



DIRO
IFT 2425

DÉMONSTRATION N° 2

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384.

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425/](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425/)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Chapitre 2	Solution d'équation non linéaire
I	Méthode du point fixe.
II	Méthode de Newton.
Chapitre 3	Résolution de système d'équations linéaires
III	Méthode de Cramer.
IV	Élimination de Gauss sans pivotage.
V	Élimination de Gauss avec pivotage.

I. Méthode du point fixe

On se propose de calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de la racine r de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0. \tag{1}$$

Si on pose $g(x) = 1/(1+x)$, l'équation (1) est équivalente à $g(x) = x$.

1. Trouver un intervalle J sur lequel la convergence de la méthode du point fixe est assurée (i.e., trouver un intervalle J sur lequel g est contractante).
2. Déterminer analytiquement, en utilisant le théorème des accroissements finis ou de la valeur moyenne (cf. cours chapitre 2 page 33), une majoration du type $|r_n - r| \leq K$, où r_n désigne la valeur approchée, à la n ème itération, de cette racine par la méthode itérative du point fixe. En déduire le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir, par cette méthode, une valeur approchée à 10^{-3} près de cette racine.
3. En déduire une valeur approchée de r à 10^{-3} près en partant de $r_0 = 1$.

Réponse

1.

Une étude sommaire de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + x - 1$ permet de localiser r dans l'intervalle $J = [0.5, 1]$ (parce que $f(0.5)f(1) < 0$ et f croissant sur J). La fonction g est continue sur J et sa dérivée s'écrit

$$g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Cette dérivée vérifie sur J ,

$$|g'(x)| \leq \frac{4}{9}. \tag{2}$$

donc g est contractante sur J (en toute rigueur, on doit aussi vérifier que $\forall x \in J, g(x) \in J$, ce qui est le cas ici aussi). La convergence de la méthode du point fixe est assurée sur cet intervalle.

2.

En utilisant le théorème de la valeur moyenne, on obtient, puisque $g(r) = r$ et $r_n = g(r_{n-1})$ avec r_n la valeur approchée de la racine à la n -ième itération

$$\begin{aligned} r_n - r &= \frac{g(r_{n-1}) - g(r)}{(r_{n-1} - r)} \times (r_{n-1} - r) \\ &= g'(\zeta) \times (r_{n-1} - r) \quad \text{avec } \zeta \in J \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (2), on obtient les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} |r_n - r| &\leq \frac{4}{9} |r_{n-1} - r| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^2 |r_{n-2} - r| \\ &\vdots \\ &\leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |r_0 - r| \\ &\leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

On obtiendra donc $|r_n - r| < 10^{-3}$ dès que

$$\left(\frac{4}{9}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right) < 10^{-3}$$

$$n \ln\left(\frac{4}{9}\right) < \ln(2 \times 10^{-3})$$

Soit pour tout $n \geq 8$. En partant de $r_0 = 1$, on a, $r_n = g(r_{n-1})$ et

$$\begin{aligned} r_0 &= 1 \\ r_1 &= 0.5 \\ r_2 &= 0.666666666 \\ r_3 &= 0.6 \\ r_4 &= 0.625 \\ r_5 &= 0.615384 \\ r_6 &= 0.61904 \\ r_7 &= 0.617647 \\ r_8 &= 0.61818 \end{aligned}$$

Pour $n = 8$, on a $\left(\frac{4}{9}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right) < 0.0008$. Ce qui permet de choisir comme valeur approchée de r à 10^{-3} près l'une des valeurs approchées décimales r'_8 de r_8 à 10^{-4} près, puisqu'alors

$$\begin{aligned} |r'_8 - r| &= |r'_8 - r_8 + r_8 - r| \leq |r'_8 - r_8| + |r_8 - r| \\ &\leq 10^{-4} + 8 \times 10^{-4} < 10^{-3}. \end{aligned}$$

On pourra donc prendre 0.6182 ou 0.6181 comme valeur approchée à 10^{-3} près.

II. Méthode de Newton

On considère l'équation $f(x) = \ln x - \frac{x}{5} = 0$.

1. Montrer que cette équation a une racine r appartenant à l'intervalle $J =]1, 2[$.
2. Vérifier analytiquement la convergence de la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$ dans J .
3. Soit g la fonction intervenant dans la méthode, associée à la résolution de cette équation dans J . En utilisant $r_n = r_{n-1} - \frac{f(r_{n-1})}{f'(r_{n-1})}$, où r_n désigne la valeur approchée de r à la n ème itération, montrer analytiquement que l'on a la majoration suivante

$$|r_n - r| \leq K |r_{n+1} - r_n|,$$

où K est un majorant de $\left|\frac{1}{1-g'(x)}\right|$ sur J . On pourra évaluer $(r_{n+1} - r_n) = (r_{n+1} - r) - (r_n - r)$ à l'aide du théorème des accroissements finis ou de la valeur moyenne.

En déduire une valeur approchée à 10^{-6} près de la racine r .

Réponse

1.

Soit f définie par $f(x) = \ln x - \frac{x}{5}$. L'étude de la variation de f met en évidence une racine dans chacun des intervalles $]0, 5]$ et $]5, +\infty[$ où f est respectivement croissante et décroissante ($f'(x) = 1/x - 1/5 > 0$, donc croissant, si $x < 5$ et inversement). Comme on a $f(1) = -0.20$ et $f(2) \approx 0.293$, on peut localiser la première racine dans l'intervalle $]1, 2[$.

2. La fonction g utilisée dans la méthode de Newton est

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{5x}{5-x} \times (1 - \ln x)$$

qui a pour dérivée sur $]5, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{f(x) \times f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{25}{(5-x)^2} \times \left(\frac{x}{5} - \ln x\right)$$

On a

$$|f(x)| = \left| \ln x - \frac{x}{5} \right| \leq 0.293 \quad \text{sur } J \quad \forall x \in J$$

et d'autre part

$$\forall x \in J \quad 0 \leq \frac{25}{(5-x)^2} \leq \frac{25}{9}$$

D'où il résulte :

$$|g'(x)| < 0.82 \quad \forall x \in J \tag{3}$$

La fonction g est donc contractante sur J (en toute rigueur, on doit aussi vérifier que $\forall x \in J, g(x) \in J$, ce qui est le cas ici aussi). La convergence de la méthode de Newton est assurée pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

3. La méthode itérative de Newton s'écrit

$$r_n = r_{n-1} - \frac{f(r_{n-1})}{f'(r_{n-1})} = \frac{5r_{n-1}}{5-r_{n-1}} \times (1 - \ln r_{n-1})$$

En utilisant le théorème des accroissements finis, on a

$$\begin{aligned} r_{n+1} - r_n &= (r_{n+1} - r) - (r_n - r) \\ &= (g(r_n) - g(r)) - (r_n - r) \\ &= \frac{(g(r_n) - g(r)) - (r_n - r)}{(r_n - r)} \times (r_n - r) \\ &= (g'(\zeta) - 1) \times (r_n - r) \quad \text{avec } \zeta \text{ compris entre } r_n \text{ et } r \end{aligned}$$

De ce fait, on a

$$|r_n - r| = \frac{1}{|1 - g'(\zeta)|} \times |r_{n+1} - r_n|$$

D'après l'équation (3), on a

$$\forall x \in J \quad |g'(x)| < 0.82$$

d'où

$$\frac{1}{|1 - g'(\zeta)|} \leq 5.56$$

et on peut écrire

$$|r_n - r| \leq 5.56 \times |r_{n+1} - r_n|$$

Si on veut $|r_n - r|$ inférieur à 10^{-6} , il suffit de choisir n tel que

$$|r_{n+1} - r_n| < \frac{10^{-6}}{6}$$

En partant de $r_0 = 1$, on obtient $r_n = \frac{5r_{n-1}}{5-r_{n-1}} \times (1 - \ln r_{n-1})$ et

$$\begin{aligned} r_0 &= 1 \\ r_1 &= 1.25 \\ r_2 &= 1.294760748 \\ r_3 &= 1.295854885 \\ r_4 &= 1.295855509 \\ r_5 &= 1.295855509 \end{aligned}$$

III. Méthode de Cramer

Résoudre le système suivant avec la méthode de Cramer :

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Réponse

On a $Ax = b$ avec A , x , et b , les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule les déterminants de A et des matrices A_1 , A_2 et A_3 obtenues en remplaçant la i ème colonne de A par le vecteur b . On obtient,

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

en faisant (ligne 3=ligne 3 + ligne 1) et on obtient

$$|A| = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 12 = -15$$

En remplaçant dans A , la première colonne par le vecteur b , on a

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

en faisant (ligne 3=ligne 3 + ligne 1) et on obtient

$$|A_1| = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

De même

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

en faisant (ligne 3=ligne 3 + ligne 1) et on obtient

$$|A_2| = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

De même, on a

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

en faisant (colonne 2=colonne 2 - colonne 1) et on obtient

$$|A_3| = 1 \times \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -20$$

Et donc, par définition (cf. cours) :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-5}{-15} = \frac{1}{3} \\ x_2 &= \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-15}{-15} = 1 \\ x_3 &= \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-20}{-15} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

IV. Méthode d'élimination de Gauss

1. Transformer le système de l'exercice précédent en un système triangulaire supérieur.
2. Résoudre le système par substitution arrière.

Réponse

1.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En faisant $l_2 = 5l_2 - 3l_1$ et $l_3 = 5l_3 - l_1$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 16 & -3 \\ 0 & 7 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En faisant $l_3 = 16l_3 - 7l_2$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 16 & -3 \\ 0 & 0 & -75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -100 \end{pmatrix}$$

2.

Par substitution arrière, on obtient

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{4}{3} \\ 16x_2 - 4 &= 12 \quad \text{donc} \quad x_2 = 1 \\ 5x_1 - 2 + \frac{4}{3} &= 1 \quad \text{donc} \quad x_1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

IV. Méthode d'élimination de Gauss avec pivotage

1. Trouver la solution du système suivant par élimination de Gauss et pivotage partiel.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 26 \\ 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \end{aligned}$$

2. Trouver la solution du système suivant par élimination de Gauss et pivotage total.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Réponse

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 39 \\ 34 \end{pmatrix} \quad l_1 \Leftrightarrow l_2 \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 \\ 26 \\ 34 \end{pmatrix}$$

En faisant $l_2 = -\frac{1}{3}l_1 + l_2$ et $l_3 = l_3 - \frac{2}{3}l_1$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix} \quad l_2 \Leftrightarrow l_3 \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

En faisant $l_3 = -\frac{4}{5}l_2 + l_3$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{36}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 \\ 8 \\ \frac{33}{5} \end{pmatrix}$$

Par substitution arrière, on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{37}{4} \\ \frac{17}{4} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad l_1 \Leftrightarrow l_3 \quad c_1 \Leftrightarrow c_3 \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En faisant $l_2 = -\frac{1}{3}l_1 + l_2$ et $l_3 = l_3 - \frac{2}{3}l_1$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad c_2 \Leftrightarrow c_3 \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

En faisant $l_3 = -\frac{1}{5}l_2 + l_3$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{16}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

Et donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$