



DIRO  
IFT 2425

## DÉMONSTRATION N° 2

*Max Mignotte*

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384.

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425/](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425/)

*E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

<b>Chapitre 2</b>	<b>Solution d'équation</b>
I .....	Méthode du point fixe.
II .....	Méthode de Newton.
<b>Chapitre 3</b>	<b>Résolution de système d'équations linéaires</b>
III .....	Méthode de Cramer.
IV .....	Eliminiation de Gauss sans pivotage.
V .....	Eliminiation de Gauss avec pivotage.

## I. Méthode du point fixe

On se propose de calculer une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de la racine  $r$  de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Si on pose  $g(x) = 1/(1+x)$ , cette équation est équivalente à  $g(x) = x$ .

1. Trouver un intervalle  $J$  sur lequel la convergence de la méthode du point fixe est assurée (i.e., trouver un intervalle  $J$  sur lequel  $g$  est contractante).
2. Déterminer analytiquement, grâce au théorème des accroissements finis ou de la valeur moyenne (cf. cours chapitre 2 page 33), une majoration du type  $|r_n - r| \leq K$ , où  $r_n$  désigne la valeur approchée, à la  $n$ ème itération, de cette racine par la méthode itérative du point fixe. En déduire le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir, par cette méthode, une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de cette racine.
3. En déduire une valeur approchée de  $r$  à  $10^{-3}$  près en partant de  $r_0 = 1$ .

## II. Méthode de Newton

On considère l'équation  $f(x) = \ln x - \frac{x}{5} = 0$ .

1. Montrer que cette équation a une racine  $r$  appartenant à l'intervalle  $J = ]1, 2[$ .
2. Vérifier analytiquement la convergence de la méthode de Newton pour la résolution de l'équation  $f(x) = 0$  dans  $J$ .
3. Soit  $g(x)$  la fonction intervenant dans la méthode, associée à la résolution de cette équation dans  $J$ . Montrer que  $r_n = r_{n-1} - \frac{f(r_{n-1})}{f'(r_{n-1})}$ , où  $r_n$  désigne la valeur approchée de  $r$  à la  $n$ ème itération. Montrer analytiquement que l'on a la majoration suivante

$$|r_n - r| \leq K |r_{n+1} - r_n|,$$

où  $K$  est un majorant de  $\left| \frac{1}{1-g'(x)} \right|$  sur  $J$ . On pourra évaluer  $(r_{n+1} - r_n) = (r_{n+1} - r) - (r_n - r)$  à l'aide du théorème des accroissements finis ou de la valeur moyenne. En déduire une valeur approchée à  $10^{-6}$  près de la racine de  $r$ .

## III. Méthode de Cramer

Résoudre le système suivant avec la méthode de Cramer :

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 &= 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

## IV. Méthode d'élimination de Gauss

1. Transformer le système de l'exercice précédent en un système triangulaire supérieur.
2. Résoudre le système par substitution arrière.

## IV. Méthode d'élimination de Gauss avec pivotage

1. Trouver la solution du système suivant par élimination de Gauss et pivotage partiel.

$$x + 2y + 3z = 26,$$

$$3x + 2y + z = 39,$$

$$2x + 3y + z = 34.$$

2. Trouver la solution du système suivant par élimination de Gauss et pivotage total.

$$x + y + 2z = 1,$$

$$2x + y + z = 1,$$

$$x + 2y + 3z = 1.$$