



DIRO  
IFT 2425

## DÉMONSTRATION N° 4

*Max Mignotte*

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384.

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425/](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425/)

*E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

| <b>Chapitre 2</b> | <b>Résolution de système d'équations linéaires</b>                   |
|-------------------|--|
| I .....           | Décomposition $P^tLU$ .  |
| II .....          | Méthode des moindres carrés pour les systèmes surdéterminés.         |
| III .....         | Amélioration itérative (complément du cours).                        |
| IV .....          | Conditionnement d'une matrice.                                       |
| V .....           | Résolution d'un système par la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel. |

## I. Décomposition $P^tLU$

Résoudre le système suivant et décomposer la matrice  $A$  du système suivant en matrice  $P^tLU$  avec  $P$  la matrice de permutation et  $LU$  les matrices triangulaires inférieures et supérieures obtenues par la méthode d'élimination de Gauss avec pivot (résolution du système par substitution arrière).

$$\begin{aligned}x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4, \\-x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\x_1 + 2x_2 + 2x_4 &= 3.\end{aligned}$$

## II. Méthode des moindres carrés pour les systèmes surdéterminés

Lors d'une expérience, on a les observations suivantes sur un phénomène physique

$$\begin{aligned}(x &, y) \\(2 &, 6.5) \\(4 &, 8.5) \\(5 &, 11) \\(6 &, 12.5)\end{aligned}$$

On cherche à trouver une relation linéaire liant la première et la deuxième donnée de cette expérience. Concrètement on cherche à trouver la meilleure droite (au sens de l'erreur quadratique moyenne) passant par ces points.

## III. Amélioration itérative (complément du cours)

Soit  $x^*$  la solution approximative (à cause de l'erreur d'arrondi et de troncature) du système  $Ax = b$ . Il est possible d'améliorer itérativement ou de corriger cette approximation en définissant  $e = x - x^*$  et  $r = b - Ax^*$ . Montrer que  $e$ , l'erreur sur l'approximation de  $x^*$  est solution du système suivant :

$$Ae = r.$$

Calculer ensuite une valeur plus exacte de  $x$  en réalisant l'opération suivante.

$$x = x^* + e.$$

En fait, cette estimation de  $e$  et cette dernière correction est elle aussi sujette aux erreurs d'arrondis, et de ce fait, on peut répéter cette opération de correction itérative jusqu'à ce que l'on obtienne la vraie valeur de  $x$ . Faites un exemple sur le système suivant, en prenant 3 cse après la virgule (tronquée) pour la première approximation et en calculant la correction avec 6 cse (double précision) :

$$A = \begin{pmatrix} 4.23 & -1.06 & 2.11 \\ -2.53 & 6.77 & 0.98 \\ 1.85 & -2.11 & -2.32 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad b = \begin{pmatrix} 5.28 \\ 5.22 \\ -2.58 \end{pmatrix}.$$

## IV. Conditionnement d'une matrice

Trouver le conditionnement des matrices suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1.000001 & 4.000001 & -2.000001 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utiliser la norme  $\|\cdot\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ .

## V. Méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Résoudre le système suivant par la méthode de Jacobi puis par la méthode de Gauss-Seidel en prenant la condition initiale  $x^{(0)} = (0 \ 0 \ 0)^t$  dans les deux cas.

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 - x_3 &= 8, \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 &= 12, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= -4. \end{aligned}$$