

DIRO
IFT 3205

TRAITEMENT DU SIGNAL

ANALYSE SPECTRALE

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

ANALYSE SPECTRALE

SOMMAIRE

Analyse Spectrale Élémentaire	2
Interpolation Fréquentielle	6
Fenêtre d'apodisation	7
Densité Spectrale	12
Analyse Temps-Fréquence	16
Corrélation et Densité Spectrale	21

ANALYSE SPECTRALE

ANALYSE SPECTRALE ÉLÉMENTAIRE (1)

Relation temps-fréquence

Soit un signal échantillonné en respectant la condition de Shannon. Comme les domaines temporel et fréquentiel sont discrétisés avec le même nombre de points N

- La période d'échantillonnage ΔT est liée à la durée de l'enregistrement T

$$\Delta T = \frac{T}{N}$$

- La résolution fréquentiel ($\Delta\nu$ ou Δf) est liée à la durée de l'enregistrement T

$$\Delta\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{N \cdot \Delta T}$$

On en déduit

$$\Delta T \cdot \Delta\nu = \frac{1}{N}$$

Résolution fréquentielle \times Tps d'observation = 1

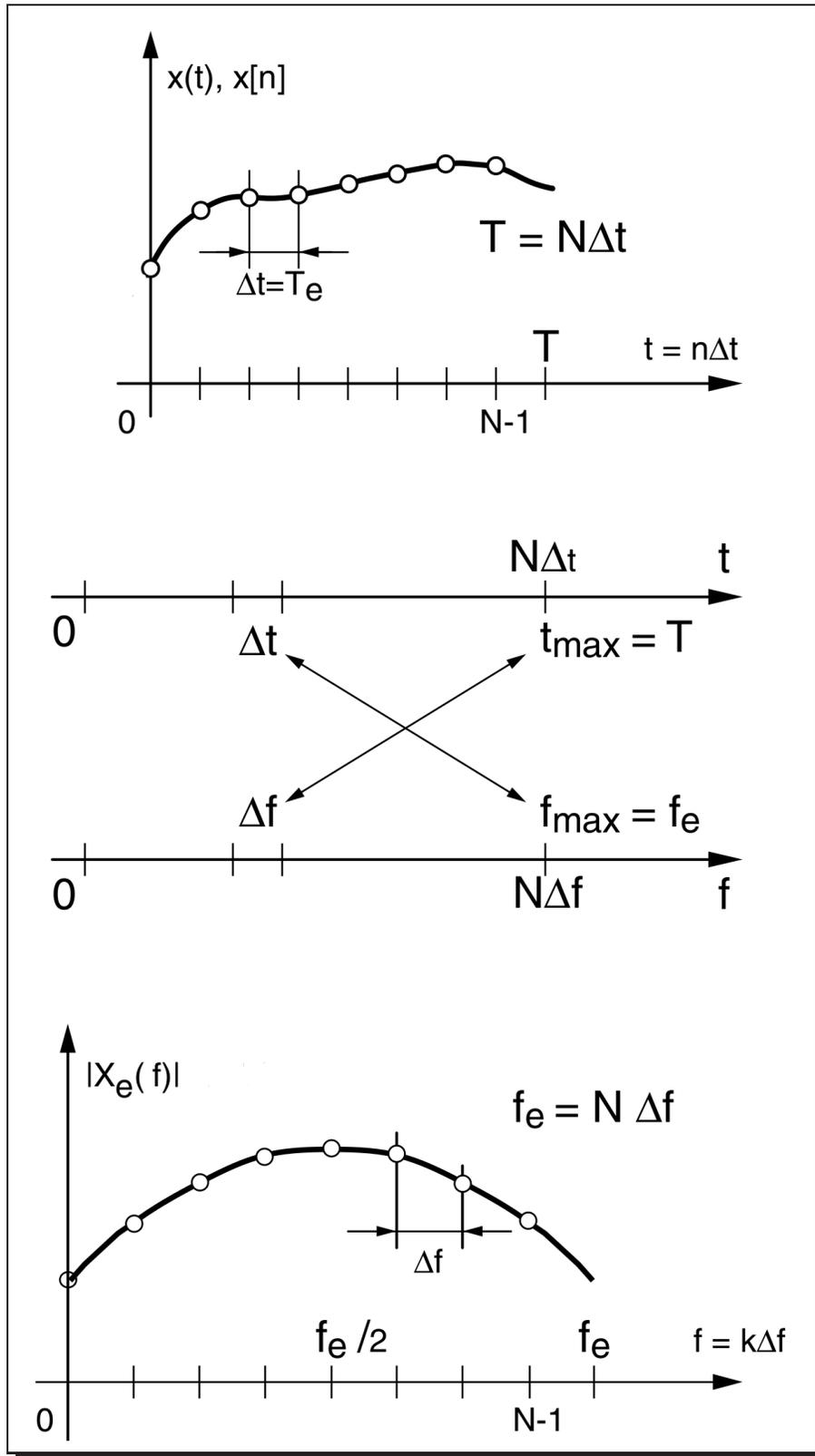


Donc : Pour un nb. donné de points N , impossible d'avoir simultanément une très bonne définition temporelle (Δt petit) et fréquentielle ($\Delta\nu$ ou Δf petit)

ANALYSE SPECTRALE

ANALYSE SPECTRALE ÉLÉMENTAIRE (2)

Interprétation de la Relation temps-fréquence

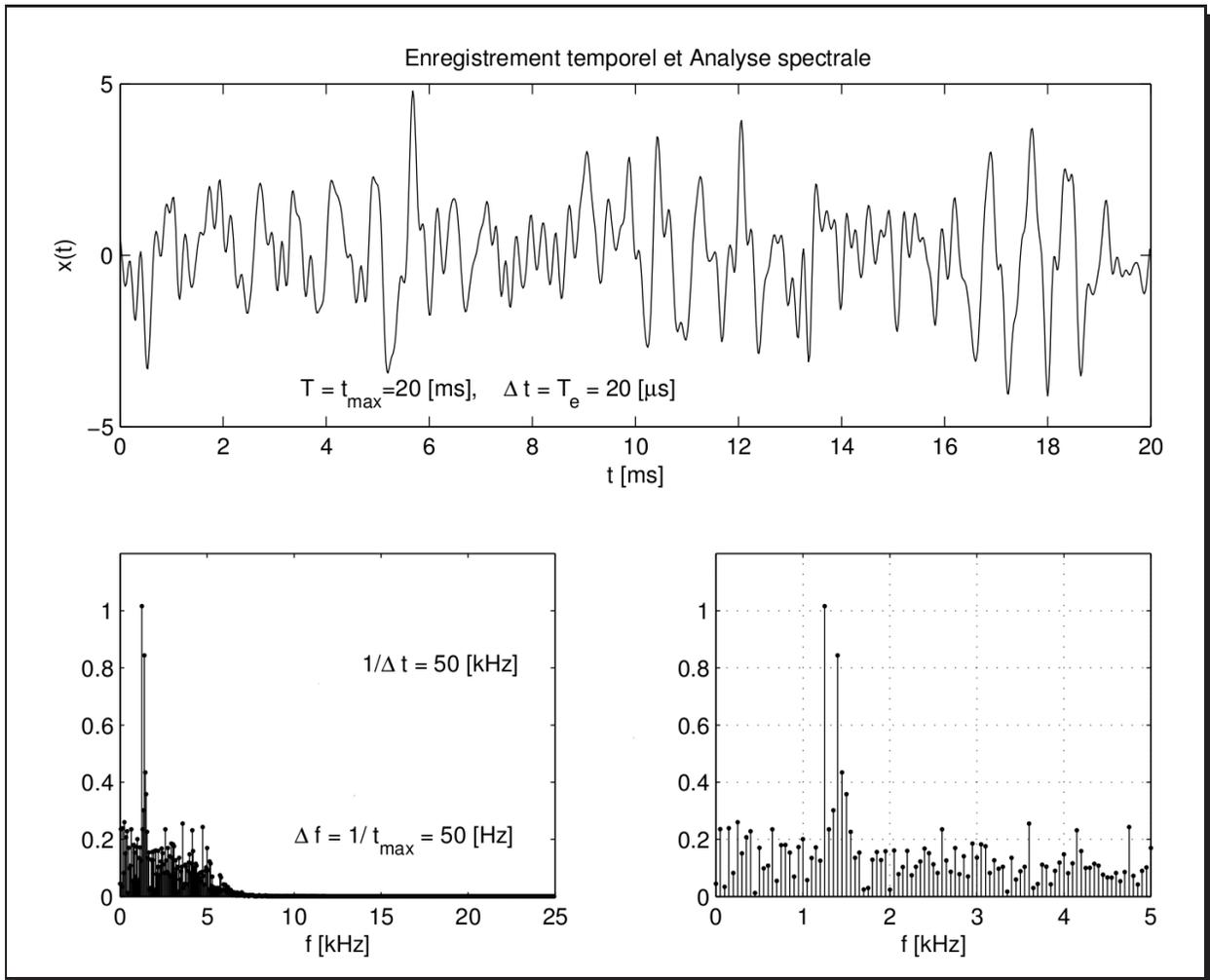


ANALYSE SPECTRALE

ANALYSE SPECTRALE ÉLÉMENTAIRE (3)

Exemple 1

Soit un signal bruité dont on souhaite savoir si celui-ci contient une oscillation périodique et sa fréquence



- Période d'échantillonnage $\Delta T = 20 \mu s$
- Durée du signal $T = 20 \text{ ms}$

- ▶ 1000 échantillons (500 échantillons pour $\nu > 0$)
- ▶ $\Delta \nu = \frac{1}{T} = 50 \text{ Hz}$

2 raies spectrales semblent s'élever au dessus du bruit

1 $f_1 = 1.25 \text{ kHz} \pm 25 \text{ Hz}$ (Amplitude= 1.02)

2 $f_2 = 1.40 \text{ kHz} \pm 25 \text{ Hz}$ (Amplitude= 0.85)

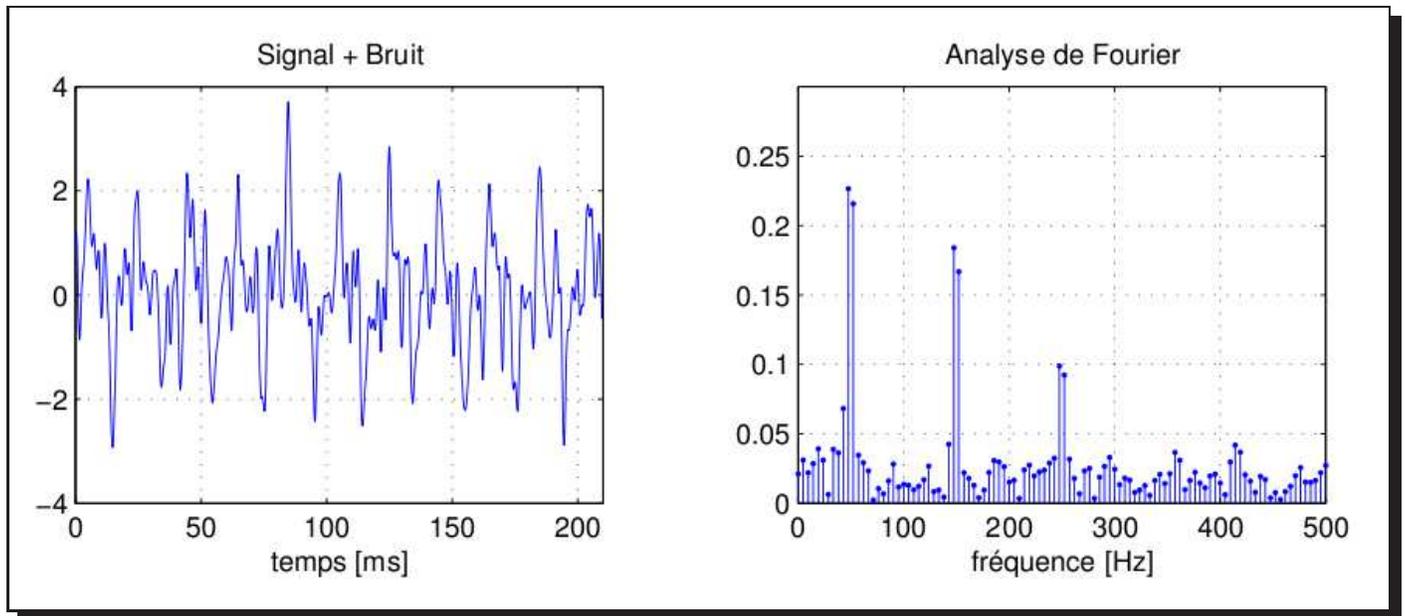
ANALYSE SPECTRALE

ANALYSE SPECTRALE ÉLÉMENTAIRE (4)

Exemple 2

Soit un signal connu

$$x(t) = 1 \cdot \sin(2\pi \cdot 50t) - 0.8 \cdot \sin(2\pi \cdot 150t) + 0.5 \cdot \sin(2\pi \cdot 250t) + \text{Bruit}$$



- Période d'échantillonnage $\Delta T = 0.2$ ms
- Durée du signal $T = 210$ ms

- ▶ 1050 échantillons (525 échantillons pour $\nu > 0$)
- ▶ $\Delta\nu = \frac{1}{T} = 4.76$ Hz

La résolution fréquentielle $\Delta\nu$ n'est pas un sous multiple des fréquences 50, 150 et 250 Hz

⇔

L'analyse spectr. ne permettra pas de retrouver 3 Diracs !

Peut on augmenter la résolution fréquentielle ?

Oui par **interpolation fréquentielle**

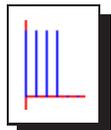
ANALYSE SPECTRALE

INTERPOLATION FRÉQUENTIELLE

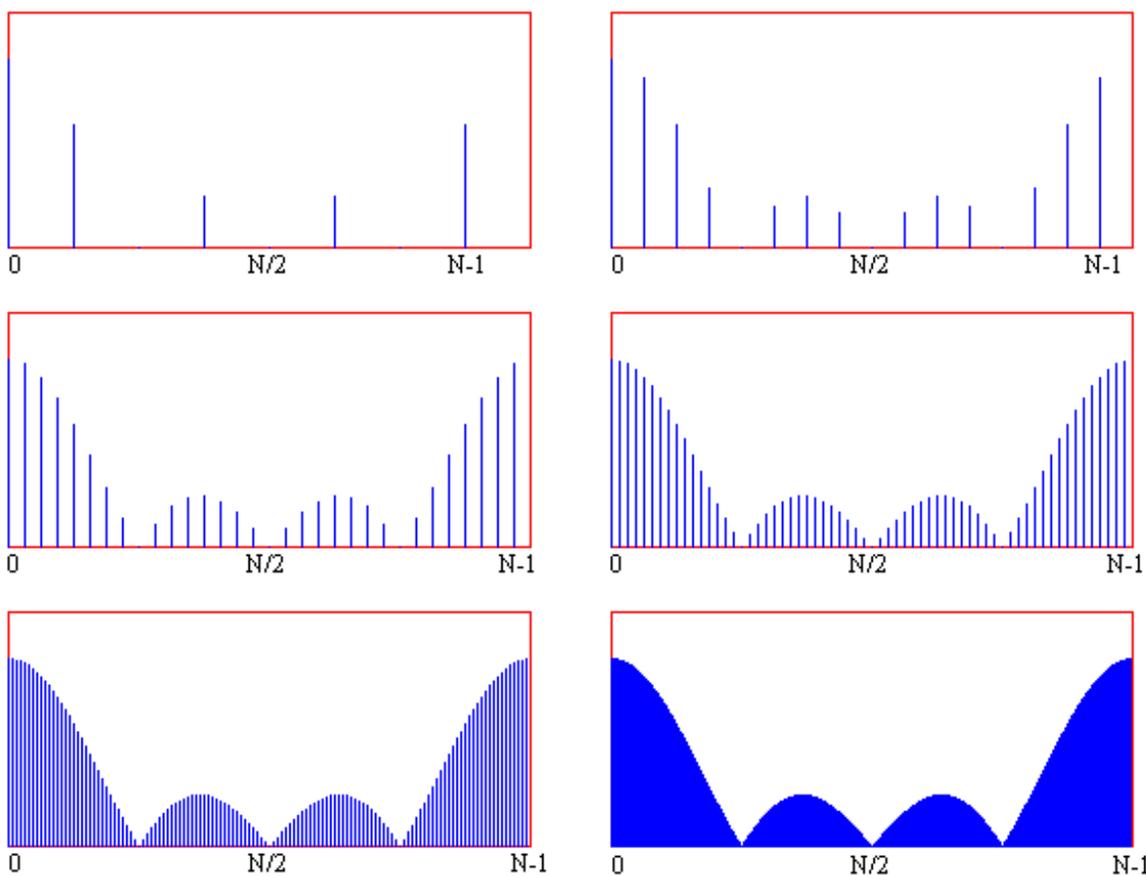
L'interpolation fréquentielle ou la technique d'addition de zéros (*zero padding*) permet d'augmenter la résolution fréquentielle du spectre

L'ajout de zéros au signal : $\nearrow N\Delta T \Leftrightarrow \searrow \Delta\nu = 1/N\Delta T$

Exemple



Calcul du spectre de et ajout de zéros pour obtenir 16, 32, 64, 128 et 256 échantillons



La FFT exige un nb. de pts = à une puissance de 2

► Lorsque \parallel ce n'est pas le cas ou \parallel on veut augmenter la résolution fréq.

On complète les données par une succession de zéros jusqu'à obtenir un nb. égal à la puissance de 2

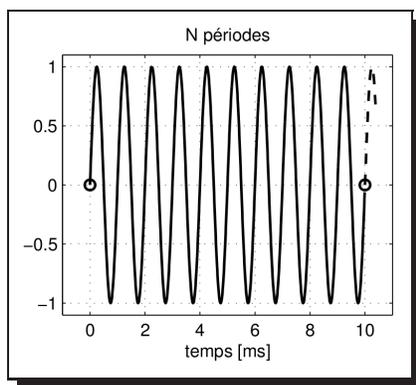
ANALYSE SPECTRALE

FENÊTRE D'APODISATION (1)

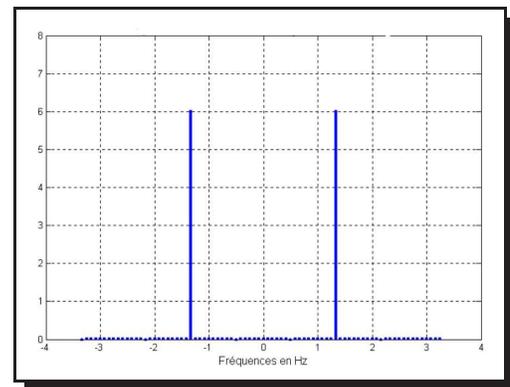
Rappel Important : Le calcul de la TFD sur un signal (de longueur et/ou de durée finie) est équivalent au calcul la TF de ce même signal rendu périodique
ou
La TFD travaille sur un bloc (finie d'échantillons) considéré comme périodique

1er cas

Le signal se répète périodiquement sans discontinuité :
Ex : on prend un nb. entier de période pour un sinus



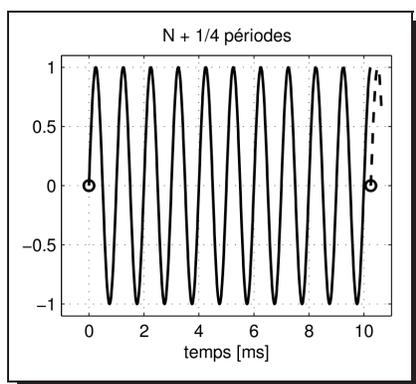
TFD
 \rightleftharpoons



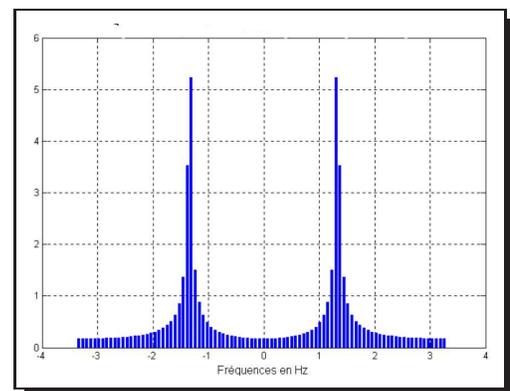
Résolution Fréquentielle : $\Delta\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta T}$

2ième cas

Le signal se répète périodiquement avec discontinuité :
Ex : on prend un nb. non entier de période pour un sinus



TFD
 \rightleftharpoons

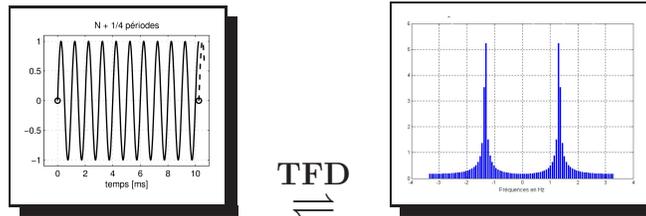


Transitions brusques \Leftrightarrow Htes fréquences parasites

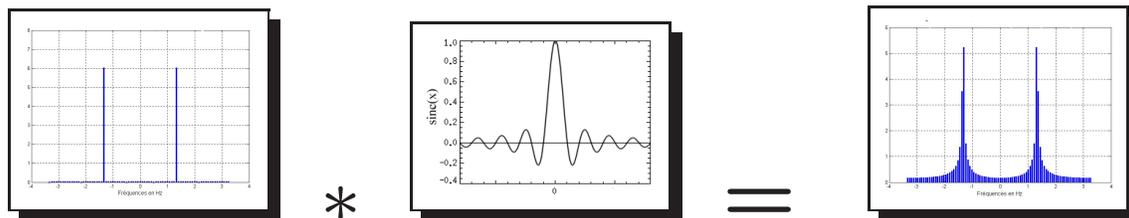
ANALYSE SPECTRALE

FENÊTRE D'APODISATION (2)

Pourquoi ?



car dans le domaine fréquentiel :



$$F_{\text{idéal}}(\nu) * \mathcal{F}\{\text{Fenêtre}(t)\} = F(\nu)$$

⇓

Distorsion ou étalement spectral (* $\mathcal{F}[\text{Fenêtr}(t)]$)

- **Résolution fréquentiel** : \propto Lobe principal (= $2/T$)
- **Résolution en amplitudes** : Lobes secondaires

Donc : Dans toute analyse numérique des signaux (temp. ou fréquentielle), on est contraint d'enregistrer une durée finie du signal (*apodisation* ou *fenêtrage*) \Leftrightarrow **effets indésirable lors de l'analyse**

Il faut donc soit :

1. Enregistrer un nb entier de période du signal
2. Ramener les deux extrémités du signal à une valeur identique à l'aide d'une fenêtre qui modifie aussi peu que possible le spectre réel

ANALYSE SPECTRALE

FENÊTRE D'APODISATION (3)

Le but d'une fenêtre est donc d'atténuer les discontinuités n'appartenant pas au signal d'origine

En pratique

Signal impulsionnel long \Leftrightarrow raccourcissement avec une exponentielle décroissante

Signal tronqué au début et à la fin \Leftrightarrow fenêtre à choisir en fonction de l'usage qui en sera fait

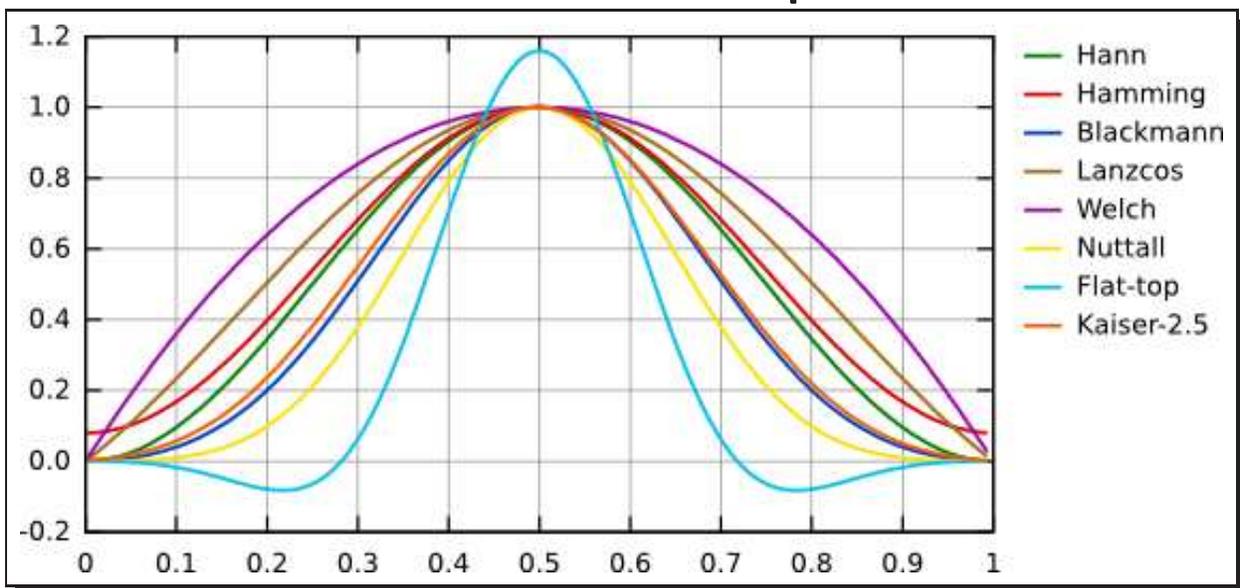
La fenêtre idéale à dans le domaine fréquentiel

1. Lobe central très étroit : résolution fréquentielle (pouvoir séparateur)
2. Lobes latéraux très faibles : résol. en amplitude (pouvoir de détection) et étalement spectral



Le choix d'une fenêtre est un compromis entre ces deux exigences

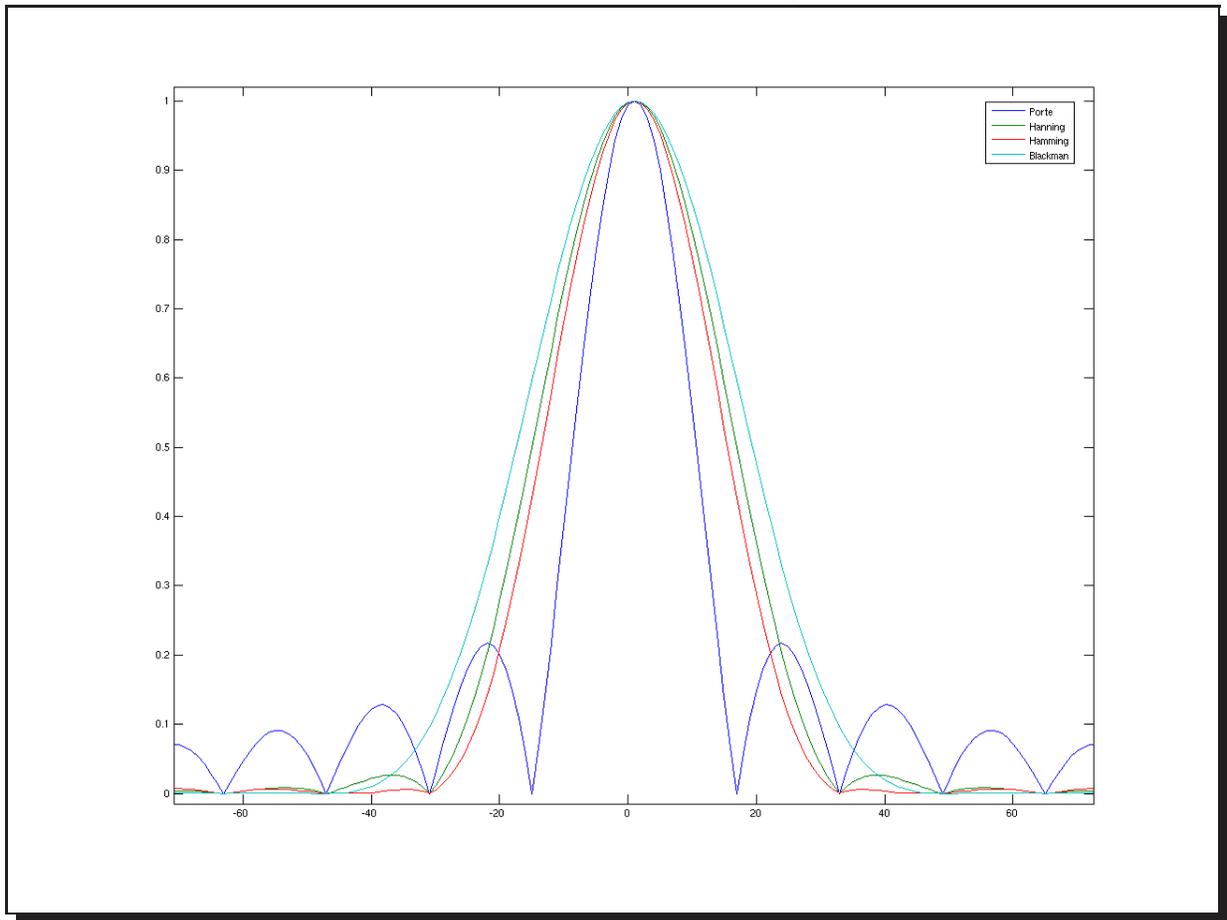
Dans le domaine spatial



ANALYSE SPECTRALE

FENÊTRE D'APODISATION (4)

Dans le domaine fréquentiel



Choix d'une fenêtre

1. **Rectangulaire** : Dans le cas de **signaux transitoire ou non permanents** et dans le cas de signaux périodique lorsqu'on est sur que le nb de périodes enregistrées est un entier
2. **Hanning** : Bon compromis sauf dans le cas de **composantes spectrales trop proches**
3. **Hamming** : **meilleure définition spectrale** mais ne permet pas de voir des **composantes spectrales de faibles amplitudes**
4. **Blackman** : permet de bien distinguer les **raies spectrales proches et de faibles amplitudes**

ANALYSE SPECTRALE

FENÊTRE D'APODISATION (5)

Hanning a un bon compromis resolution fréquentielle & amplitude et est satisfaisante dans 95% des cas

- || Meilleure résolution fréquentielle ► Hamming
- || Meilleure résolution d'amplitude ► Kaiser-Bessel

Équation des Fenêtres

Hanning

$$w_c(n) = 0.5 \cdot \left(1 - \cos\left(2\pi \cdot \frac{n}{N}\right) \right)$$

Hamming

$$w_h(n) = 0.54 - 0.46 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{n}{N}\right)$$

Blackman

$$w_b(n) = 0.42 - 0.5 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{n}{N}\right) + 0.08 \cdot \cos\left(4\pi \cdot \frac{n}{N}\right)$$

Kaiser Bessel

$$w_{kb}(n) = 0.35875 - 0.48829 \cos\left(22\pi \cdot \frac{n}{N}\right) + \\ 0.14128 \cos\left(4\pi \frac{n}{N}\right) - 0.01168 \cos\left(6\pi \frac{n}{N}\right)$$

...

ANALYSE SPECTRALE

DENSITÉ SPECTRALE (1)

DSP : Densité Spectrale de Puissance

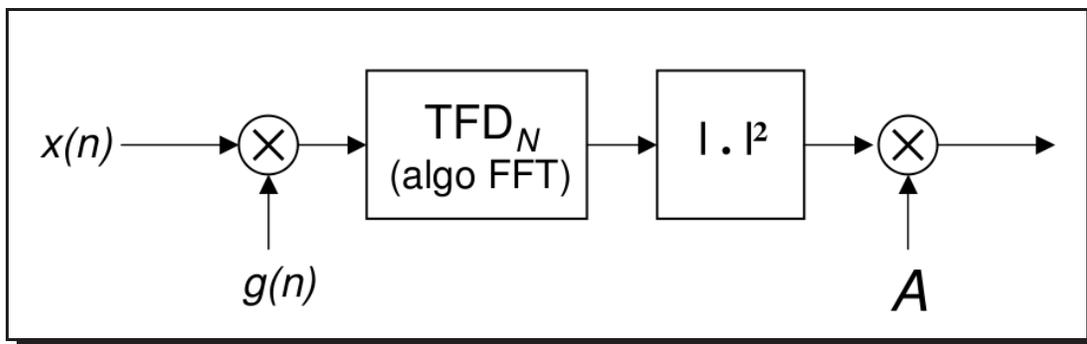
“Répartition dans le domaine fréquentiel de la puissance moyenne du signal”

Le calcul de la DSP d'un signal $x(t)$ est $|X(\nu)|^2$ que l'on peut obtenir par :

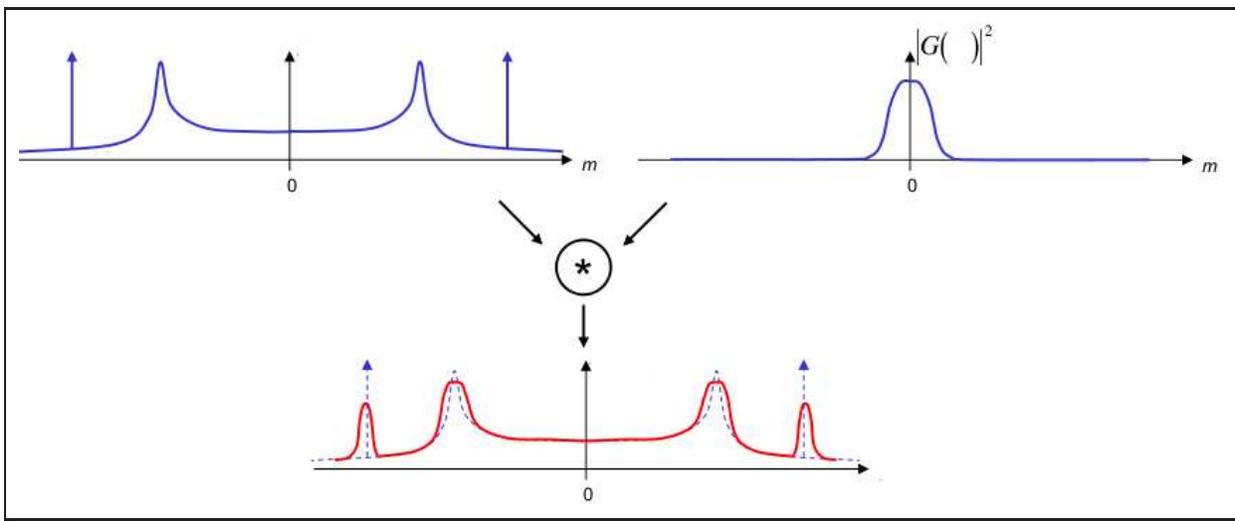
|| **1** DSP $[x(t)] = |\mathcal{F}(x(t))|^2$

|| **2** DSP $[x(t)] = \mathcal{F}[C_{xx}(t)]$

1 Estimateurs basés sur le périodogramme



- $g(n)$ fenêtre de pondération
- A factor de normalisation



ANALYSE SPECTRALE

DENSITÉ SPECTRALE (2)

Biais et Variance de cet Estimateur

Biais

- Faible si variations spectre lentes dans la bande de $|G(\nu)|$
- Fort si variations spectre rapides dans la bande de $|G(\nu)|$

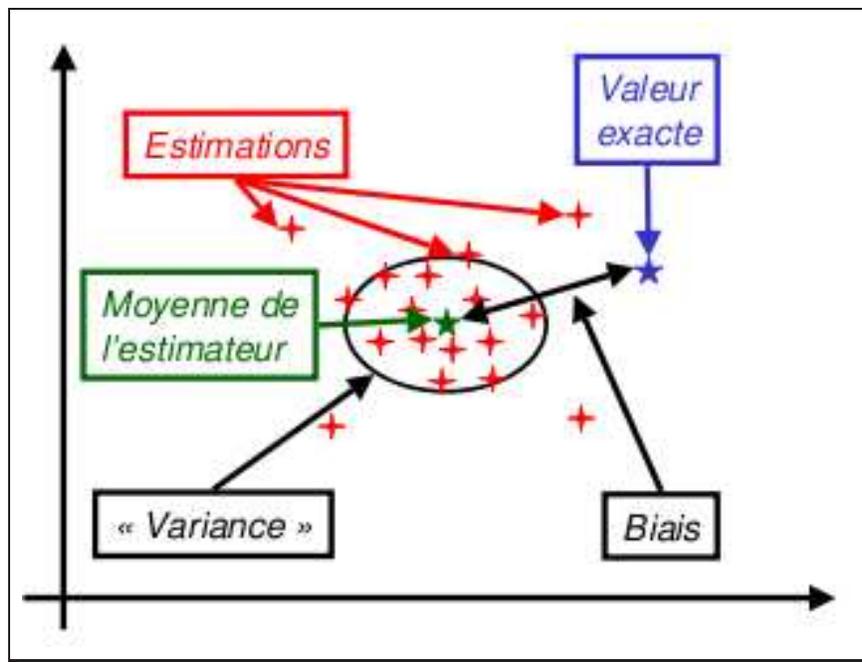
Variance

- Variance relative constante $\forall N$!

⇔ Inexploitable pour les signaux aléatoires

Rappel

Un estimateur est un outil de mesure permettant d'évaluer la valeur d'un paramètre



ANALYSE SPECTRALE

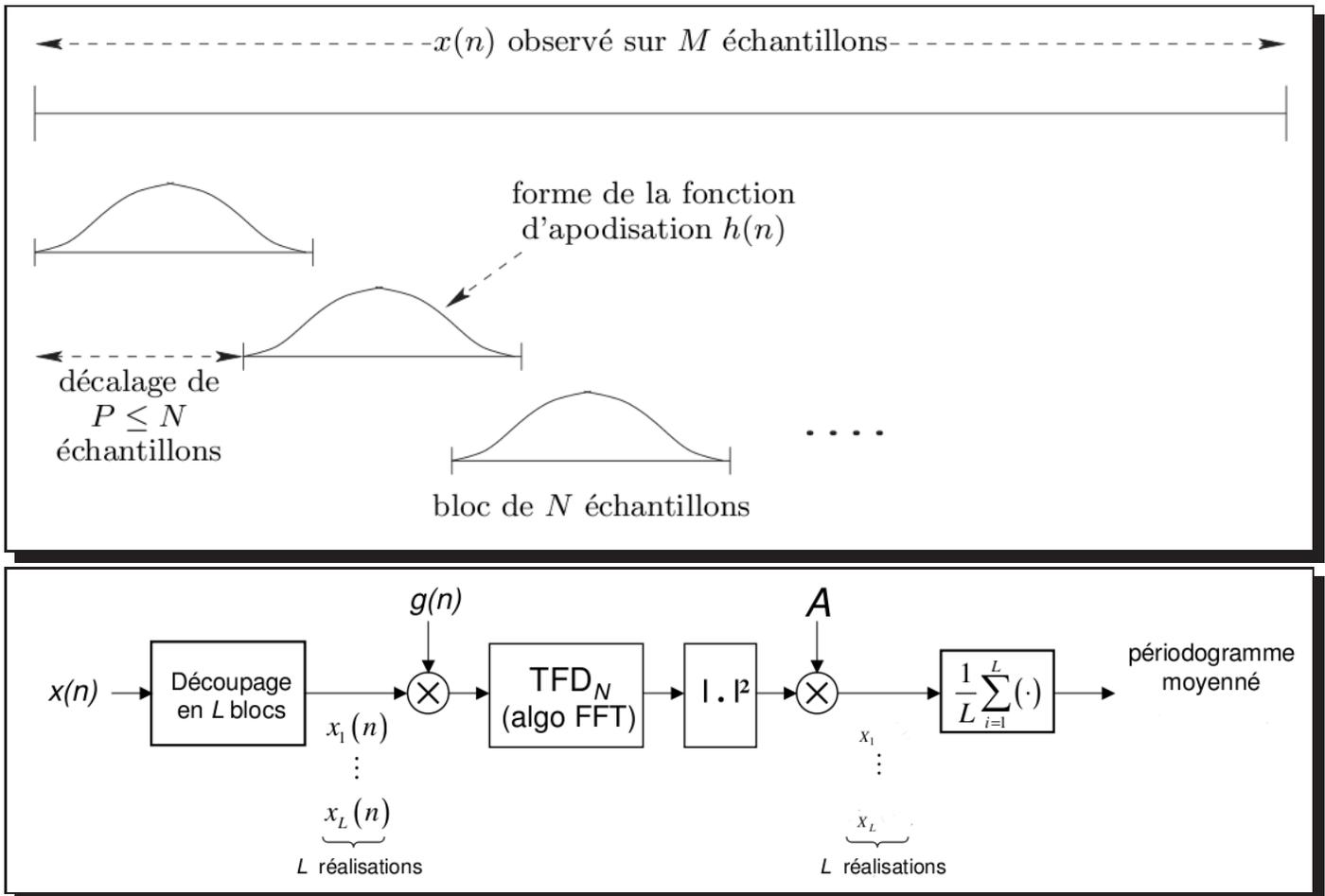
DENSITÉ SPECTRALE (3)

Remarque sur le Périodogramme

Performances

- || • Aprox^t. non biaisé pour spectres à variations lentes
 - || • Variance relative constante
- ⇔ Sinaux déterministes ou très peu bruités uniquement

Périodogramme Moyenné



ANALYSE SPECTRALE

DENSITÉ SPECTRALE (4)

Biais et Variance de cet Estimateur

Biais

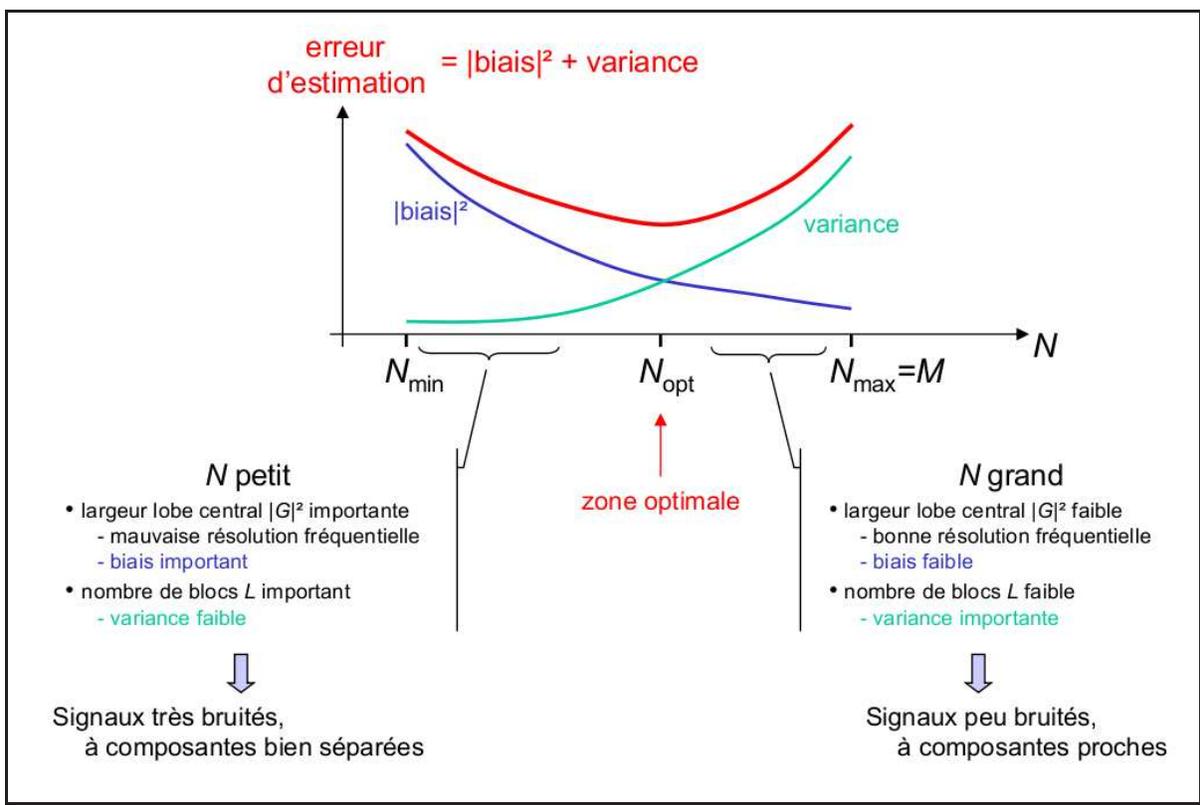
- Faible si variations spectre lentes dans la bande de $|G(\nu)|$
- Fort si variations spectre rapides dans la bande de $|G(\nu)|$

Variance

- Inversement proportionnelle au nb. de blocs L

⇔ Bien adapté au signaux bruités

Nota : Comment régler la taille N d'un bloc



ANALYSE SPECTRALE

ANALYSE TEMPS-FRÉQUENCE (1)

Remarque

La TF est capable de donner les fréquences présentes dans un signal mais pas leur instant d'apparition. Ainsi

La Transformée de Fourier de



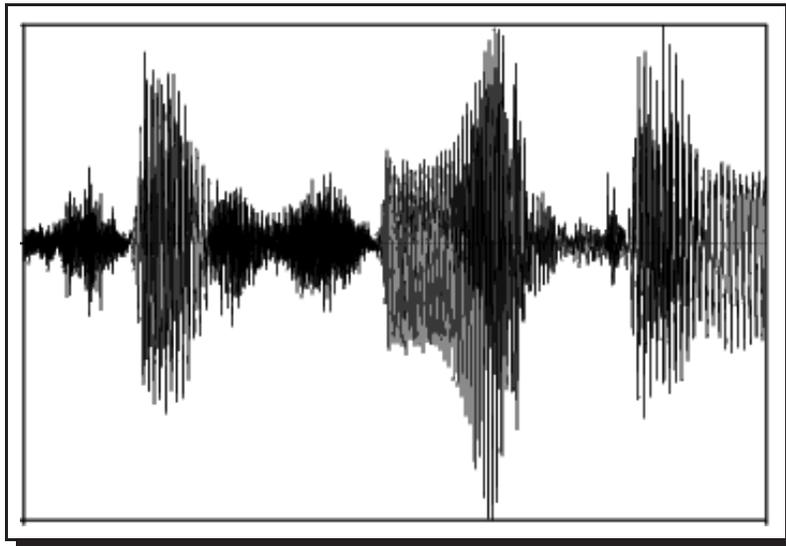
=

La Transformée de Fourier de



On souhaiterait que les paramètres réalisent une analyse à la fois en **temps** et en **fréquence**

Par ex. pour pouvoir analyser le signal de parole



C'est l'analyse **temps-fréquence** qui permet d'obtenir cette information

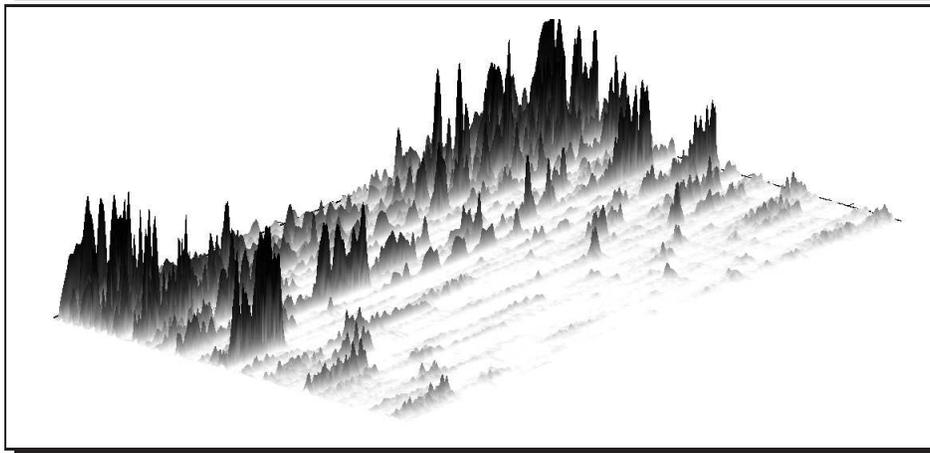
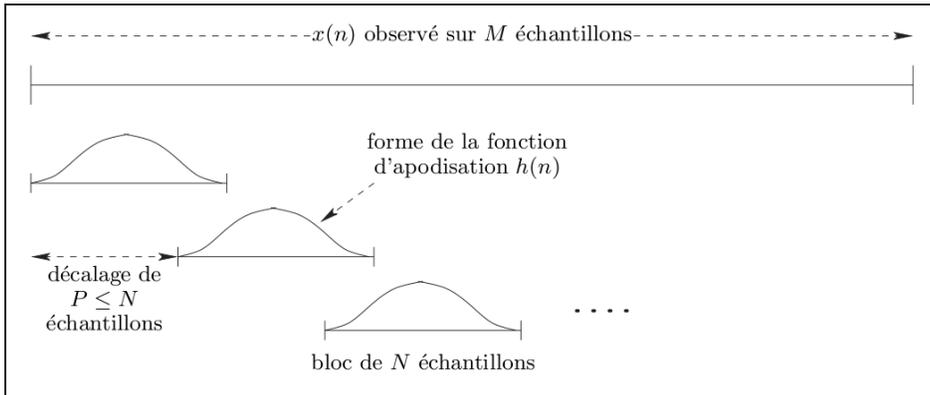
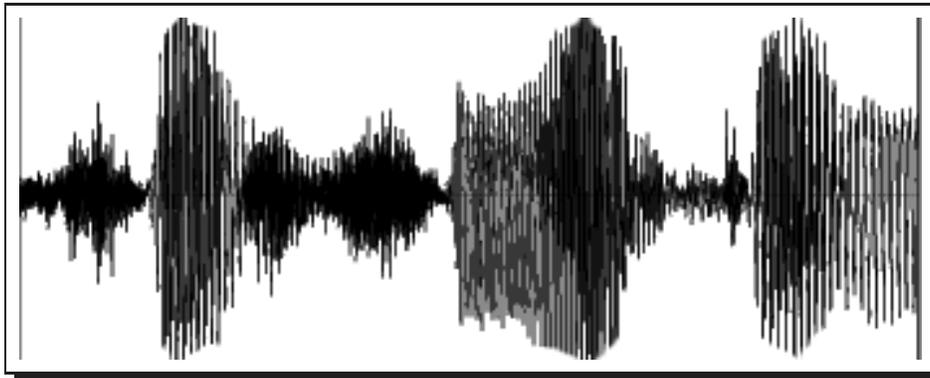
ANALYSE SPECTRALE

ANALYSE TEMPS-FRÉQUENCE (2)

Spectrogramme

Le spectrogramme est un diagramme associant à chaque instant t d'un signal, son spectre fréquentiel

Construction d'un Spectrogramme

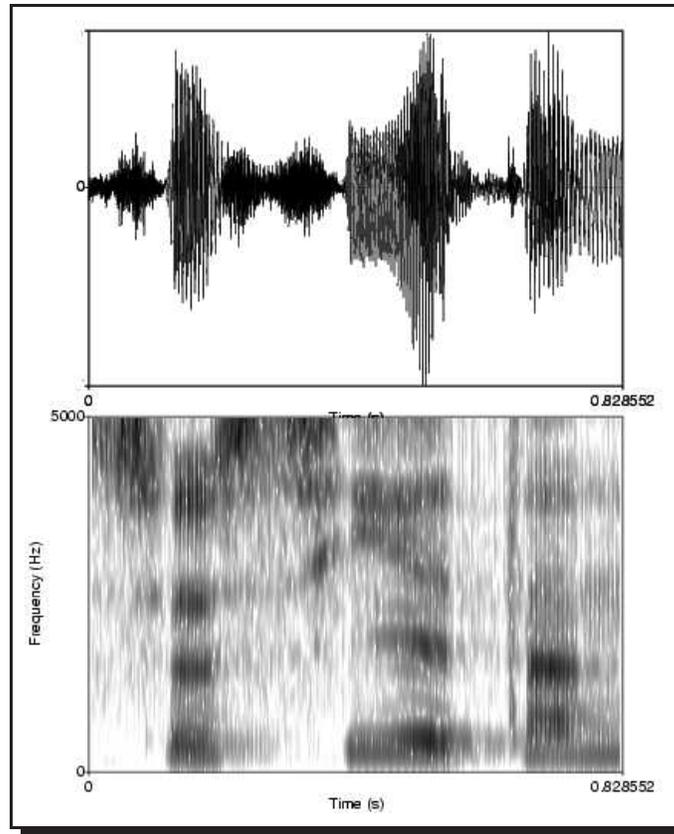


ANALYSE SPECTRALE

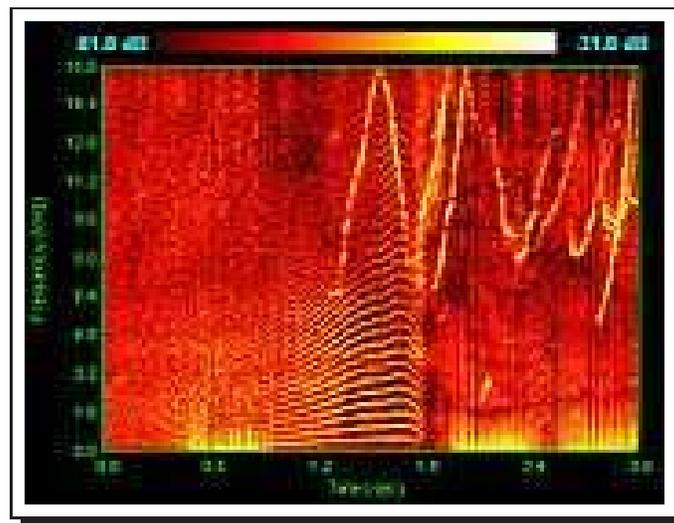
ANALYSE TEMPS-FRÉQUENCE (3)

Exemple de Spectrogramme

Le spectrogramme est représenté sous forme d'image quelquefois en fausse couleurs



Utilisés pour la reconnaissance de la parole, ou l'identification de son (cris d'animaux, sons d'instruments)

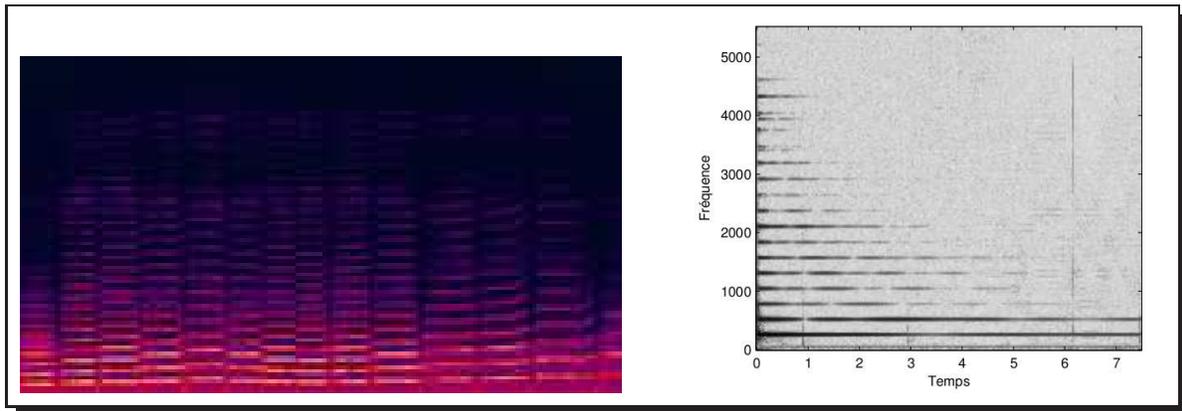


Spectrogramme de chants de dauphins

ANALYSE SPECTRALE

ANALYSE TEMPS-FRÉQUENCE (4)

Exemple de Spectrogramme d'instruments

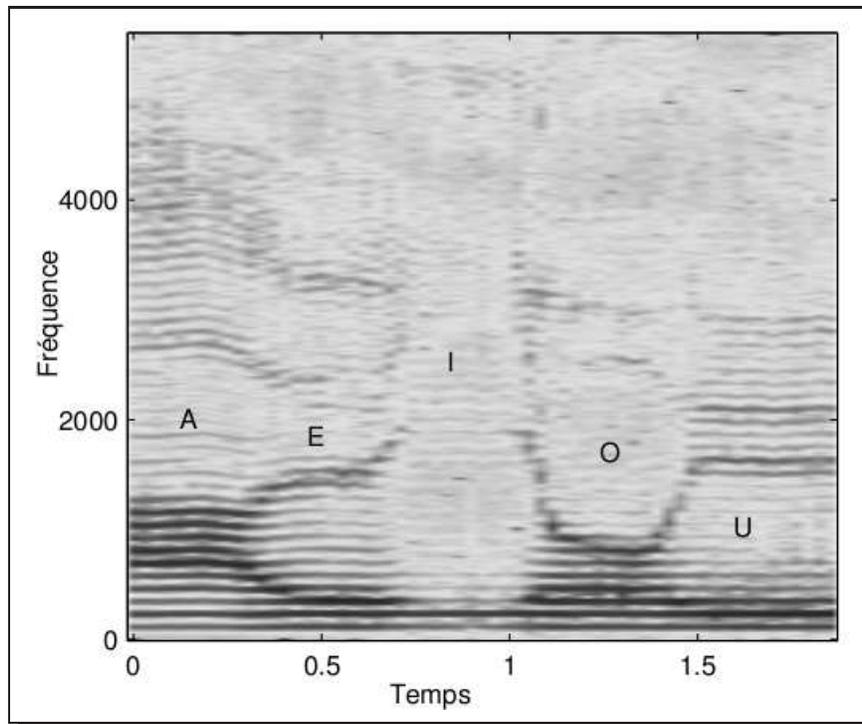


Spectrogramme d'un violon et d'un piano (Do-3)

Reconnaissance de la parole

Un spectrogramme d'un signal de parole est appelé aussi sonogramme

Sonogramme des voyelles A-E-I-O-U

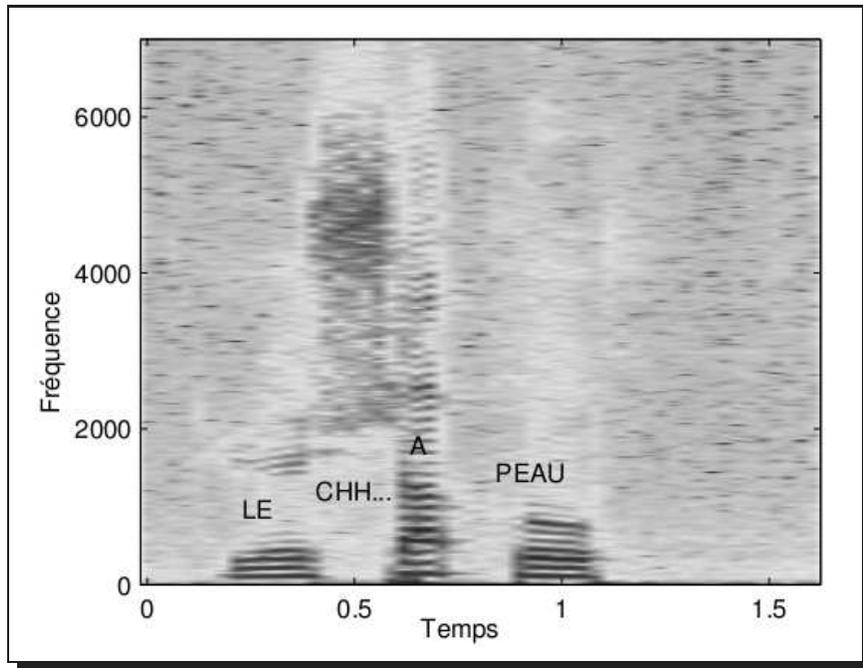


Comme tout "O" qui se respecte, le motif spectral qu'il décrit dans le sonogramme est un joli rond !

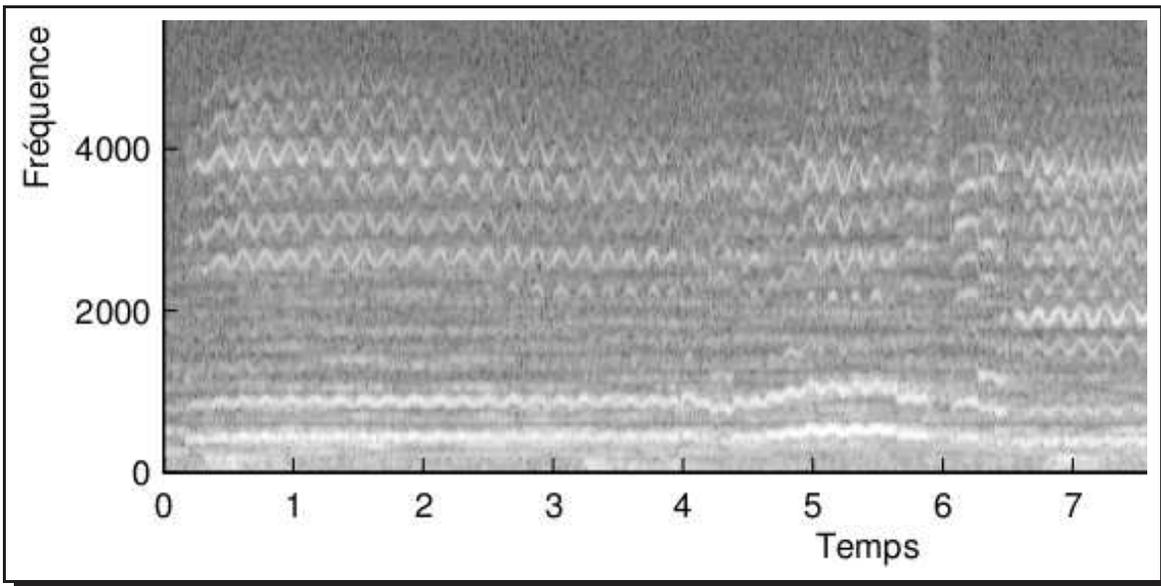
ANALYSE SPECTRALE

ANALYSE TEMPS-FRÉQUENCE (5)

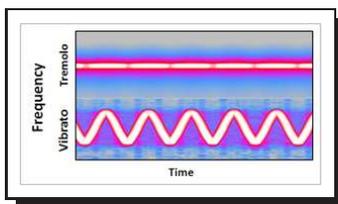
Sonogramme du son chapeau



Début de la Norma par Maria Callas



La première note est un La-3 (441 Hz)
A noter le vibrato de la chanteuse



ANALYSE SPECTRALE

CORRÉLATION ET DENSITÉS SPECTRALES (1)

L'analyse de variance en statistique examine la dépendance existant entre des variables sans tenir compte des éventuels retards existant entre elles. Les fonction de corrélation comblent cette lacune

Fonction d'Intercorrélation

La fonction d'intercorrélation permet de mesurer la ressemblance entre deux signaux f et g

Cette intercorrélation se fait simplement en effectuant l'intégrale du produit des signaux que l'on décale progressivement l'un par rapport à l'autre

$$C_{fg}(\tau) \triangleq \int f(x) g(x - \tau) dx$$

C_{fg} quantifie dans quelle mesure on peut écrire $f(x) = \alpha g(x - \tau) + \beta$ et dispose des propriétés :

$ C_{fg}(\tau) ^2 \leq C_{ff}(0) C_{gg}(0), \forall \tau$	-Schwarz
$C_{fg}(\tau) = C_{gf}^*(-\tau)$	-Sym. Hermitienne
$0 \leq C_{fg}(\tau) \leq 1$	-si C_{fg}/C_{fg}^{\max}

L'intercorrélation est une convolution dans lequel un des signaux est renversée ($\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \nu$)

$$C_{fg}(\tau) \triangleq f(\tau) * g(-\tau)$$

ANALYSE SPECTRALE

CORRÉLATION ET DENSITÉS SPECTRALES (2)

Densité Interspectrale d'Énergie

$$c_{fg}(\tau) \triangleq f(\tau) * g(-\tau) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad F(\nu) G^*(\nu) \triangleq C_{fg}(\nu)$$

\mathcal{F} [fonction d'intercorrélation] désigne la

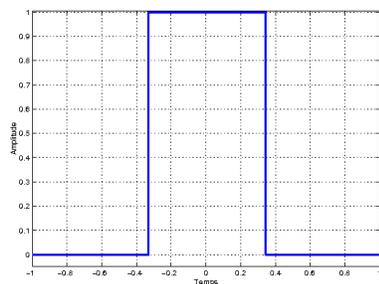
densité interspectrale d'énergie

qui caractérise la contribution énergétique des différentes contributions fréquentielles d'interactions entre f et g

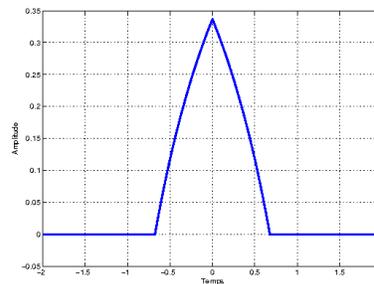
Fonction d'Autocorrélation

C'est l'intercorrélation entre un signal et lui même

$$C_f(\tau) \triangleq \int f(t) f(t - \tau) dt$$



$\Pi_T(t)$



$\gamma_{\Pi_T}(\tau)$

Fonction paire, maximum de ressemblance en $\tau = 0$,
 $C_f(\tau) = 0$ pour $|\tau| > T$ (décorrélation)

$C_f(\tau) = C_f^*(-\tau)$	-Sym. hermitienne
$C_f(0) = P_f$	-Puissance du signal en $\tau = 0$
$ C_f(\tau) \leq C_f(0)$	-Schwartz

ANALYSE SPECTRALE

CORRÉLATION ET DENSITÉS SPECTRALES (3)

- L'autocorrélation d'une fonction périodique est elle-même périodique avec la même période
- L'autocorrélation d'un bruit blanc est un pic de dirac (aucune corrélation à deux instant \neq)
$$C_b(\tau) = \sigma^2 \cdot \delta(\tau)$$
- L'autocor. de la \sum de 2 fonctions non-corrélées est la \sum des autocor. de chaque fonction
- $\text{Autocor}_{(\text{signal}+\text{bruit})} \approx \text{Autocor}_{(\text{signal})}$

Applications de la Fonction d'Autocorrélation

- Recherche de périodicité dans le signal
- Recherche de cohérence
 - Recherche de retard
 - Recalage de signaux ou d'images
 - Recalage Localisation de défauts et de sources
 - Détection de signaux
 - ...
 - ...

L'autocorrélation est une autoconvolution dans lequel un des signaux est renversée

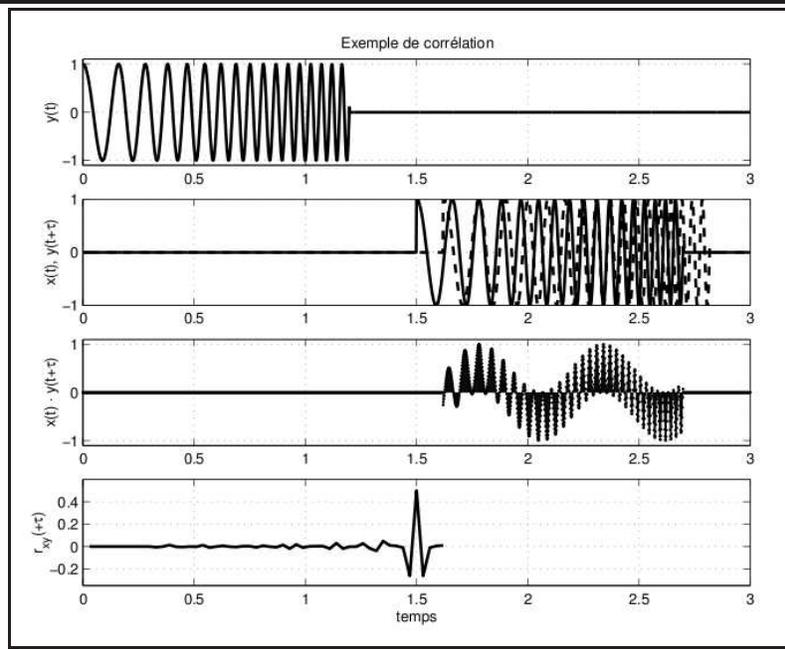
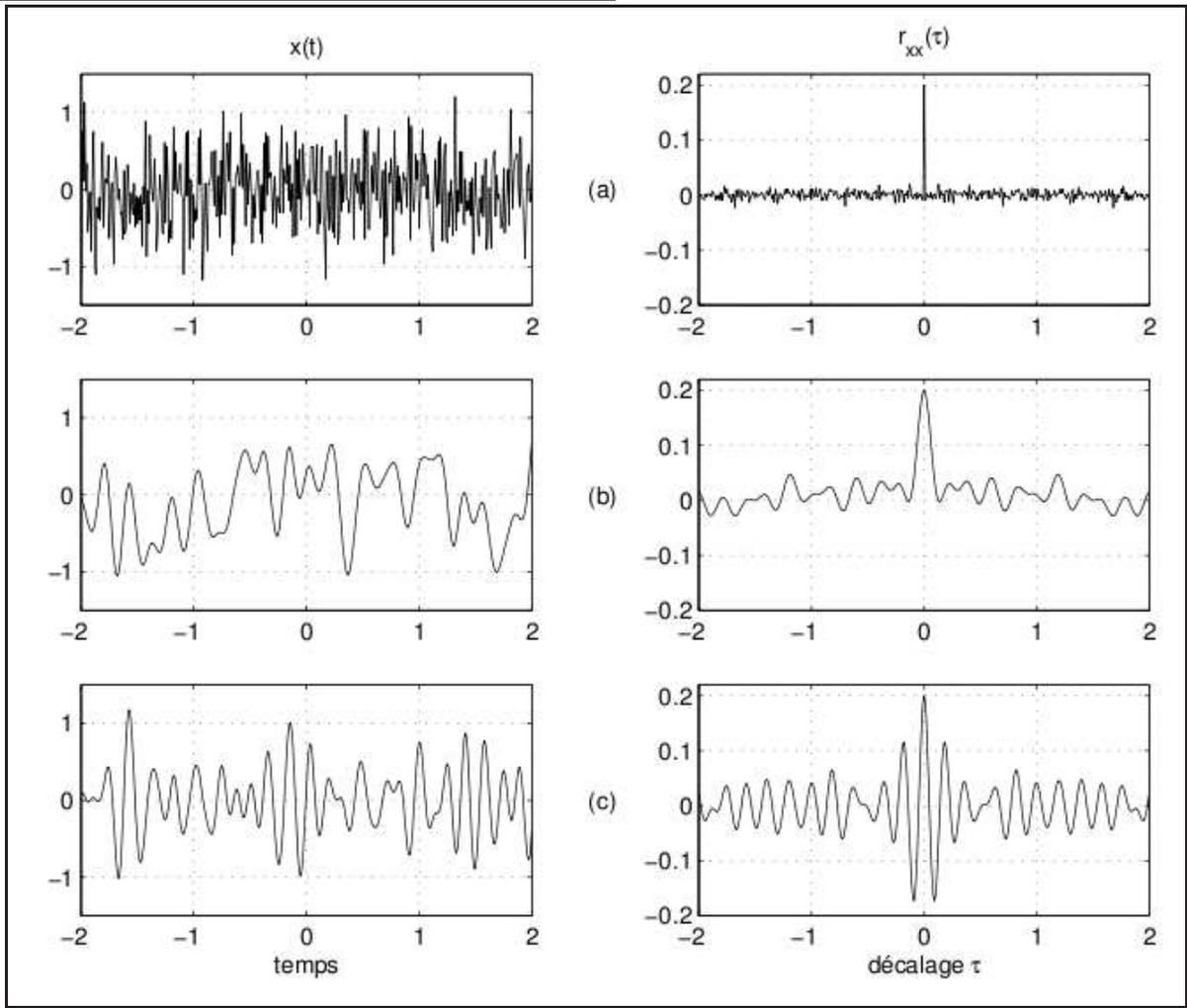
$$C_f(\tau) \triangleq f(\tau) * f(-\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu) F^*(\nu) = |F(\nu)|^2 \triangleq C_f(\nu)$$

\mathcal{F} [autocorrélation] est la Densité Spectrale de Puissance ou (DSP)

ANALYSE SPECTRALE

CORRÉLATION ET DENSITÉS SPECTRALES (4)

Quelques Autocorrélations



ANALYSE SPECTRALE

CORRÉLATION ET DENSITÉS SPECTRALES (5)

$$\| \text{Autocor}_{(\text{signal}+\text{bruit})} \approx \text{Autocor}_{(\text{signal})}$$

Considérons un signal $x(t)$ perturbé par du bruit $n(t)$, i.e., $y(t) = x(t) + n(t)$, sa fonction d'autocorrélation est

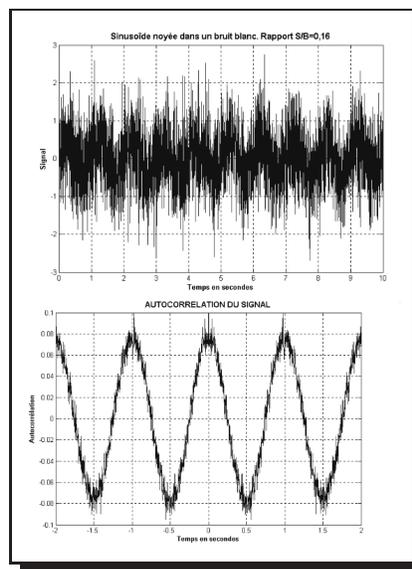
$$\begin{aligned} C_{yy}(\tau) &= \int [x(t) + n(t)] \cdot [x(t - \tau) + n(t - \tau)] dt \\ &= \int x(t) x(t - \tau) + n(t) n(t - \tau) + x(t) n(t - \tau) \\ &\quad + n(t) x(t - \tau) dt \end{aligned}$$

$$C_{yy}(\tau) = C_{xx}(\tau) + C_{nn}(\tau) + C_{xn}(\tau) + C_{nx}(\tau) \xrightarrow{\tau \gg 0} C_{xx}(\tau)$$

$x(t)$ & $n(t)$ non corrélé donc $C_{xn}(\tau) = 0$ et $C_{nx}(\tau) = 0$ et $C_{nn}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$ décroît rapidement

|| L'autocorrélation d'une fonction périodique est elle-même périodique avec la même période

Donc l'autocorrélation d'une fonction périodique bruitée est périodique (\hat{m} période) et presque sans bruit



⇒ Détection de la périodicité d'un signal bruité

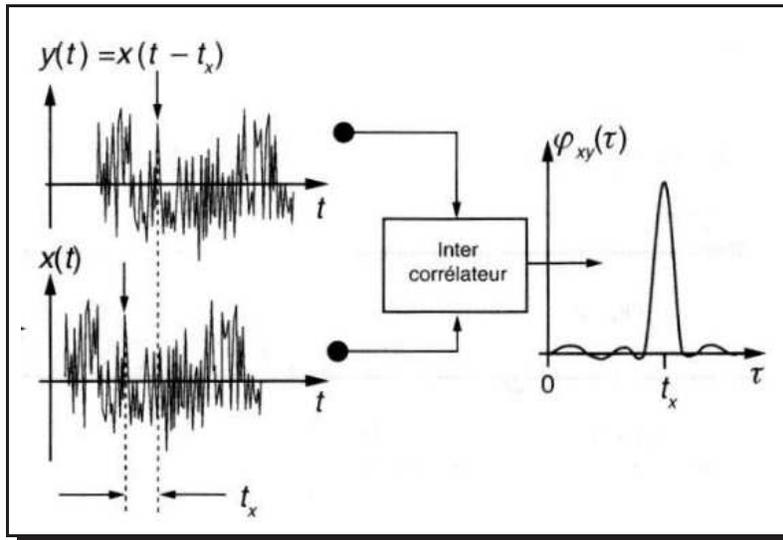
ANALYSE SPECTRALE

CORRÉLATION ET DENSITÉS SPECTRALES (6)

Exemples d'Applications

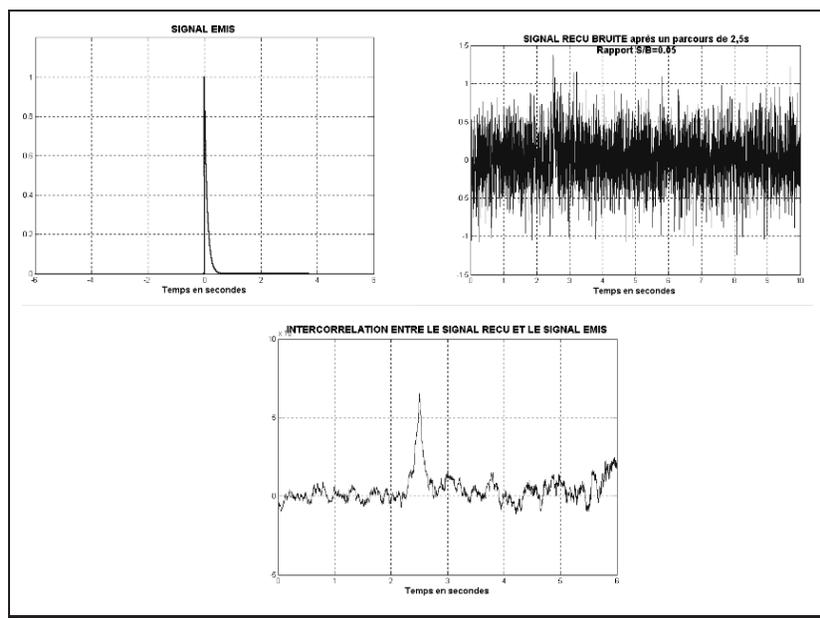
1 Mesure d'un Temps de Retard

Très utile pour déterminer le tps de retard entre un signal et sa version retardé



- **Radar-Sonar** : un signal est envoyé vers une cible et un écho $y(t)$ revient vers l'émetteur

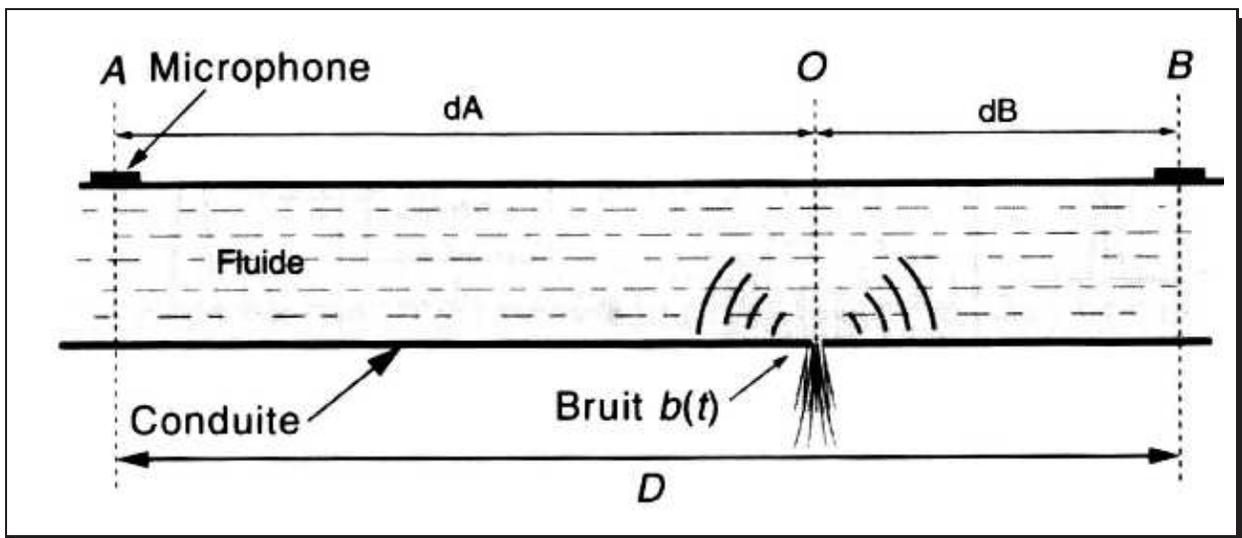
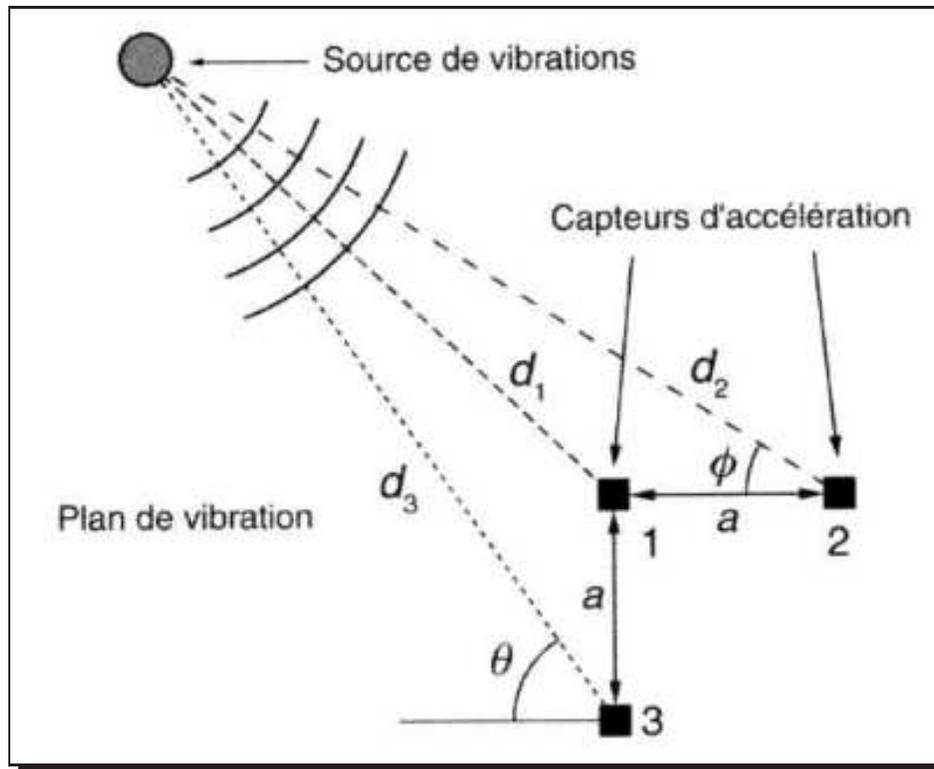
$$T_{ps_{\text{retard}}} \times v_{\text{onde}} = 2 \text{ dist. Emetteur-Cible}$$



ANALYSE SPECTRALE

CORRÉLATION ET DENSITÉS SPECTRALES (7)

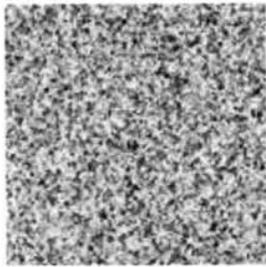
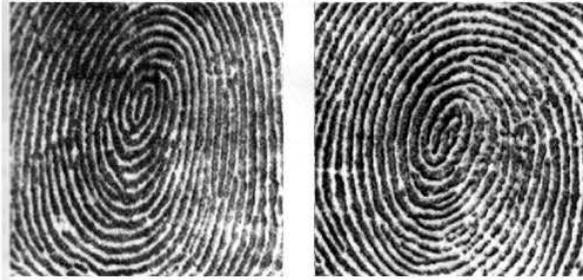
- Localisation de défaut/source
 - ▶ indiqué par une source de vibration
 - ▶ Utile pour la triangulation
 - ▶ ...



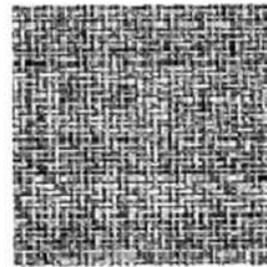
ANALYSE SPECTRALE

CORRÉLATION ET DENSITÉS SPECTRALES (8)

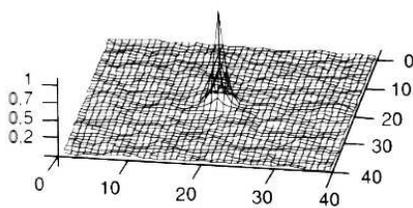
- Reconnaissance de motifs
 - ▶ Reconnaissance d'empreinte
 - ▶ Reconnaissance de texture
 - ▶ Tracking (suivi de forme)
 - ▶ ...



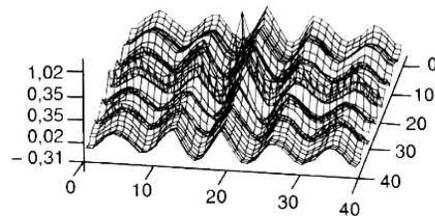
Sable



Tissu



Sable



Tissu



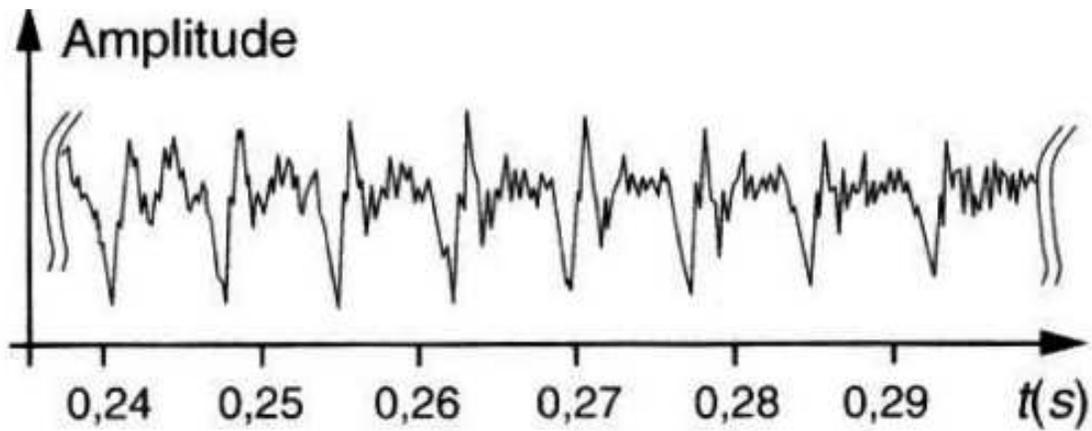
ANALYSE SPECTRALE

CORRÉLATION ET DENSITÉS SPECTRALES (9)

- Reconnaissance de la parole
 - ▶ Reconnaissance de son voisés
 - ▶ Reconnaissance de locuteur (genre)
 - ▶ ...

• Pour les sons voisés, les cordes vocales vibrent et le signal est périodique (ex : "a")

• Les sons non voisés passent librement par les cordes vocales qui ne vibrent pas (ex : "F")



Signal vocal « Sept »

