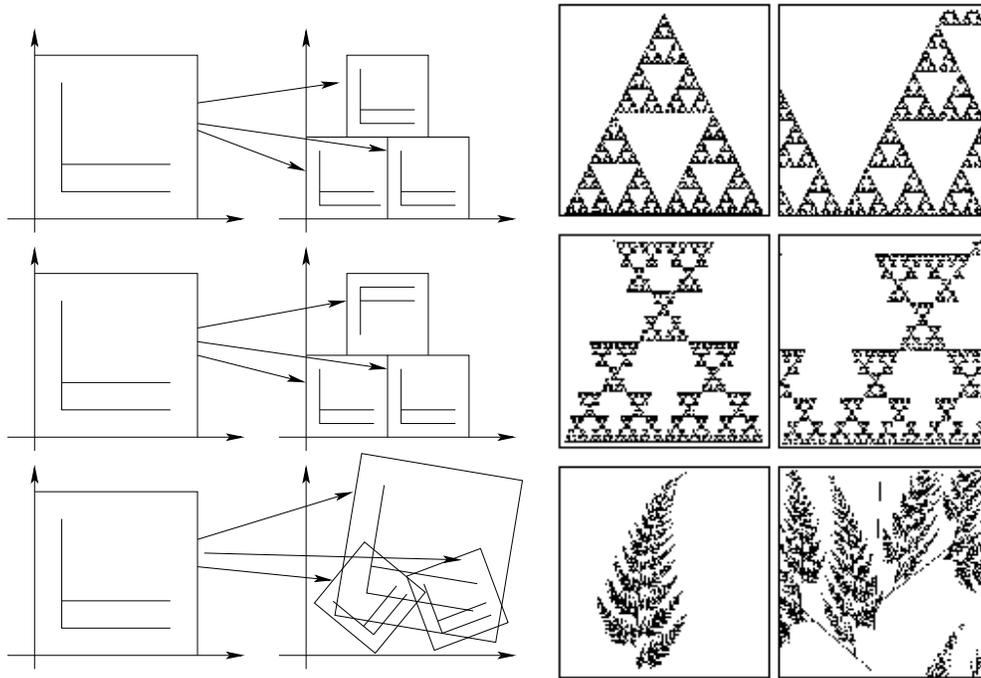
Résultat final ► dépend uniquement de la manière dont l'image d'entrée est transformée



Résultat final peut être décrit par un ensemble de transformations affines du type

$$w_i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$$

Condition Nécessaire : transformation contractante (i.e., 1 transformation donnée appliquée à 2 points de l'image initiale les rapproche l'un de l'autre dans la copie)



Des transformations, leurs attracteurs et un agrandissement de ceux-ci

Chap. II : Résol. d'Éqs Non-Linéaires

COMPRESSION FRACTALE (3)

Chaque image est formée de copies transformées (et réduites) d'elle-même et donc doit avoir des détails à toute les échelles ► image fractale

Principe de la compression fractale

Consiste à stocker les paramètres de la transformation donnant l'image finale considérée comme étant un attracteur (M. Barnsley)

Compression fractale d'images réelles

L'image d'un visage n'est pas fractales ou pas exactement auto-similaire, par contre ...



Exemple de régions qui sont similaires à différentes échelles



L'image est formée de copies convenablement transformée de parties d'elle-même



Compression d'une image quelconque : stockage des déformations permettant de générer cette image

Chap. II : Résol. d'Éqs Non-Linéaires COMPRESSION FRACTALE (4)

Exemple

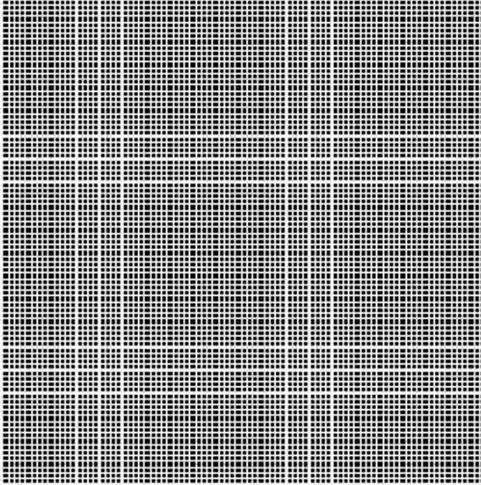


Image originale, première, seconde et dixième
itération de la décompression fractale

Chap. III : Résol. Syst. d'Éq. Linéaires

CRAMER

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}}$$

Chap. III : Résol. Syst. d'Éq. Linéaires

CALCUL DE DÉTERMINANT ?

Super Calculateur 2004



Earth Simulator (ES)

Installé au Japon a l'Agence spatiale japonaise NASDA (2004)

- 5120 CPUs (640 x 8) NEC 500 Mhz
- Puissance de calcul : 41 TeraFlops (8 GFlops par CPU)
- Mémoire de 2 Giga Octets par CPU
- 16 GigaOctet par noeuds

Utilisé pour la simulation de phénomène climatique, océanique, atmosphérique, tectonique, etc.

Chap. III : Résol. Syst. d'Éq. Linéaires

CALCUL DE DETERMINANT ?

Super Calculateur 2014



National Super Computer Center in Guangzhou (China)

- 3 120 000 CPUs (Intel Xeon)
- Puissance de calcul : 40 000 TeraFlops

Utilisé à l'Université nationale de technologie de la défense de la République populaire de Chine

Chap. III : Résol. Syst. d'Éq. Linéaires

INVERSION DE MATRICE (RÉSUMÉ)

Inversion de la Matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1- Méthode de Cramer

$$A^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

(cf. Chap. 3 page 5)

2- Élimination de Gauss

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Pour calculer A^{-1} , on doit résoudre le système augmenté suivant

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par élimination de Gauss (sans pivotage)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On doit résoudre par substitutions arrière les trois systèmes suivants

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne par substitutions arrière

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/9 \\ 4/9 \\ -1/3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/9 \\ -1/9 \\ 1/3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/9 \\ 2/9 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

donc

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

3- Gauss Jordan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▼

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/9 & 5/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 4/9 & -1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

4- Factorisation LU

Élimination de Gauss

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Factorisation directe

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1- Résolution pour

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{en posant } y = Ux \quad \blacktriangleright \quad \begin{array}{l} LUx = b \\ Ly = b \\ Ux = y \end{array}$$

2- On trouve U^{-1} et L^{-1} (respectivement par substitution arrière et avant pour chaque vecteur b_i), puis

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

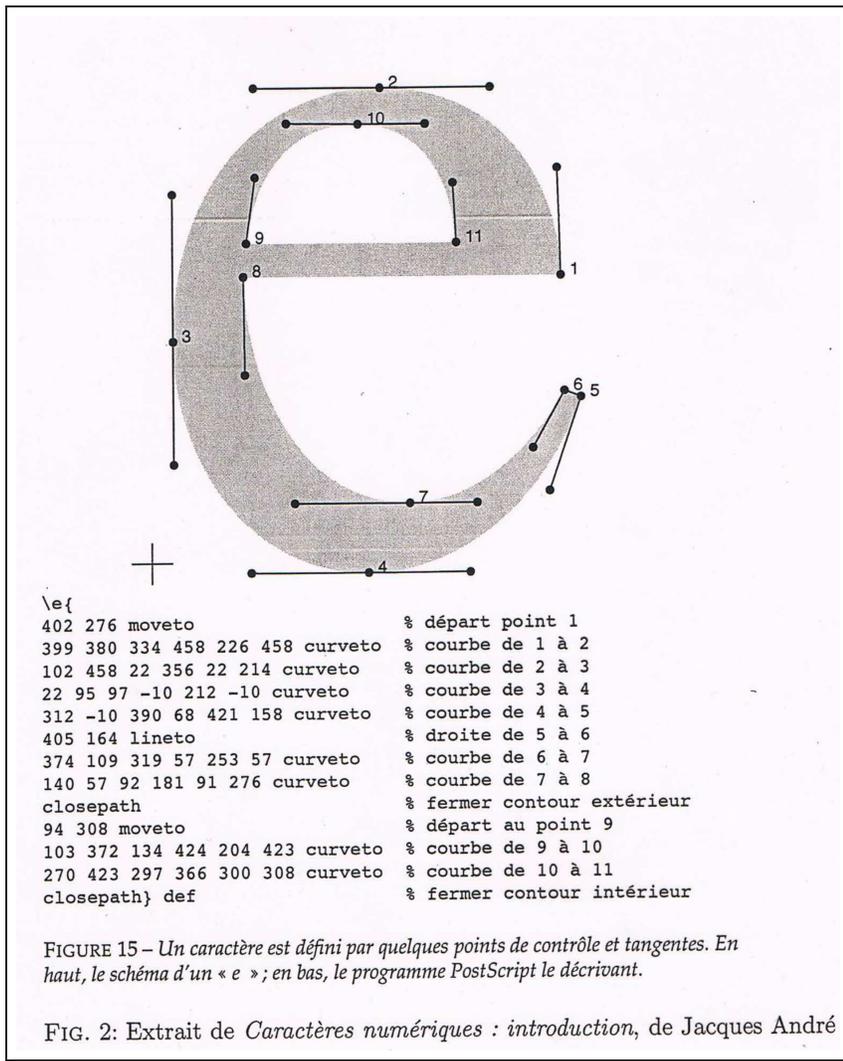
Chap. III : Résol. Syst. d'Éq. Linéaires
FACTORISATION DIRECTE

Exercices

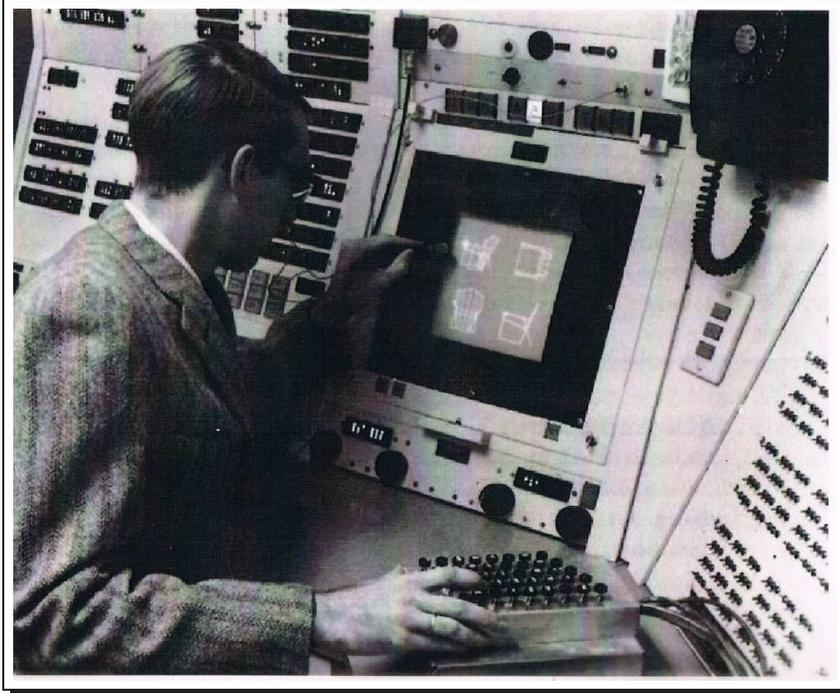
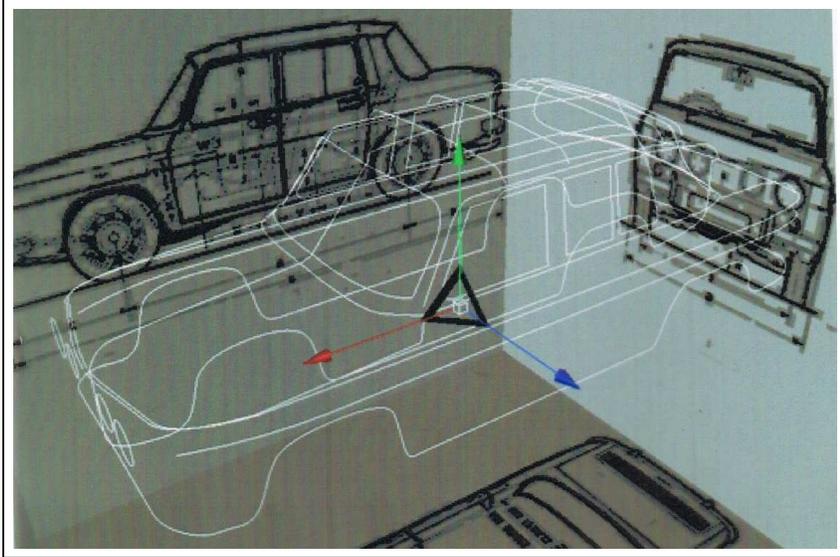
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & 0 & 0 \\ . & . & 0 \\ . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & . & . \\ 0 & 1 & . \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & 0 & 0 \\ . & . & 0 \\ . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & . & . \\ 0 & 1 & . \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chap. IV : Interpolation Poly. & Colloc. APPLICATION DES BÉZIERS (1)



Chap. IV : Interpolation Poly. & Colloc. APPLICATION DES BÉZIERS (2)



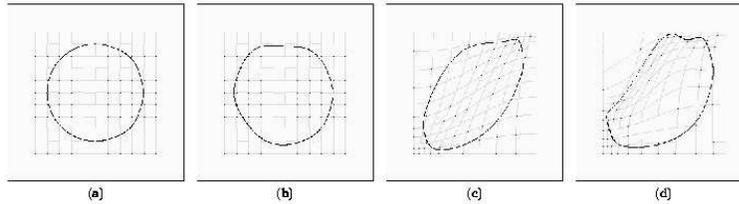
Chap. IV : Interpolation Poly. & Colloc. APPLICATION DES B-SPLINES CUBIQUES



C. DESCRIPTION OF AFFINE TRANSFORMATIONS

Finally, we introduce a set of admissible linear transformations on γ involving translation, scaling, rotation, and stretching of the template.

Let γ_θ be a deformed version of γ_0 according to the aforementioned transformations with parameter vector θ . γ_θ is described by 5 parameters (affine transformations) + 4 pairs of global non affine deformation parameters + $(n-2)(\delta_{x_i}, \delta_{y_i})$.

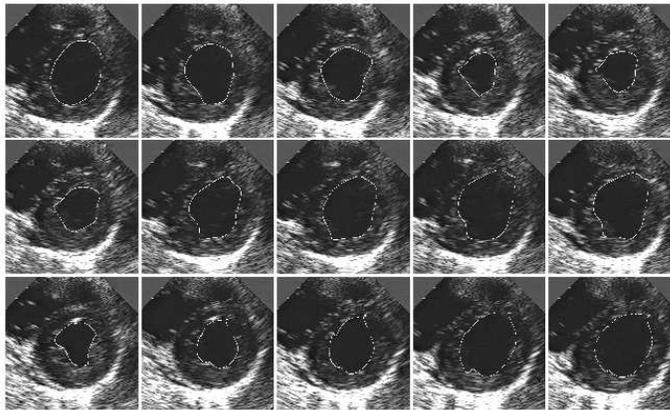


Local and global non-affine deformations : (a) Initial template. (b) γ_θ with local random perturbations. Global non-affine deformations on this locally deformed template with : (c) $M = N = 1$ and $\zeta_{mn}^x = \zeta_{mn}^y = 2 \forall m, n \in \{0, 1\}^2$. (d) $M = N = 2$ and $\zeta_{mn}^x = \zeta_{mn}^y = 2 \forall m, n \in \{0, 1, 2\}^2$.

[3]



TRACKING STEP



Tracking of the endocardial contour in a medical echographic sequence at different time frames during the cardiac cycle. From top left to bottom right : frame 1, 4, 6, 9, 12, 13, 18, 20, 27, 30, 35, 40, 41, 44, 46.

[4]

Chap. V : Dérivation Numérique

EXERCICE

Qu'approxime la formule de différence suivante ? :

$$\frac{1}{h} [f(x_0 + 2h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)]$$

Chap. V : Dérivation Numérique

EXERCICE

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
	(f_0)	(f_1)	(f_2)	(f_3)	(f_4)

Formule centrées :

$$f_1'' = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{(\pi/4)^2} \approx -0.67149 + O(h^2)$$

$$f_2'' = \frac{f_1 - 2f_2 + f_3}{(\pi/4)^2} \approx -0.95 + O(h^2)$$

$$f_3'' = \frac{f_2 - 2f_3 + f_4}{(\pi/4)^2} \approx -0.67149 + O(h^2)$$

Formule non centrées :

$$f_0'' = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{(\pi/4)^2} \approx -0.67149 + O(h^2)$$

$$f_4'' = \frac{-\{f_2 - 2f_1 + f_0\}}{(\pi/4)^2} \approx 0.67149 + O(h^2)$$

Chap. VI : Résol. Eq. Différentielles

MÉTHODES DE RUNGE-KUTTA D'ORDRE N

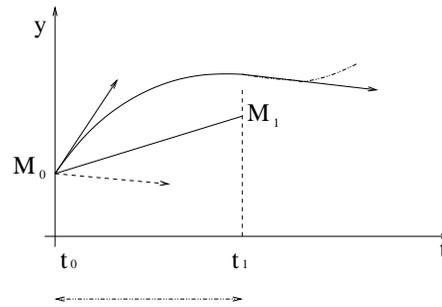
Compromis Precision/Rapidité

	Euler Modifié (RK2)	RK 4	RK 5	RK 6
Ordre Glob.	$O(h^2)$	$O(h^4)$		
Pas	$h=0.1$			
Précision	0.01			
Cout calc. /iter.				
Nb. d'Iter.				
Cout calc. Glob.				

Chap. VI : Résol. Eq. Différentielles

EULER MODIFIÉ ET MID-POINT

MÉTHODE D'EULER MODIFIÉ

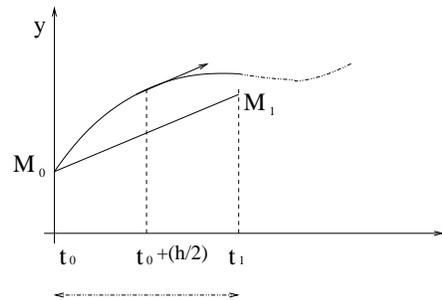


$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [y'_j + y'_{j+1}]$$

$$\tilde{y}_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j),$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [f(t_j, y_j) + f(t_j, \tilde{y}_{j+1})].$$

MÉTHODE DU POINT MILIEU



$$y_{j+1} = y_j + h [y'_{j+0.5}]$$

$$\tilde{y}_{j+1/2} = y_j + \frac{h}{2} f(t_j, y_j),$$

$$y_{j+1} = y_j + h f(t_{j+1/2}, \tilde{y}_{j+1/2}).$$

Chap. VII : Valeurs & Vecteurs Propres

APPLICATION DES VALEURS PROPRES

Modes de déformations des vertèbres

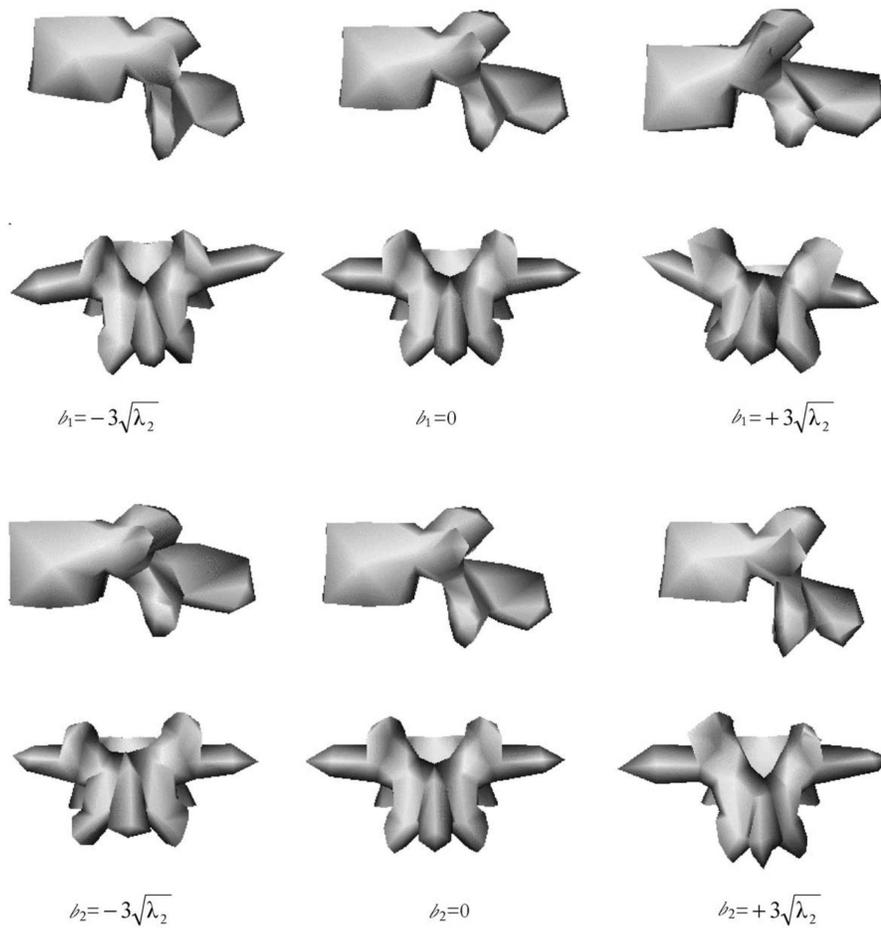


Fig. 1. Visualization of mean shape (middle row) from the sagittal (top row) and coronal views (bottom row), and two deformed shapes obtained by applying ± 3 standard deviations of the first and second deformation modes to the mean shape for the L3 vertebra.