



DIRO
IFT 2425

DEVOIR N° 3 Intégration Numériques

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/IFT2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Intégration Numérique

Soit l'intégrale (pour $n \geq 0$) suivante :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx \quad n \geq 0 \quad (1)$$

I. Méthode de Simpson

1. Implémenter un programme (utilisant des nombres `DOUBLES`) permettant de calculer une valeur approchée de l'intégrale (1). Plus précisément, le programme doit pouvoir prendre en paramètre le nombre de sous-intervalles M (divisant le domaine d'intégration $[0; 1]$). Si ce nombre de sous-intervalles (M) est impair, le calcul doit commencer par la méthode de Simpson 1/3 et doit se terminer par la méthode de Simpson 3/8 pour les trois derniers intervalles. Si M est pair, faire tout le calcul numérique en utilisant seulement la méthode de Simpson 1/3.
2. La vraie valeur de cette intégrale est $I_{25} = 0.00645030526686$. Afficher sous forme de graphe¹ (cf. Fig. 1), l'erreur (en ordonnée) que l'on fera en fonction du nombre de sous intervalles M (en abscisse). On considèrera qu'un pixel en abscisse correspond à 10 sous intervalles.

1.

Conseils Pratiques

Utiliser le programme que je vous donne sur ma page web en initialisant la variable `FLAG_GRAPH=1` et remplir le tableau 2D nommé `Graph2D` dans le programme (initialement remplie de blanc) comme une feuille de papier dessin ou vous tracerez l'erreur de la suite des estimations du calcul de I_n , pour différentes valeurs de n , en considérant que n est l'abscisse et que l'erreur est l'ordonnée. Le programme que je vous donne sauvera cette image au format PGM. Vous pourrez ensuite la lire avec les logiciels `DISPLAY`, `XV` ou `GIMP` disponible sur Linux.

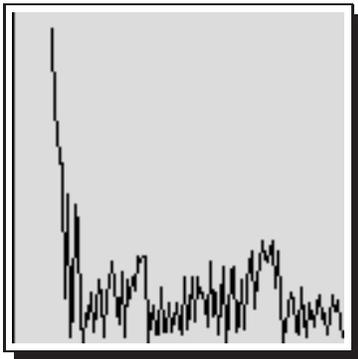


FIGURE 1 – Évolution de l’erreur en fonction de M (un pixel en abscisse correspond à 10 sous intervalles)

II. Méthode Itérative

Une autre façon de calculer une estimation de cette intégrale, consiste, lorsque c’est possible, à exploiter une relation de récurrence. Dans notre cas, une simple calcul permet de trouver la relation récurrente (que je vous encourage à retrouver par calcul) suivante :

$$I_n + 5 I_{n-1} = \frac{1}{n} \quad (2)$$

Dans notre cas, le calcul de I_{25} peut donc être estimée, par cette relation de récurrence, de deux façons différentes :

1. En partant de I_0 , qui peut être calculé facilement (et sans erreur), puisque

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{x+5} = [\ln(x+5)]_0^1 = \ln(6) - \ln(5) \approx 0.1823215568$$

puis en utilisant la relation de récurrence $I_n + 5 I_{n-1} = n^{-1}$ pour estimer, par itération successive ; $I_1, I_2, I_5, \dots, I_{25}$.

2. En utilisant la relation de récurrence mais en remontant en sens arrière. Dans un premier temps, remarquons que, pour des valeurs de n élevé, I_n va nécessairement converger vers 0. Cela peut se voir graphiquement ou alors en remarquant que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n + 5 I_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$$

Comme une valeur d’intégrale est forcément positive, cela va impliquer que I_n tendra vers zéro pour de forte valeur de n . Sachant cela, une possibilité pour l’estimation numérique de I_{25} , consiste à calculer, à partir de $I_{N_{MAX}} \approx 0$ (que l’on considerera comme étant quasi nulle), grâce à notre relation de récurrence (cf. Eq. (2)), $I_{N_{MAX}}, I_{(N_{MAX}-1)}, I_{(N_{MAX}-2)}, \dots, I_{25}$.

Implémenter sur ordinateur ces deux techniques itératives, avec des nombres DOUBLES. Pour la deuxième technique, le programme doit pouvoir prendre en paramètre la valeur de N_{MAX} . Indiquer dans un printf à la suite, à partir des éléments donnés dans le cours (cf. Chap. 1 “Propagation des erreurs numériques”), pourquoi la deuxième méthode itérative est stable (numériquement parlant) et pas la première ?

1.

Remise & Rapport

Vous devez rendre électroniquement le(s) programme(s) fait en C avant la date de remise spécifiée dans le fichier *barème* situé sur la page web du cours. Pour la remise électronique, utilisez le programme *remise* (*man remise* pour plus de détails) pour remettre votre code dans le répertoire TP<Numéro du Tp>. N’oubliez pas d’inscrire vos noms, courrier électronique en commentaire en haut du fichier .c remis. Les noms des programmes à remettre devront avoir le format suivant *Tp<Numero du Tp>-IFT2425-<Numéro de la question>.c*. Les programmes devront se compiler et s’exécuter sur Linux tel qu’indiqué dans le barème.