



DIRO  
IFT 2425

## DÉMONSTRATION N° 12

*Max Mignotte*

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384.

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425/](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425/)

*E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

### **Chapitre 6**

### **Résolution des équations différentielles**

- |           |                                                      |
|-----------|------------------------------------------------------|
| I .....   | Méthode d'Adams-Moulton d'ordre local en $h^4$ .     |
| II .....  | Equation différentielle d'ordre supérieur (ordre 2). |
| III ..... | Méthode de tir.                                      |

### **Chapitre 7**

### **Valeurs et vecteurs propres**

- |          |                                          |
|----------|------------------------------------------|
| IV ..... | Méthode de Gershgorin et des puissances. |
|----------|------------------------------------------|

## I. Méthode d'Adams-Moulton d'ordre local en $h^4$

Utiliser la méthode d'Adams-Moulton<sup>1</sup> d'ordre local 4, pour  $h = 0.1$ , pour résoudre l'équation différentielle suivante,

$$y'(t) = -y(t) + t^2 + 1,$$

avec les conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned}y_0 = y(0.0) &= 1 \\y_1 = y(0.1) &= 1.0003252 \\y_2 = y(0.2) &= 1.0025385\end{aligned}$$

Calculer  $y_3 = y(0.3)$ .

### Réponse

Posons  $y'(t) = f(t, y)$  avec  $f(t, y) = -y(t) + t^2 + 1$  et les relations itératives suivantes

PRÉDICTION,

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{n+1} &= y_n + \frac{h}{12} \left( 23f(t_n, y_n) - 16f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 5f(t_{n-2}, y_{n-2}) \right) \\ \tilde{f}_{n+1} &= f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\end{aligned}$$

CORRECTION,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} \left( 5\tilde{f}_{n+1} + 8f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1}) \right)$$

D'abord, la prédiction

$$\begin{aligned}\tilde{y}_3 &= y_2 + \frac{h}{12} \left( 23f(t_2, y_2) - 16f(t_1, y_1) + 5f(t_0, y_0) \right) \\ &= 1.0025385 + \frac{0.1}{12} \left( 23f(0.2, 1.0025385) - 16f(0.1, 1.0003252) + 5f(0.0, 1) \right) \\ &= 1.008428648 \\ \tilde{f}_3 &= f(0.3, \tilde{y}_3) \\ &= -1.008428648 + (0.3)^2 + 1 \\ &= 0.081571352\end{aligned}$$

Ensuite, la correction

$$\begin{aligned}y_3 &= y_2 + \frac{h}{12} \left( 5\tilde{f}_3 + 8f(t_2, y_2) - f(t_1, y_1) \right) \\ &= 1.0025385 + \frac{0.1}{12} \left( 5(0.081571352) + 8(0.0374615) - (0.0096748) \right) \\ &\approx 1.00835\end{aligned}$$

---

1. Cf. Notes de Cours, Chapitre 6, page 22.

## II. Equation différentielle d'ordre supérieur (ordre 2)

Utiliser la méthode de Runge Kutta<sup>2</sup> d'ordre local 4, avec  $h = 0.1$ , pour résoudre l'équation différentielle d'ordre 2 suivante

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = \exp(2t) \sin(t)$$

avec les conditions initiales suivantes,  $y(0) = -0.4$  et  $y'(0) = -0.6$ . Calculer  $y(0.1) = y_1$ .

### Réponse

Posons

$$\begin{aligned}x(t) &= y'(t) \\x'(t) &= y''(t)\end{aligned}$$

On trouve donc le système d'ordre un suivant

$$\begin{aligned}x'(t) &= 2x(t) - 2y(t) + \exp(2t) \sin(t) = f_1(t, y, x) \\y'(t) &= x(t) = f_2(t, y, x)\end{aligned}$$

avec les conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned}y(0) &= -0.4 \\ \text{et } x(0) &= -0.6\end{aligned}$$

Notons  $K_{x,y}$ , les différents coefficients pondérateurs de la méthode de Runge Kutta. L'indice  $y$  est associé à la fonction  $f_1$  ou  $f_2$ .

$$\begin{aligned}K_{1,1} &= hf_1(t_0, y_0, x_0) \\&= 0.1(2(-0.6) - 2(-0.4) + 0.0) \\&= -0.04\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_{1,2} &= hf_2(t_0, y_0, x_0) \\&= 0.1(-0.6) \\&= -0.06\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_{2,1} &= hf_1(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_{1,2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{1,1}) \\&= 0.1f_1(0.05, -0.43, -0.62) \\&= 0.1(2(-0.62) - 2(-0.43) + \exp(0.1) \sin(0.05)) \\&= -0.03247644757\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_{2,2} &= hf_2(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_{1,2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{1,1}) \\&= 0.1f_2(0.05, -0.43, -0.62) \\&= 0.1(-0.62) \\&= -0.062\end{aligned}$$

---

2. Cf. Notes de Cours, Chapitre 6, page 28.

$$\begin{aligned}
K_{3,1} &= hf_1(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_{2,2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{2,1}) \\
&= 0.1f_1(0.05, -0.431, -0.616238) \\
&= 0.1(2(-0.616238) - 2(-0.431) + \exp(0.1)\sin(0.05)) \\
&= -0.03152409
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{3,2} &= hf_2(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_{2,2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{2,1}) \\
&= 0.1f_2(0.05, -0.431, -0.616238) \\
&= 0.1(-0.616238) \\
&= -0.0616238
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{4,1} &= hf_1(t_0 + h, y_0 + k_{3,2}, x_0 + k_{3,1}) \\
&= 0.1f_1(0.1, -0.4616238, -0.63152409) \\
&= 0.1(2(-0.63152409) - 2(-0.4616238) + \exp(0.2)\sin(0.1)) \\
&= -0.02178637
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{4,2} &= hf_2(t_0 + h, y_0 + k_{3,2}, x_0 + k_{3,1}) \\
&= 0.1f_2(0.1, -0.4616238, -0.63152409) \\
&= -0.063152409
\end{aligned}$$

Donc, on trouve,

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \frac{1}{6}k_{1,1} + \frac{1}{3}k_{2,1} + \frac{1}{3}k_{3,1} + \frac{1}{6}k_{4,1} \\
&= -0.6 + \frac{1}{6}(-0.04) + \frac{1}{3}(-0.03247644) + \frac{1}{3}(-0.03152409) + \frac{1}{6}(-0.02178637) \\
&= -0.631631
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}k_{1,2} + \frac{1}{3}k_{2,2} + \frac{1}{3}k_{3,2} + \frac{1}{6}k_{4,2} \\
&= -0.4 + \frac{1}{6}(-0.06) + \frac{1}{3}(-0.062) + \frac{1}{3}(-0.0616238) + \frac{1}{6}(-0.063) \\
&= -0.461733
\end{aligned}$$

Donc  $y_1 = -0.461733$ .

### III. Méthode de tir

Soit l'équation différentielle suivante,

$$y''(t) = -\frac{2}{t}y'(t) + \frac{2}{t^2}y(t) + \frac{\sin(\ln t)}{t^2} \quad (1)$$

avec les conditions frontières suivantes

$$\begin{aligned}y(1) &= 1 \\y(2) &= 2\end{aligned}$$

avec  $1 \leq t \leq 2$ . Résoudre l'équation (1) avec la méthode d'Euler-Modifiée avec le pas  $h = 0.1$ .

## Réponse

On va transformer ce problème de condition frontière en deux problèmes de conditions initiales. Essayons de résoudre avec les conditions initiales suivantes, (pour alléger la notation, on notera  $x$  au lieu de  $x(t)$  et idem pour  $y$ ).

$$\begin{aligned}y(1) &= 1 \\ \text{on pose dans le premier tir} \quad y'(1) &= 0\end{aligned}$$

Posons  $x(t) = y'(t)$ , Nous devons résoudre le système suivant,

$$\begin{aligned}x'(t) &= -\frac{2}{t}x(t) + \frac{2}{t^2}y(t) + \frac{\sin(\ln(t))}{t^2} = f_1(t, y, x) \\y'(t) &= x(t) = f_2(t, y, x)\end{aligned}$$

avec les conditions initiales  $y(1) = 1$  et  $x(1) = y'(1) = 0$ .

On utilise les équations itératives de la procédure d'Euler-Modifiée.

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{j+1} &= y_j + hf_2(t_j, y_j, x_j) \\ \tilde{x}_{j+1} &= x_j + hf_1(t_j, y_j, x_j) \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2} \left( f_2(t_j, y_j, x_j) + f_2(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1}, \tilde{x}_{j+1}) \right) \\ x_{j+1} &= x_j + \frac{h}{2} \left( f_1(t_j, y_j, x_j) + f_1(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1}, \tilde{x}_{j+1}) \right)\end{aligned}$$

On obtient,

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= x_0 + 0.1f_1(1, 1, 0) = 0 + 0.1(2) = 0.2 \\ \tilde{y}_1 &= y_0 + 0.1f_2(1, 1, 0) = 1 + 0 = 1 \\ x_1 &= 0 + \frac{0.1}{2} \left( f_1(1, 1, 0) + f_1(1.1, 1, 0.2) \right) = 0.168 \\ y_1 &= 1 + \frac{0.1}{2} \left( f_2(1, 1, 0) + f_2(1.1, 1, 0.2) \right) = 1.01 \\ &\vdots \\ x_{10} &= 0.682334 \\ y_{10} &= 1.46675\end{aligned}$$

Or on a  $y_{10} = y(2) = 2$ , donc on a raté le tir. Essayons maintenant avec les conditions initiales  $y(1) = 1$  et  $x(1) = 1$  et on posera pour le deuxième tir,  $y'(1) = 1$ .

On obtient,

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_1 &= 1 + 0.1f_1(1, 1, 1) = 0 \\
 \tilde{y}_1 &= 1 + 0.1f_2(1, 1, 1) = 1 + 0.1 = 1.1 \\
 \\ 
 x_1 &= 1 + \frac{0.1}{2} \left( f_1(1, 1, 1) + f_1(1.1, 1.1, 0) \right) = 1.00393 \\
 y_1 &= 1 + \frac{0.1}{2} \left( f_2(1, 1, 0) + f_2(1.1, 1.1, 0) \right) = 1.1 \\
 &\vdots \\
 x_{10} &= 1.09941 \\
 y_{10} &= 2.04757
 \end{aligned}$$

Or on a  $y_{10} = y(2) = 2$ , donc on a encore raté le tir. Cependant, si  $u(t)$  et  $v(t)$  sont solutions de l'équation différentielle (1), alors  $w(t) = \alpha u(t) + (1 - \alpha)v(t)$  sera aussi une solution de cette équation différentielle<sup>3</sup>. On considère donc la fonction associée au premier essai comme étant  $u(t)$  et la deuxième comme étant  $v(t)$ , nous devons déterminer  $\alpha$  pour que,

$$y(2) = w(2) = 2$$

On a

$$\begin{aligned}
 w(2) &= \alpha(1.46675) + (1 - \alpha)(2.04757) = 2 \\
 \text{d'où} \quad \alpha &= 0.0819014
 \end{aligned}$$

Donc,  $w(t) = 0.0819014 u(t) + (1 - 0.0819014) v(t)$  est aussi solution de l'équation différentielle (1) et donc nous avons la relation suivante  $w'(t) = 0.0819014 u'(t) + (1 - 0.0819014) v'(t)$ , i.e.,  $w'(t) = 0.0819014 u'(t) + 0.918099 v'(t)$ , et donc

$$\begin{aligned}
 w'(1) &= 0.0819014 u'(1) + 0.918099 v'(1) \\
 w'(1) &= 0 + (0.918099)(1) \\
 w'(1) &= 0.918099
 \end{aligned}$$

Donc il faut prendre  $y'(1) = 0.918099$ .

---

3. Cf. Notes de Cours, Chapitre 6, page 36.