DIRO
IFT 2425

DEVOIR N° 4

Équations Différentielles & Bassin d'Attraction Fractal

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/IFT2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Équation Différentielle Du Pendule Magnétique

Le déterminisme, au sens de Newton, est une idée selon laquelle la connaissance de l'état d'un système à l'instant t permet de calculer son évolution à des temps arbitrairement lointains. Si cette notion de déterminisme était vraie, cela voudrait dire qu'un ordinateur surpuissant nous permettrait de prédire, sans erreur, la météo qu'il ferait dans une dizaine d'années.

Si cette pensée a été le pilier de la motivation scientifique depuis Newton, on s'aperçoit depuis un demi-siècle environ qu'elle est dans certaines conditions complètement fausse. Dans certains cas le déterminisme n'existe pas et il nous est donc impossible de calculer l'avenir d'un système plus longtemps qu'une certaine durée. Cette limite n'est en aucun cas une limite technologique. C'est une limite intrinsèque au système étudié, que l'on appelle communément le chaos ou l'effet papillon.

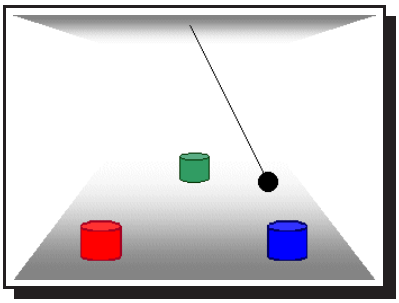

FIG. 1 –

Pour s'en convaincre, réalisons l'expérience suivante; considérons un pendule constitué d'une bille métallique supportée par un fil (cf. Fig. 1). Ce pendule oscille au-dessus de trois aimants (assez proches) disposés (autour d'un cercle) à 120°. La longueur du fil soutenant la bille est telle que la bille ne peut pas toucher les aimants, mais elle peut être attirée par eux.

Lorsque nous lançons le pendule au hasard dans une direction quelconque à partir d'une position initiale, nous observons un déplacement chaotique de la bille métallique. Mais contrairement à un pendule ordinaire (où seule la gravité agit) la bille métallique va subir l'attraction magnétique des aimants. Sa trajectoire est compliquée et au final elle va finir par s'approcher trop près d'un aimant et finir par pointer dans sa direction. Selon différentes positions initiales du pendule (x_0, y_0) (et pour une vitesse initiale nulle (x'_0, y'_0), nous observons un déplacement chaotique de la bille métallique, jusqu'à une stabilisation du pendule autour de l'un des trois aimants de couleurs différentes (cf. Fig. 2).

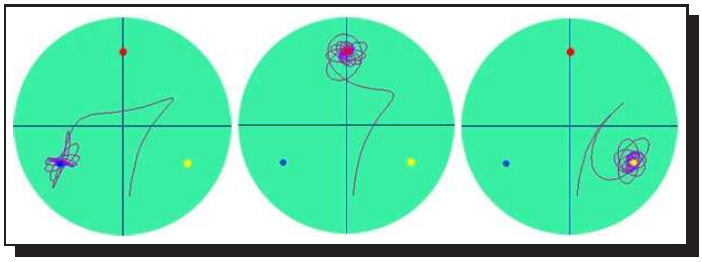

FIG. 2 – Les trois attractions possibles de la bille

Une démarche intéressante consiste maintenant à colorier le point à la verticale duquel la bille fut lâchée (i.e., en (x_0, y_0) dans la couleur de l'aimant au-dessus duquel la bille s'est immobilisée. Par exemple, si la bille, une fois lâchée au-dessus du point (x_0, y_0) (position initiale) s'immobilise au-dessus de l'aimant

rouge, nous colorions le point (x_0, y_0) en rouge. Cette procédure permet de définir les trois bassins d'attraction de ce pendule magnétique attiré ses trois aimants.

Les mesures expérimentales étant très difficiles à effectuer, il est préférable d'utiliser un modèle mathématique pour la simulation des bassins d'attraction. On utilise un système de deux équations différentielles que l'on résout numériquement par une méthode de Runge-Kutta, par exemple. Ces équations sont les suivantes, ou (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sont les coordonnées des 3 aimants, d les distances entre les aimants, R et C sont des paramètres. Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ expriment la position du pendule à l'instant t, $\partial x(t)/\partial t$ et $\partial y(t)/\partial t$ expriment la vitesse du pendule.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} + R\frac{\partial x(t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{3}\left\{\frac{(x_i - x)}{\left(\sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2+D^2}\right)^3}\right\} + Cx &= 0 \\
\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + R\frac{\partial y(t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{3}\left\{\frac{(y_i - y)}{\left(\sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2+D^2}\right)^3}\right\} + Cy &= 0
\end{aligned}$$

En essayant de visualiser les trois bassins d'attractions de ce pendule, on voit tout d'abord des taches de couleur uniforme, et des zones multicolores. En lâchant le pendule dans une de ces zones uniformes, la bille est tellement proche d'un des trois aimants qu'elle reste attirée par lui (les deux autres aimants exerçant une force minoritaire sur la bille).

Sur l'extérieur de la figure 3, les couleurs semblent s'emmêler de façons complètement désordonnées. La complexité de ces régions nous fait comprendre qu'il sera *à priori* difficile de prédire l'aimant sur lequel le pendule va finir en fonction du point de départ. A priori, ses points n'ont rien de particulier, et pourtant contrairement aux régions uniformes, l'entremêlement des couleurs nous dit qu'un petit décalage dans la position initiale du pendule change radicalement son évolution finale puisqu'il se retrouve carrément sur un aimant différent. Si on pouvait réaliser l'expérience un très grand nombre de fois et si on zoomait beaucoup dans les régions emmêlées, on pourrait voir que, peu importe le facteur de zoom, on verrait des couleurs emmêlées, c'est-a-dire, des points de différentes couleurs très proches. Rappelons qu'un point correspond à une condition initiale et que, à cause du zoom, cela signifie que la distance entre les points est très faible. Une couleur différente signifie que chaque lâché du pendule (sur chacun des points de couleurs différentes), a fini sur un aimant différent. Une condition initiale infiniment peu différente produit donc une trajectoire macroscopiquement très différente. Comme on ne peut connaitre la position du pendule qu'avec une précision finie (erreur de données ou d'affectation), il subsistera toujours une erreur. Sachant maintenant qu'une différence infime dans la position initiale du pendule mène à un comportement radicalement différent, on voit tout de suite que cette incertitude initiale, aussi petite soit-elle- va se traduire en une incertitude macroscopique au bout d'un certain temps. Pour un système chaotique, l'incertitude du calcul croit exponentiellement avec le temps ! Bien sur, plus la condition initiale est précise au départ, plus vous êtes précis longtemps, mais le temps arrivera inexorablement où l'incertitude ou l'imprecision de votre prédiction sera aussi grande que la prédiction elle-même et qu'elle serait donc sans aucune valeur.

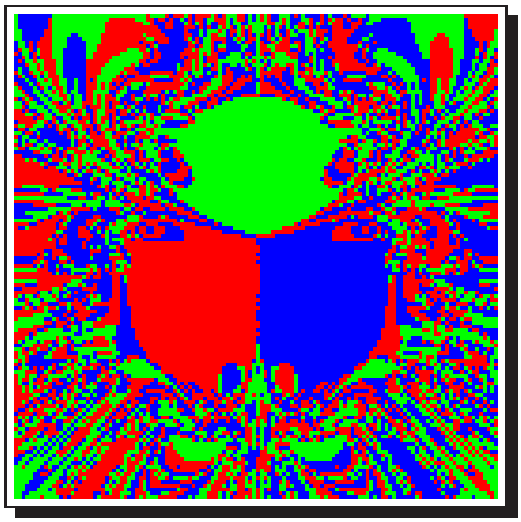

FIG. 3 – Les trois bassins d'attractions pour les paramètres $h = 0.1$, $t_0 = 0$, $t_{\text{final}} = 10$ pour une image de taille 128×128 (≈ 30 sec. de calcul).

1. Dans ce TP, je vous demande d'obtenir une estimée numérique de la solution de cette équation différentielle par la méthode de Runge-Kutta Fehlberg et de tracer la solution obtenue dans une image dans le plan (x, y) qui sera ensuite visualisée avec le logiciel de traitement d'images gratuit "XnView" ou "Gimp" sur l'écran de l'ordinateur[1] (cf. Fig. 4).

   Les paramètres de ce problème sont les suivants :

   pour une image dont $x \in [-2\ 2]$ et $y \in [-2\ 2]$ les coordonnés des trois aimants sont :
   $[x_1 = 0\,;\, y_1 = 1]$, $[x_2 = -1/(\sqrt{2})\,;\, y_2 = -1/2]$, $[x_3 = 1/(\sqrt{2})\,;\, y_3 = -1/2]$,
   $C = 0.25$, $R = 0.1$, $D = 0.3$, $\partial x(t=0)/\partial t = \partial y(t=0)/\partial t = 0$

2. De visualiser l'image des trois bassins d'attractions de ce système de pendule avec trois aimants, comme celle obtenue en Fig. 3.

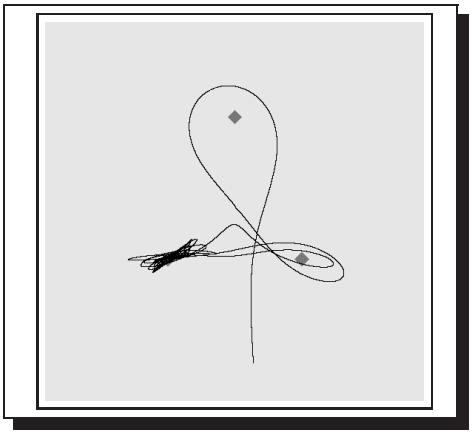

FIG. 4 –
Mouvement du pendule obtenu pour les paramètres $x(t_0) = 0.2$, $y(t_0) = -1.6$, $h = 0.0001$, $t_0 = 0$, $t_{\text{final}} = 30$ pour une image de taille 512×512.

Soit $x'(t) = f(t, x(t))$ et $x(t_n) = x_n$, pour calculer $x(t_{n+1}) = x_{n+1}$ avec $t_{n+1} = t_n + h$, on doit évaluer

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(t_n, x_n) \\
k_2 &= h \cdot f\Big(t_n + \frac{h}{4},\ x_n + \frac{k_1}{4}\Big) \\
k_3 &= h \cdot f\Big(t_n + \frac{3h}{8},\ x_n + \frac{3k_1}{32} + \frac{9k_2}{32}\Big) \\
k_4 &= h \cdot f\Big(t_n + \frac{12h}{13},\ x_n + \frac{1932k_1}{2197} - \frac{7200k_2}{2197} + \frac{7296k_3}{2197}\Big) \\
k_5 &= h \cdot f\Big(t_n + h,\ x_n + \frac{439k_1}{216} - 8k_2 + \frac{3680k_3}{513} - \frac{845k_4}{4104}\Big) \\
k_6 &= h \cdot f\Big(t_n + \frac{h}{2},\ x_n - \frac{8k_1}{27} + 2k_2 - \frac{3544k_3}{2565} + \frac{1859k_4}{4104} - \frac{11k_5}{40}\Big) \\
x_{n+1} &= x_n + \Big(\frac{16k_1}{135} + \frac{6656k_3}{12825} + \frac{28561k_4}{56430} - \frac{9k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}\Big)
\end{aligned}
$$

ALGORITHME DE RUNGE-KUTTA FEHLBERG

[1]

Conseils

Utiliser les fonctions du programme *ProgDemo.c* pour la visualisation et la sauvegarde dans une image. Cf. Page Web.

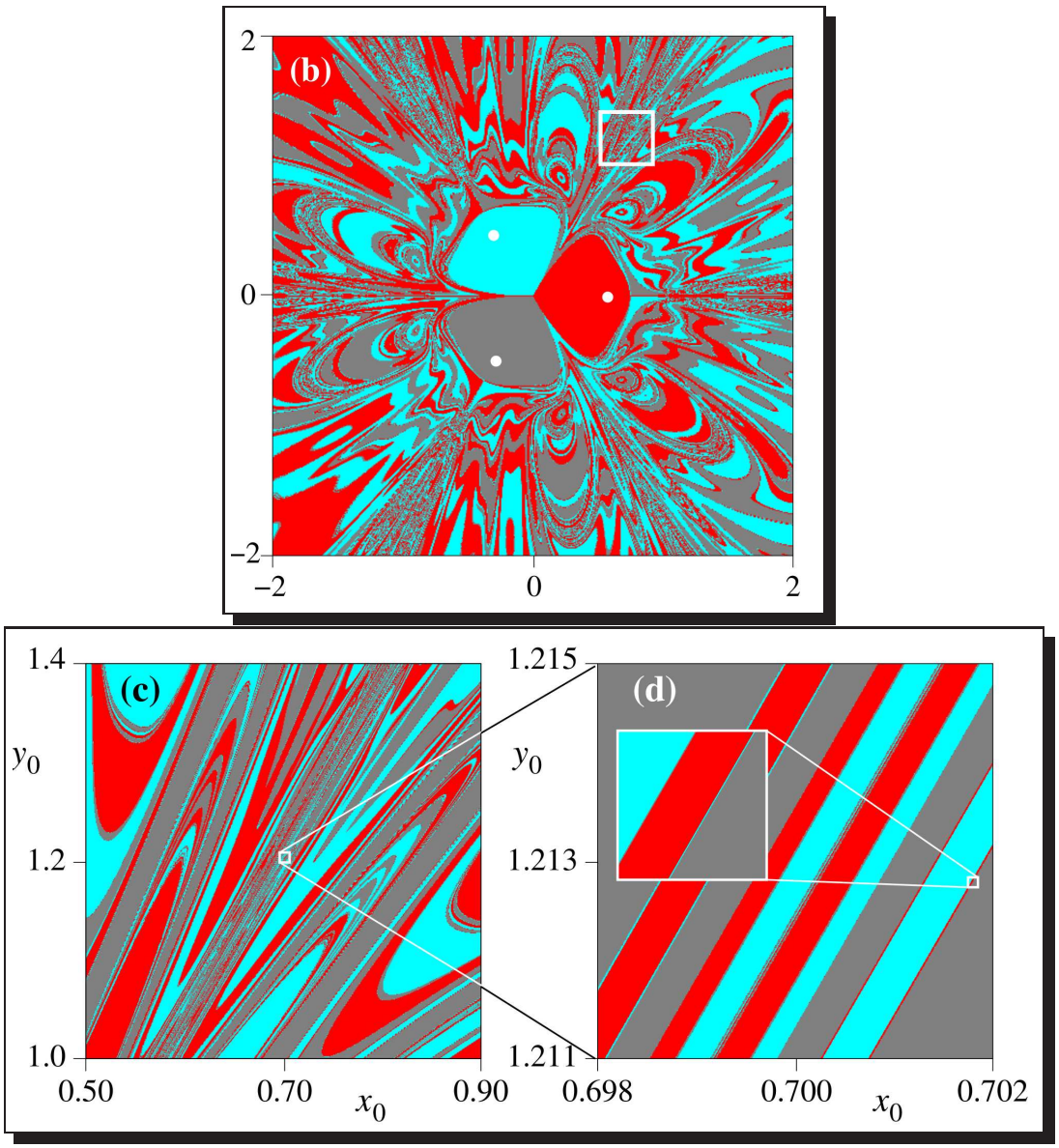

FIG. 5 – Un calcul plus intensif (plusieurs heures), extrait de [1] montrant les trois bassins d'attraction pour d'autres valeurs de paramètre et quelques agrandissements montrant l'aspect fractal et chaotique de ce phénomème d'attraction.

Réferences

[1] Adilson E. Motter, Marton Gruiz, Gyorgy Karolyi, Tamas Doubly Transient Chaos : The Generic Form of Chaos in Autonomous Dissipative Systems. *Physical Review Letters*, 2013.

[2] Wikipédia.

[2]

Remise & Rapport

Vous devez rendre électroniquement le(s) programme(s) fait en C avant la date de remise spécifiée dans le fichier *barême*. Pour la remise électronique, utilisez le programme *remise* pour remettre votre code dans le répertoire TP<Numéro du Tp>. N'oubliez pas d'inscrire vos noms, courrier électronique en commentaire en haut du fichier .c remis qui devront se compiler et s'executer sur Linux et avoir le format suivant *Tp<Numero du Tp>-IFT2425-<Numéro de la question>.c*.

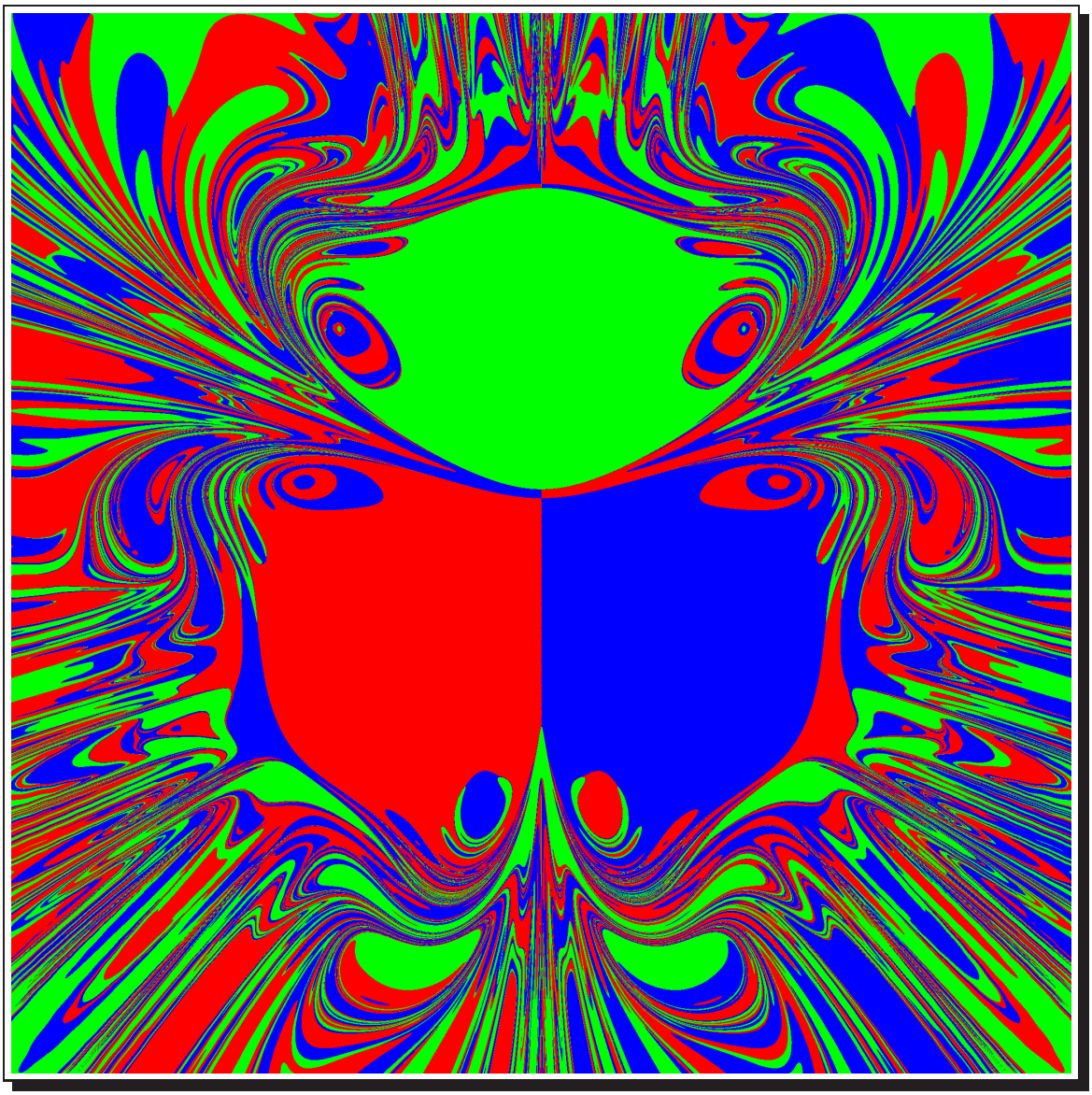

FIG. 6 – Les trois bassins d'attractions pour les paramètres $h = 0.1$, $t_0 = 0$, $t_{\text{final}} = 10$ pour une image de taille 2048×2048 (≈ 120 minutes de calcul).

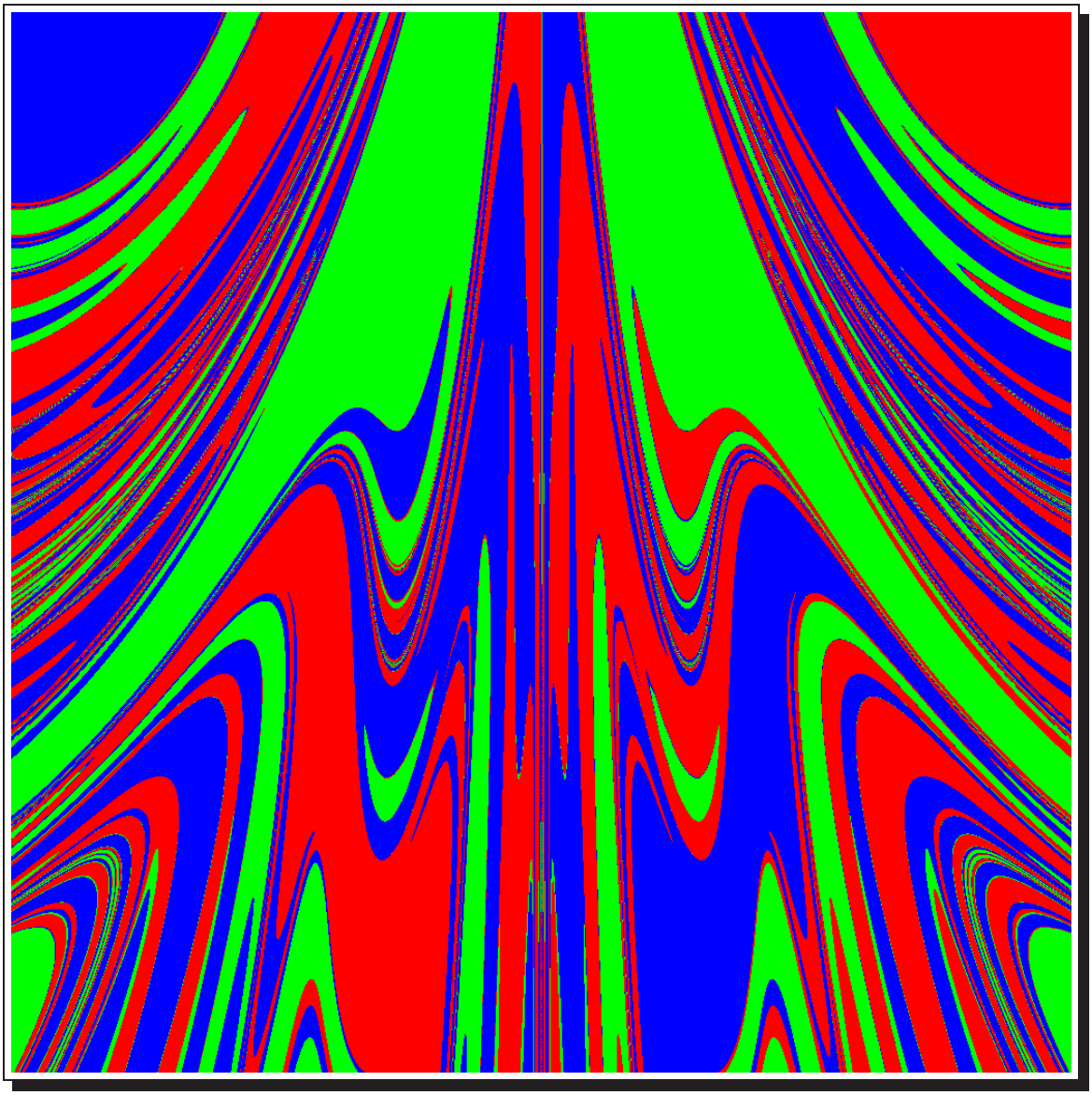

FIG. 7 – Agrandissement de la partie inférieure de la Fig. 6.