



DIRO  
IFT 3205

# TRAITEMENT DU SIGNAL COMPRESSION

*Max Mignotte*

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

E-mail : [mignotte@iro.umontreal.ca](mailto:mignotte@iro.umontreal.ca)

# COMPRESSION

## SOMMAIRE

|                                |   |
|--------------------------------|---|
| Introduction .....             | 2 |
| Compression RLE .....          | 3 |
| Compression d'Huffman .....    | 4 |
| Compression par Hadamard ..... | 6 |
| Compression JPEG .....         | 8 |

# COMPRESSION

## INTRODUCTION

### But de la compression

Réduire le volume des données (i.e., le nb. de bits) nécessaire pour représenter et coder les caractéristiques d'une image (i.e., élimine la redondance d'information)

- ▶ Réduction du coût de stockage
- ▶ Transmission rapide des données
- ▶ Transmission avec moins de puissance

### Taux de compression

$$C = \frac{\text{Nb. de bits après compression}}{\text{Nb. de bits avant compression}}$$

### Type de compression

- 2 grandes familles ; avec ou sans perte

### 3 types de redondances

- Redondance de codage (compression RLE, etc.)
- Redondance spatiale (codage d'Huffman, etc.)
- Redondance visuelle (jpeg, fractale, etc.)

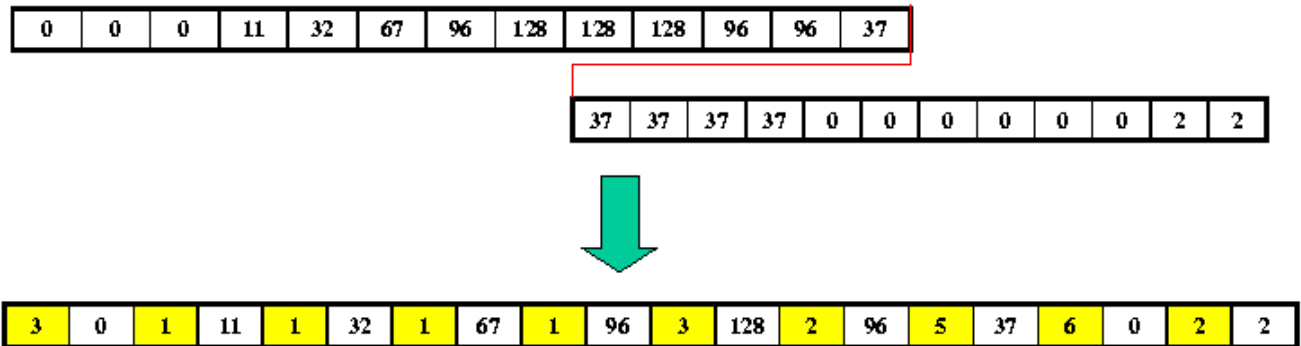
### Mesure de la qualité de la compression d'une image

$$\text{SNR} = \frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f^2(x, y)}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left( f(x, y) - f_c(x, y) \right)^2}$$

# COMPRESSION

## COMPRESSION RLE

### Compression RLE

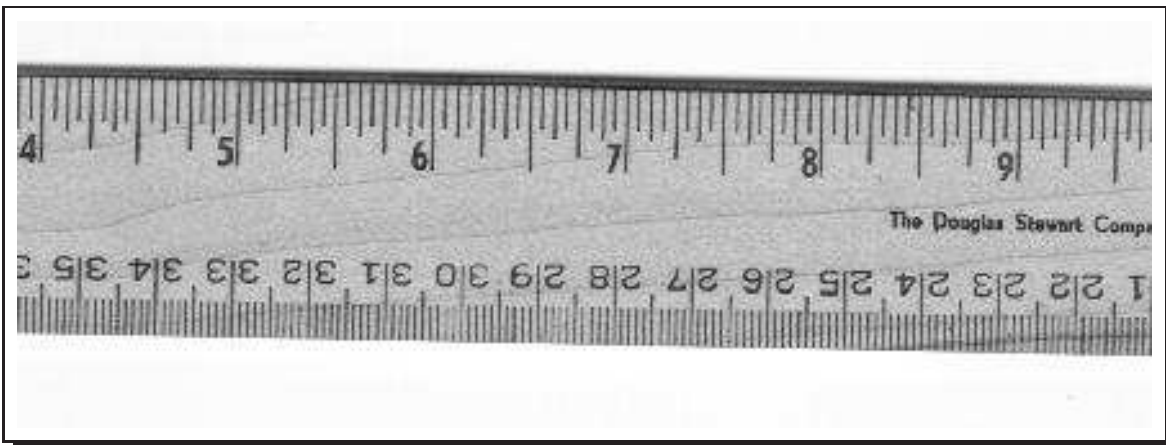


### Principe

- RLE : Run Length Encoding
- Création d'une nouvelle séquence dans laquelle le deuxième élément correspond au niveau de gris et le premier élément correspond au nombre de pixels consécutif possédant ce niveau de gris
- On code séparément le niveau de gris et l'occurrence de chaque pixel



Fort taux de compression pour des images possédant de nb. zones de régions homogènes



# COMPRESSION

## COMPRESSION D'HUFFMAN (1)

### Principe

Utilisation d'un codage de longueur variable qui assigne le plus petit code (en longueur) pour les niveaux de gris d'occurrence élevé

| Original source |             | Source reduction |     |     |     |
|-----------------|-------------|------------------|-----|-----|-----|
| N de G          | Probability | 1                | 2   | 3   | 4   |
| 1               | 0.4         | 0.4              | 0.4 | 0.4 | 0.6 |
| 5               | 0.3         | 0.3              | 0.3 | 0.3 |     |
| 0               | 0.1         | 0.1              | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| 3               | 0.1         | 0.1              |     |     |     |
| 2               | 0.06        | 0.1              | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| 4               | 0.04        |                  |     |     |     |

- Calcul de l'histogramme (distribut. des niv. de gris)
- Constitution d'une table ou les niveaux de gris sont arrangés par ordre décroissant de probabilité
- Réduire le nombre de probabilité en combinant les deux plus faibles probabilités pour former une nouvelle probabilité
- Assigner la valeur du code pour chaque niv. de gris

| Original source |       |       | Source reduction |         |        |       |
|-----------------|-------|-------|------------------|---------|--------|-------|
| N de G          | Prob. | Code  | 1                | 2       | 3      | 4     |
| 1               | 0.4   | 1     | 0.4 1            | 0.4 1   | 0.4 1  | 0.6 0 |
| 5               | 0.3   | 00    | 0.3 00           | 0.3 00  | 0.3 00 | 0.4 1 |
| 0               | 0.1   | 011   | 0.1 011          | 0.2 010 | 0.3 01 |       |
| 3               | 0.1   | 0100  | 0.1 0100         |         |        |       |
| 2               | 0.06  | 01010 | 0.1 0101         | 0.1 011 |        |       |
| 4               | 0.04  | 01011 |                  |         |        |       |



# COMPRESSION

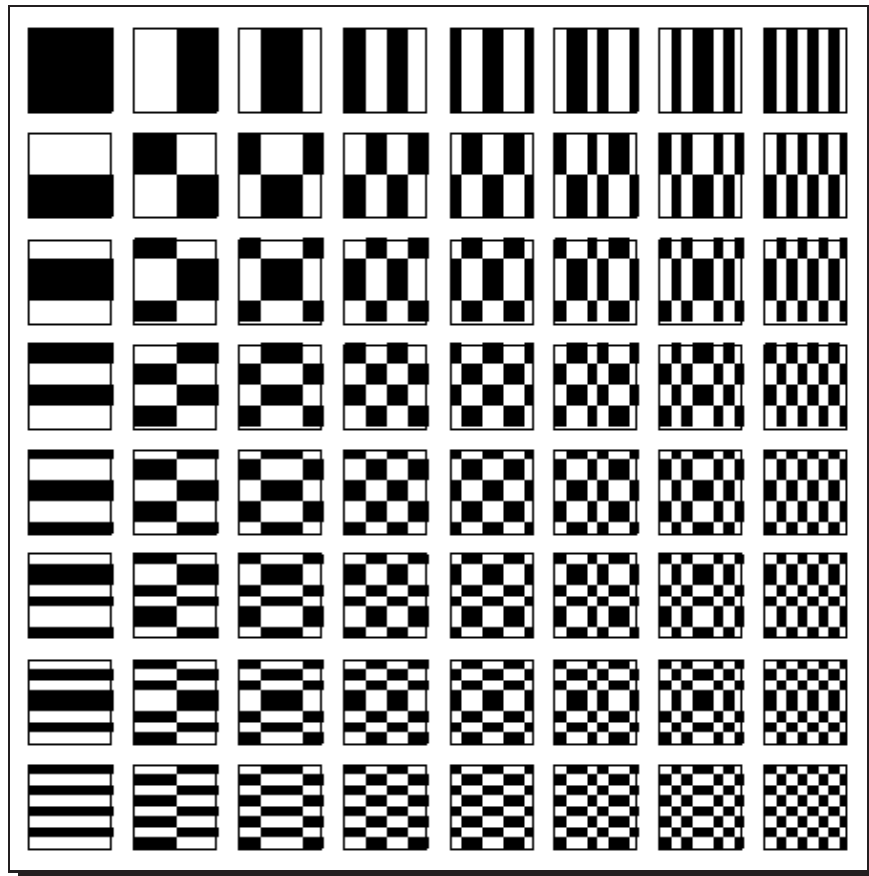
## TRANSFORMÉE DE HADAMARD (1)

$$H(u, \nu) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) a_i(u) + b_i(y) a_i(\nu)}$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{\nu=0}^{N-1} H(u, \nu) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) a_i(u) + b_i(y) a_i(\nu)}$$

$$\begin{aligned} a_0(u) &= b_{n-1}(u) \\ a_1(u) &= b_{n-1}(u) + b_{n-2}(u) \\ &\vdots \\ a_{n-1}(u) &= b_1(u) + b_0(u) \end{aligned}$$

Note :  $N = 2^n$      $b_i(x)$  : ième bit de x (en binaire)



Fonctions de Base pour une image  $8 \times 8$  (Noir=1, blanc=-1)

# COMPRESSION

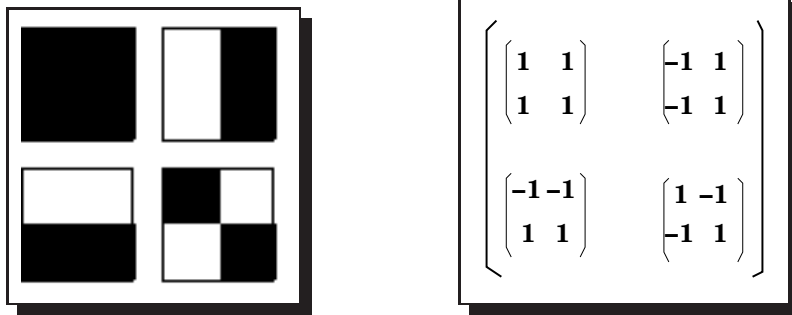
## TRANSFORMÉE DE HADAMARD (2)

### -Exemple-

Transformée de Hadamard de l'image  $2 \times 2$   $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

### -Calcul des coefficients-

Projection de  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  sur la base de Hadamard



Élément de la base de Hadamard ( $2 \times 2$ )

- $\left\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle / 4 = 1$
- $\left\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle / 4 = -1/2$
- $\left\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle / 4 = -1/2$
- $\left\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle / 4 = 0$

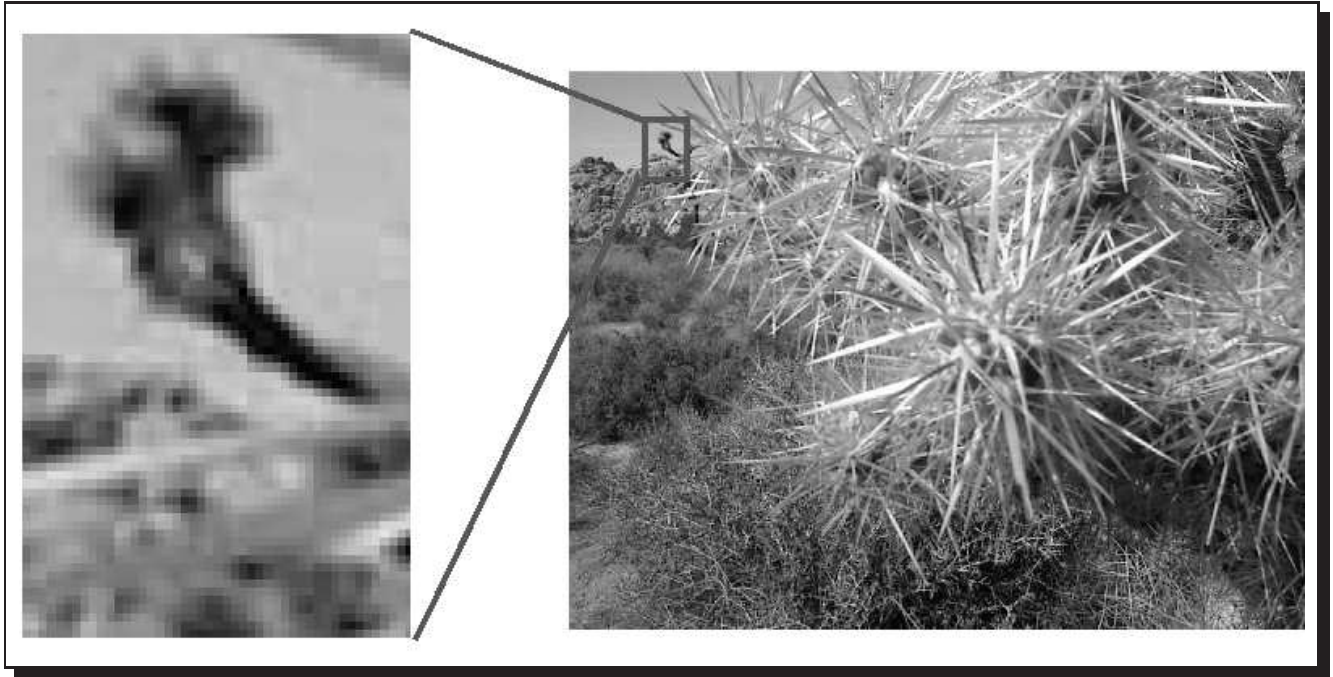
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 1/2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 1/2 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



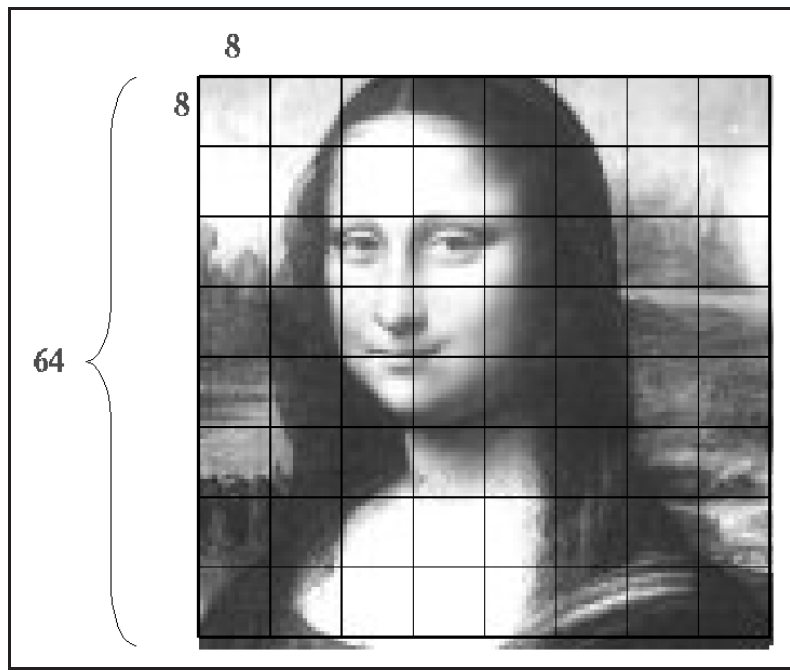
# COMPRESSION

## COMPRESSION JPEG (1)

- Forte compression mais avec perte (25 : 1)
- Basée sur la Transformée Cosinus Discrète (DCT) rapide (FDCT) 2D d'images de tailles  $8 \times 8$  pixels



Division de l'image en sous images  $8 \times 8$

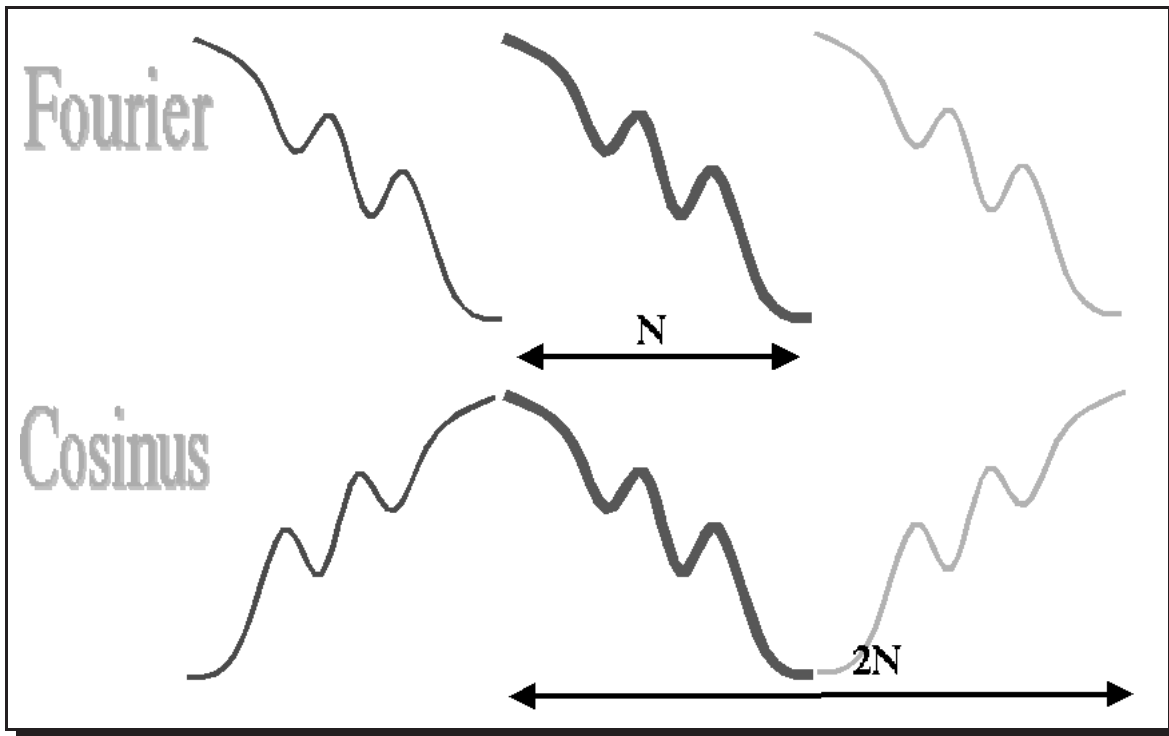


# COMPRESSION

## COMPRESSION JPEG (2)

### Pourquoi la Transformée de Cosinus Discrète ?

- La TF suppose que l'image à transformer est périodique ► crée des discontinuités ► hautes fréquences qui ne sont pas présent dans l'image
- la TCD suppose que l'image à transformer est paire ► aucune discontinuités



Pour une image de taille  $N \times N$

$$C(u, \nu) = k_1(u)k_2(\nu) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos\left(\pi u \frac{x + \frac{1}{2}}{N}\right) \cos\left(\pi \nu \frac{y + \frac{1}{2}}{N}\right)$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{\nu=0}^{N-1} C(u, \nu) \cos\left(\pi x \frac{u + \frac{1}{2}}{N}\right) \cos\left(\pi y \frac{\nu + \frac{1}{2}}{N}\right)$$

# COMPRESSION

## COMPRESSION JPEG (3)

### Transformée de Cosinus Discrète et TCD inverse

$$C(u, \nu) = k_1(u)k_2(\nu) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos\left(\pi u \frac{x + \frac{1}{2}}{N}\right) \cos\left(\pi \nu \frac{y + \frac{1}{2}}{N}\right)$$

$$k_1(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & \text{si } u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{sinon} \end{cases} \quad k_2(\nu) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & \text{si } \nu = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{sinon} \end{cases}$$

### Symétrie miroir

$$C(-u, \nu) = C(u, -\nu) = C(-u, -\nu) = C(u, \nu) \\ \text{car } \cos(x) = \cos(-x)$$

### Périodicité

$$C(u + 2N, \nu) = C(u, \nu + 2N) = C(u + 2N, \nu + 2N) = C(u, \nu)$$

$$\begin{aligned} \text{car } \cos\left(\pi(u + 2N)\frac{x + \frac{1}{2}}{N}\right) &= \cos\left(\pi u \frac{x + \frac{1}{2}}{N} + (2x + 1)\pi\right) \\ &= \cos\left(\pi u \left(x + \frac{\frac{1}{2}}{N}\right)\right) \end{aligned}$$

### Remarque

- TCD réelle ► Nb. de coefficients moins important que la TF

# COMPRESSION

## COMPRESSION JPEG (4)

