



DIRO  
IFT 2425

## DÉMONSTRATION N° 6

*Max Mignotte*

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384.

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425/](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425/)

*E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

<b>Chapitre 4</b>	<b>Interpolation polynomiale</b>
I .....	Calcul de spline cubique naturelle.
II .....	Calcul de spline de Bézier.
III .....	Méthode matricielle pour le calcul des splines de Bézier.
IV .....	Identification de courbe spline (1).
V .....	Identification de courbe spline (2).

## I. Calcul de spline cubique naturelle

Déterminer la fonction spline cubique naturelle passant par les points suivants,

$x$	1	2	3	4	5
$y$	4	-2	3	1	1

### Réponse

On a  $s_1 = s_5 = 0$  (spline cubique *naturelle*) et pour  $i = 2, 3, 4$ , le système suivant,

$$\begin{cases} h_1 s_1 + 2(h_1 + h_2)s_2 + h_2 s_3 = 6\left(\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1}\right) \\ h_2 s_2 + 2(h_2 + h_3)s_3 + h_3 s_4 = 6\left(\frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2}\right) \\ h_3 s_3 + 2(h_3 + h_4)s_4 + h_4 s_5 = 6\left(\frac{y_5 - y_4}{h_4} - \frac{y_4 - y_3}{h_3}\right) \end{cases}$$

On a aussi,

$$\begin{cases} h_1 = 2 - 1 = 1 \\ h_2 = 3 - 2 = 1 \\ h_3 = 4 - 3 = 1 \\ h_4 = 5 - 4 = 1 \end{cases}$$

En remplaçant ces valeurs dans le système précédent, on trouve,

$$\begin{cases} 4s_2 + s_3 = 66 \\ s_2 + 4s_3 + s_4 = -42 \\ s_3 + 4s_4 = 12 \end{cases}$$

ou encore le système tridiagonal suivant

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ -42 \\ 12 \end{pmatrix}$$

que l'on résoud facilement par élimination de Gauss<sup>1</sup>, et on trouve

$$\begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (585/28) \\ -(123/7) \\ (207/28) \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = \frac{585}{28} \\ s_3 = -\frac{123}{7} \\ s_4 = \frac{207}{28} \\ s_5 = 0 \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Cf. Notes de Cours, Chapitre 4, pages 55.

Avec ceci, on peut calculer les coefficients du polynôme,

$$\begin{aligned}a_1 &= (s_2 - s_1)/6h_1 = 3.48 \\a_2 &= (s_3 - s_2)/6h_2 = -6.41 \\a_3 &= (s_4 - s_3)/6h_3 = 4.16 \\a_4 &= (s_5 - s_4)/6h_4 = -1.23\end{aligned}$$

De même, on a,

$$\begin{aligned}b_1 &= (s_1/2) = 0 \\b_2 &= (s_2/2) = 10.44 \\b_3 &= (s_3/2) = -8.78 \\b_4 &= (s_4/2) = 3.69\end{aligned}$$

De même, on a,

$$\begin{aligned}c_1 &= (y_2 - y_1)/h_1 - \frac{h_1(2s_1 + s_2)}{6} = -9.48 \\c_2 &= (y_3 - y_2)/h_2 - \frac{h_2(2s_2 + s_3)}{6} = 0.96 \\c_3 &= (y_4 - y_3)/h_3 - \frac{h_3(2s_3 + s_4)}{6} = 2.63 \\c_4 &= (y_5 - y_4)/h_4 - \frac{h_4(2s_4 + s_5)}{6} = -2.46\end{aligned}$$

De même, on a,

$$\begin{aligned}d_1 &= y_1 = 4 \\d_2 &= y_2 = -2 \\d_3 &= y_3 = 3 \\d_4 &= y_4 = 1\end{aligned}$$

Donc, on obtient les quatres polynômes suivants

$$\begin{aligned}Q_1(x) &= 3.48(x-1)^3 - 9.48(x-1) + 4 \\Q_2(x) &= -6.41(x-2)^3 + 10.44(x-2)^2 + 0.96(x-2) - 2 \\Q_3(x) &= 4.16(x-3)^3 - 8.78(x-3)^2 + 2.63(x-3) + 3 \\Q_4(x) &= -1.23(x-4)^3 + 3.69(x-4)^2 - 2.46(x-4) + 1\end{aligned}$$

## II. Calcul de spline de Bézier

Calculer la spline de Bézier cubique passant par les points suivants,

$x$	1	2	3	4
$y$	4	-2	3	1

## Réponse

La spline de Bézier est définie par la forme paramétrique suivante<sup>2</sup>,

$$P(u) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \underbrace{(1-u)^{n-i} u^i}_{\text{Polynôme de Bernstein}} P_i$$

$$\text{avec, } \binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)! i!} \quad \text{et} \quad P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

où  $n$  est le degré de la spline de Bézier. Donc, pour  $n = 3$ , on a,

$$P(u) = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} (1-u)^{3-i} u^i P_i = \left( \text{Bez}_{03}(u)P_0 + \text{Bez}_{13}(u)P_1 + \text{Bez}_{23}(u)P_2 + \text{Bez}_{33}(u)P_3 \right)$$

Les différents Polynômes de Bernstein s'écrivent,

$$\begin{aligned} \text{Bez}_{03}(u) &= \binom{3}{0} (1-u)^{3-0} u^0 = (1-u)^3 \\ \text{Bez}_{13}(u) &= \binom{3}{1} (1-u)^{3-1} u^1 = 3u(1-u)^2 \\ \text{Bez}_{23}(u) &= \binom{3}{2} (1-u)^{3-2} u^2 = 3u^2(1-u) \\ \text{Bez}_{33}(u) &= \binom{3}{3} (1-u)^{3-3} u^3 = u^3 \end{aligned}$$

On obtient le polynôme suivant

$$P(u) = (1-u)^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 3u(1-u)^2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 3u^2(1-u) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + u^3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et on obtient la représentation paramétrique suivante,

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3u \\ 4 - 18u + 33u^2 - 18u^3 \end{pmatrix}$$

---

<sup>2</sup>Cf. Notes de Cours, Chapitre 4, pages 56-58.

### III. Méthode matricielle pour le calcul des splines de Bézier

Calculer la spline de Bézier cubique passant par les points suivants en utilisant la méthode matricielle<sup>3</sup>,

$x$	1	2	3	4
$y$	4	-2	3	1

#### Réponse

La représentation matricielle des courbes de Bézier cubique peut s'écrire,

$$P(u) = u^t M_{\text{BEZ}} p,$$
$$P(u) = \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Dans notre cas, on a,

$$P(u) = \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$P(u) = \begin{pmatrix} (1-u)^3 & 3u(1-u)^2 & 3u^2(1-u) & u^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Et on obtient la représentation paramétrique suivante,

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3u \\ 4 - 18u + 33u^2 - 18u^3 \end{pmatrix}$$

### IV. Identification de courbe spline (1)

On définit l'expression,

$$(x - \xi)_+^3 = \begin{cases} (x - \xi)^3, & \text{si } x > \xi \\ 0, & \text{si } x \leq \xi \end{cases}$$

Soit maintenant  $a = x_0$ ,  $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ ,  $x_3 = b$  et on définit,

$$S(x) = c_1(x - x_1)_+^3 + c_2(x - x_2)_+^3 \quad \text{où } x \in [a, b]$$

---

<sup>3</sup>Cf. Notes de Cours, Chapitre 4, page 63.

Montrer que  $S$  est une spline cubique.

## Réponse

On va montrer que la continuité de  $S$ ,  $S'$  et  $S''$  est respectée.

- Sur  $[x_0, x_1]$ , on a  $S(x) = 0$ ,  $S'(x) = 0$  et  $S''(x) = 0$
- Sur  $[x_1, x_2]$ , on a  $S(x) = c_1(x - x_1)^3$ , et donc  $S'(x) = 3c_1(x - x_1)^2$  et  $S''(x) = 6c_1(x - x_1)$
- Sur  $[x_2, x_3]$ , on a  $S(x) = c_1(x - x_1)^3 + c_2(x - x_2)^3$ , et donc  $S'(x) = 3c_1(x - x_1)^2 + 3c_2(x - x_2)^2$  et  $S''(x) = 6c_1(x - x_1) + 6c_2(x - x_2)$

On a,

$$S(x_{1-}) = s(x_{1+}) = 0 \quad \text{et} \quad S(x_{2-}) = S(x_{2+}) = c_1(x_2 - x_1)^3$$

De même,

$$S'(x_{1-}) = S'(x_{1+}) = 0 \quad \text{et} \quad S'(x_{2-}) = S'(x_{2+}) = 3c_1(x_2 - x_1)^2$$

De même,

$$S''(x_{1-}) = S''(x_{1+}) = 0 \quad \text{et} \quad S''(x_{2-}) = S''(x_{2+}) = 6c_1(x_2 - x_1)$$

Les fonctions  $S$ ,  $S'$  et  $S''$  sont continues au points  $x_1$  et  $x_2$ .

Donc les fonctions  $S$ ,  $S'$  et  $S''$  sont continues sur les intervalles  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$  et  $[x_2, x_3]$ .

Donc la fonction  $S$  est une spline cubique.

## V. Identification de courbe spline (2)

Soit  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ , un polynôme cubique sur  $[a, b]$ , et  $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_n = b$ .  
Montrer que la fonction définit par,

$$S(x) = P(x) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j(x - x_j)_+^3$$

est une spline cubique sur  $[x_i, x_{i+1}]$ , pour chaque  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ , sachant que l'on définit,

$$(x - \xi)_+^3 = \begin{cases} (x - \xi)^3, & \text{si } x > \xi \\ 0, & \text{si } x \leq \xi \end{cases}$$

## Réponse

On va montrer que la continuité de  $S$ ,  $S'$  et  $S''$  est respectée. Sur  $[x_{i-1}, x_i]$ , on a,

$$\begin{aligned} S(x) &= S_{i-1}(x) = P(x) + \sum_{j=1}^{i-1} c_j (x - x_j)^3 \\ S'(x) &= S'_{i-1}(x) = P'(x) + 3 \sum_{j=1}^{i-1} c_j (x - x_j)^2 \\ S''(x) &= S''_{i-1}(x) = P''(x) + 6 \sum_{j=1}^{i-1} c_j (x - x_j) \end{aligned}$$

Sur  $[x_i, x_{i+1}]$ , on a,

$$\begin{aligned} S(x) &= S_i(x) = P(x) + \sum_{j=1}^i c_j (x - x_j)^3 \\ S'(x) &= S'_i(x) = P'(x) + 3 \sum_{j=1}^i c_j (x - x_j)^2 \\ S''(x) &= S''_i(x) = P''(x) + 6 \sum_{j=1}^i c_j (x - x_j) \end{aligned}$$

En utilisant ces équations, on a,

$$\begin{aligned} S(x_i-) &= S_{i-1}(x_i) = P(x_i) + \sum_{j=1}^{i-1} c_j (x_i - x_j)^3 = S_i(x_i) = S(x_i+) \\ S'(x_i-) &= S'_{i-1}(x_i) = P'(x_i) + 3 \sum_{j=1}^{i-1} c_j (x_i - x_j)^2 = S'_i(x_i) = S'(x_i+) \\ S''(x_i-) &= S''_{i-1}(x_i) = P''(x_i) + 6 \sum_{j=1}^{i-1} c_j (x_i - x_j) = S''_i(x_i) = S''(x_i+) \end{aligned}$$

Pour chaque  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $S, S', S''$  sont continues aux points  $x_i$ . Donc  $S$  est une spline cubique sur  $[x_i, x_{i+1}]$  pour chaque  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Ce qui implique que  $S$  est une spline cubique.