DIRO
IFT 2425

DEVOIR N° 2

Méthode de Gauss-Seidel & des Différences Finies

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/IFT2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Gauss-Seidel & Différences Finies

On considère un câble élastique qui occupe au repos le segment $[0,1]$, et fixé aux extrémités, sur lequel on applique une force d'intensité $f(x)$. On démontre que son déplacement au point x, c'est-à-dire $u(x)$, pour $x \in [0,1]$, est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Pour approcher la solution $u(x)$ de l'équation différentielle (1) on considère la discrétisation de l'intervalle $[0,1]$ en $(n-1)$ sous intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, et on construit une approximation u_i de $u(x_i)$ par la méthode des différences (ou éléments) finies.
Soient $h_s = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}$) et $x_i = i\,h_s$, pour $i = 1, \ldots, n$, (i.e., $x = [x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]^T$). Après discrétisation, cette méthode[1] conduit à la résolution numérique du système linéaire tridiagonale $Au = b$ suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix} \tag{2}$$

où $u = [u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}]^T = [u(x_1), u(x_2), u(x_3), \ldots, u(x_{n-1})]^T$, avec u^T, la transposée du vecteur u et $b = [f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})]^T$.

Bien sur, plus n est grand, plus l'approximation sera précise. D'un autre côté, plus la taille du système linéaire à résoudre sera aussi élevée.

[1] On verra la méthode des différences finies au Chapitre 6, Page 42 des notes de cours.

1. On va étudier la déformation du câble $u(x)$ lorsque une distribution de force $f(x)$ est appliquée sur celui-ci. On va considérer $f(x) = x\,\sin(3\,\pi\,x^2)$ et $n = 100$ sous intervalles spatiaux. Calculer la déformation du câble due à $f(x)$ en utilisant la méthode de Gauss-Seidel[2]. Une fois la solution (i.e., le vecteur de solution $u(.)$ de ce système) obtenu, vous devrez normaliser toutes les composantes de $u(.)$ en les multipliant par $h^2 = (1/n^2)$ pour que la solution ne dépende pas de la taille de la discrétisation ou du système à résoudre. On trouvera empiriquement dans cette question (et la suivante) le nombre d'itérations nécessaire à la convergence de l'algorithme.

2. On va maintenant étudier la déformation temporelle du câble $u(t,x)$ lorsqu'une distribution temporelle de force $f(t,x)$ est appliquée sur celui-ci. On va considérer

$$f(t,x) = x\,\sin\big[1.5\,\pi\,(2-t)\;x^2\big] \tag{3}$$

   Avec $h_t = 1/m$ ($m \in \mathbb{N}$) et $t_i = i\,h_t \in [0,1]$, pour $i = 1,\ldots,m$, (i.e., $t = [t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}]^T$).

   En utilisant cette discrétisation du temps, la déformation temporelle $u(t,x)$ du câble due à $f(t,x)$ consistera à résoudre m fois notre système $A\,u = b$ pour m vecteurs différents $b = f(t,x)$ (cf. Eq. (3)), $t = [t_1 = 1/20, t_2 = 2/20, \ldots, t_{m-1} = 19/20]^T$ pour obtenir m solutions $u(t,x)$ qui pourront se visualiser sous forme d'une séquence d'images[3] (prendre $m = 20$ et toujours $n = 100$).

[2]Vous pouvez prendre du code, libre de droit, sur internet et le modifier pour l'intégrer à votre programme. Néanmoins, ne tombez pas dans le piège de prendre plus de temps à chercher et adapter un code existant plutôt que de le refaire vous même.

[3]

Conseils Pratiques

Utiliser le programme que je vous donne sur ma page web. Ce programme initialise déja VCT_FX[K][I] par les valeurs discrétisée de $f(t,x)$ pour $t = [t_1 = 1/20, \ldots, t_{m-1} = 19/20]^T$ et $x = [x_1 = 1/100, \ldots, x_{n-1} = 99/100]^T$. Rassembler ensuite les m solutions de $u(t,x)$ dans VCT_UX[K][I] par la k-ième solution temporelle, et la suite du programme affichera à l'écran, sous forme d'une séquence d'images, l'évolution temporelle de la force et de la déformation temporelle du cable $u(t,x)$ due à cette force $f(t,x)$.

[4]

Remise & Rapport

Vous devez rendre électroniquement le(s) programme(s) fait en C/C++ avant la date de remise spécifiée dans le fichier *barême* situé sur la page web du cours. Pour la remise électronique, utilisez le programme *remise* (*man remise* pour plus de détails) pour remettre votre code dans le répertoire TP<Numéro du Tp>. N'oubliez pas d'inscrire vos noms, courrier électronique en commentaire en haut du fichier .c remis. Les noms des programmes à remettre devront avoir le format suivant *Tp<Numero du Tp>-IFT2425-<Numéro de la question>.c*. Les programmes devront se compiler et s'executer sur Linux tel qu'indiqué dans le barême.

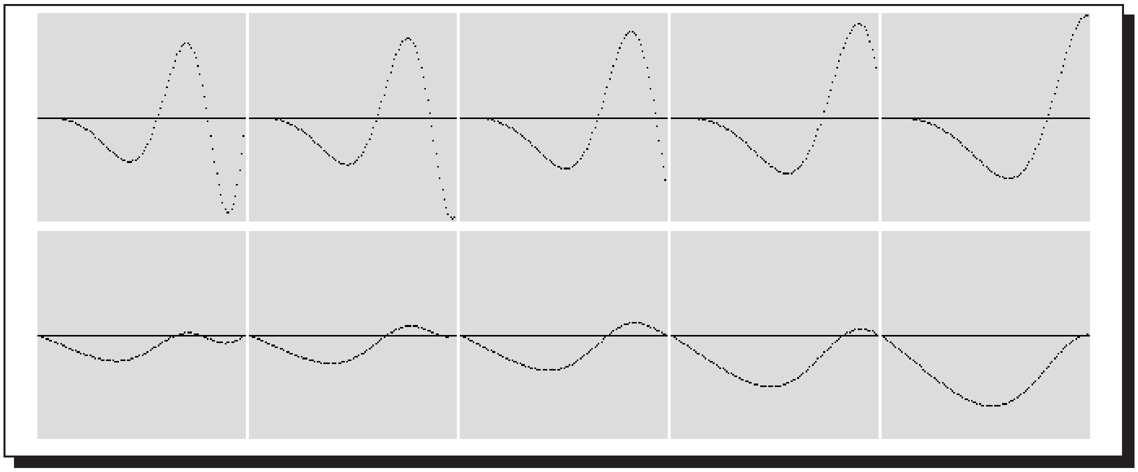

FIG. 1 – Évolution temporelle de la force et de la déformation temporelle du cable $u(t,x)$ due à cette force $f(t,x)$ pour les valeurs discrétisées du temps $t_0 = 0$, $t_5 = 5/20$, $t_{10} = 10/20$, $t_{15} = 15/20$ et $t_{19} = 19/20$.

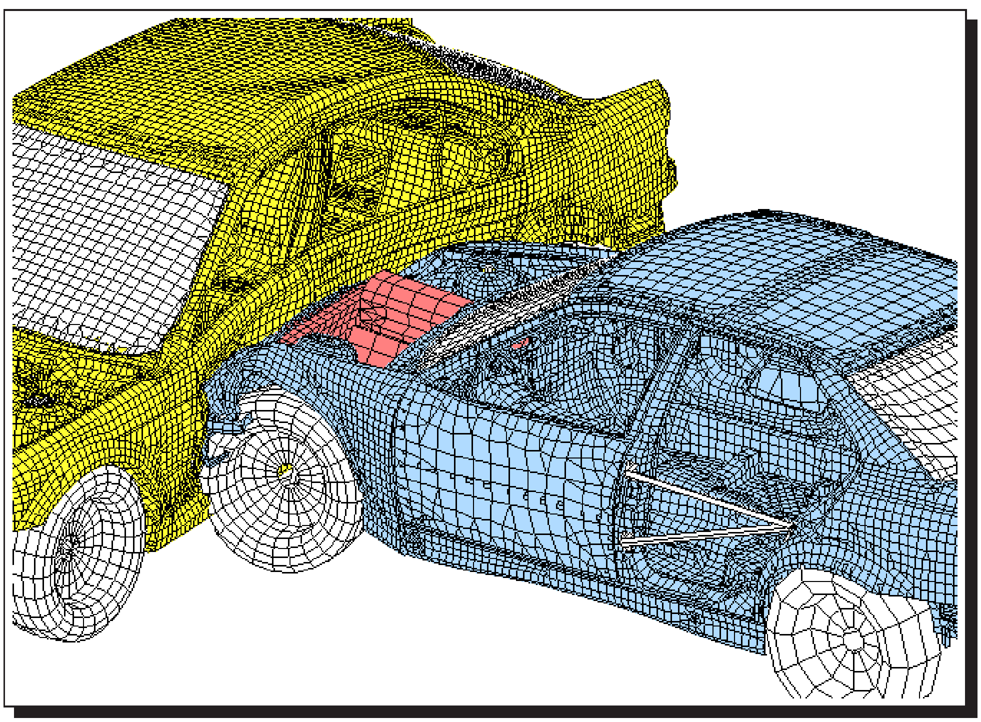

FIG. 2 – C'est cette même méthode (mais appliqué à un maillage plus compliqué que celui d'un simple câble élastique !) qui est utilisé lors des CRASH-TESTS pour évaluer la déformation temporelle d'une structure, tel un véhicule, en cas de choc ou de collision.