



DIRO
IFT 3205

TRAITEMENT DU SIGNAL COMPRESSION

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

COMPRESSION SOMMAIRE

Introduction	2
Compression RLE	3
Compression d'Huffman	4
Compression par Hadamard	6
Compression JPEG	8

COMPRESSION INTRODUCTION

But de la compression

Réduire le volume des données (i.e., le nb. de bits) nécessaire pour représenter et coder les caractéristiques d'une image (i.e., élimine la redondance d'information)

- ▶ Réduction du coût de stockage
- ▶ Transmission rapide des données
- ▶ Transmission avec moins de puissance

Taux de compression

$$C = \frac{\text{Nb. de bits après compression}}{\text{Nb. de bits avant compression}}$$

Type de compression

- 2 grandes familles ; avec ou sans perte

3 types de redondances

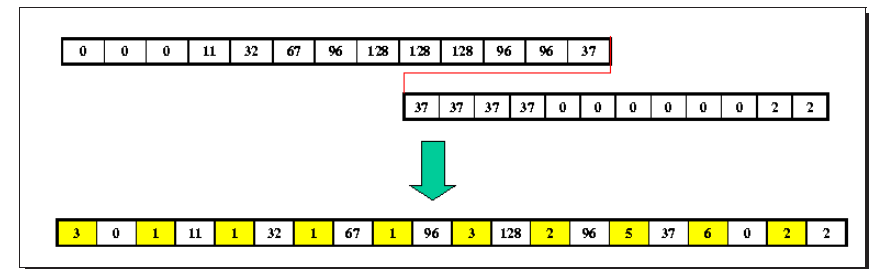
- Redondance de codage (compression RLE, etc.)
- Redondance spatiale (codage d'Huffman, etc.)
- Redondance visuelle (jpeg, fractale, etc.)

Mesure de la qualité de la compression d'une image

$$\text{SNR} = \frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f^2(x, y)}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} (f(x, y) - f_c(x, y))^2}$$

COMPRESSION COMPRESSION RLE

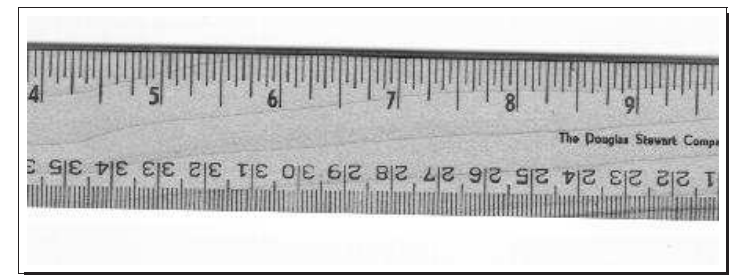
Compression RLE



Principe

- RLE : Run Length Encoding
- Création d'une nouvelle séquence dans laquelle le deuxième élément correspond au niveau de gris et le premier élément correspond au nombre de pixels consécutif possédant ce niveau de gris
- On code séparément le niveau de gris et l'occurrence de chaque pixel

Fort taux de compression pour des images possédant de nb. zones de régions homogènes



COMPRESSION

COMPRESSION D'HUFFMAN (1)

Principe

Utilisation d'un codage de longueur variable qui assigne le plus petit code (en longueur) pour les niveaux de gris d'occurrence élevé

Original source		Source reduction			
N de G	Probability	1	2	3	4
1	0.4	0.4	0.4	0.4	0.6
5	0.3	0.3	0.3	0.3	0.4
0	0.1	0.1	0.2	0.3	
3	0.1	0.1	0.1		
2	0.06	0.1			
4	0.04				

- Calcul de l'histogramme (distribut. des niv. de gris)
- Constitution d'une table où les niveaux de gris sont arrangés par ordre décroissant de probabilité
- Réduire le nombre de probabilité en combinant les deux plus faibles probabilités pour former une nouvelle probabilité
- Assigner la valeur du code pour chaque niv. de gris

Original source			Source reduction				
N de G	Prob.	Code	1	2	3	4	
1	0.4	1	0.4 1	0.4 1	0.4 1	0.6 0	
5	0.3	00	0.3 00	0.3 00	0.3 00	0.4 1	
0	0.1	011	0.1 011	0.2 010	0.3 01		
3	0.1	0100	0.1 0100	0.1 011			
2	0.06	01010	0.1 0101				
4	0.04	01011					

COMPRESSION

COMPRESSION D'HUFFMAN (2)

Original source			Source reduction							
N de G	Prob.	Code	1		2		3		4	
1	0.4	1	0.4	1	0.4	1	0.4	1	0.6	0
5	0.3	00	0.3	00	0.3	00	0.3	00	0.4	1
0	0.1	011	0.1	011	0.2	010	0.3	01		
3	0.1	0100	0.1	0100	0.1	011				
2	0.06	01010	0.1	0101						
4	0.04	01011								

Nb. Moyen de bits utilisé pour le codage

$$\text{Nb Moyen de bits} = (1 \times 0.4) + (2 \times 0.3) + (3 \times 0.1) + (4 \times 0.1) + (5 \times 0.06) + (5 \times 0.04) = 2.2 \text{ bits}$$

Borne supérieure

$$\text{Nb Moyen de bits} > \text{Entropy} = - \sum_{i=0}^{G_{\max}} h_i \log_2(h_i)$$

- h_i : probabilité d'avoir le niveaux de gris = i
- $G_{\max}$: Nb de niveaux de gris maximal

Exemple

$$\text{Nb Moyen de bits} > 0.52877 + 0.52109 + 0.33219 + 0.33219 + 0.243533 + 0.18575 = 2.1435$$

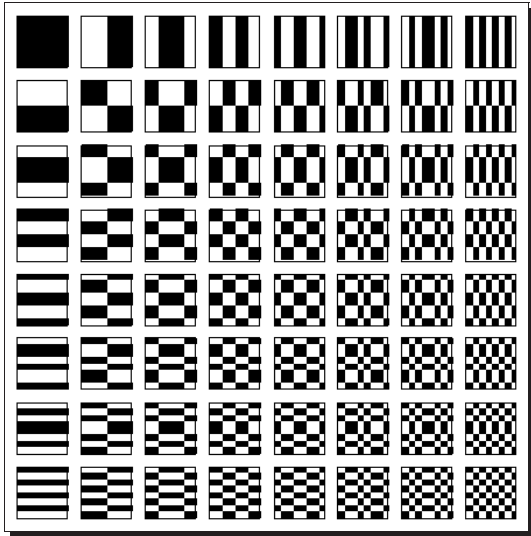
COMPRESSION TRANSFORMÉE DE HADAMARD (1)

$$H(u, \nu) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) a_i(u) + b_i(y) a_i(\nu)}$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{\nu=0}^{N-1} H(u, \nu) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) a_i(u) + b_i(y) a_i(\nu)}$$

$$\begin{aligned} a_0(u) &= b_{n-1}(u) \\ a_1(u) &= b_{n-1}(u) + b_{n-2}(u) \\ &\dots \\ a_{n-1}(u) &= b_1(u) + b_0(u) \end{aligned}$$

Note : $N = 2^n$ $b_i(x)$: ième bit de x (en binaire)



Fonctions de Base pour une image 8 × 8 (Noir=1, blanc=-1)

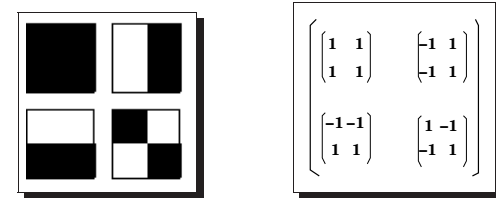
COMPRESSION TRANSFORMÉE DE HADAMARD (2)

-Exemple-

Transformée de Hadamard de l'image 2 × 2 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

-Calcul des coefficients-

Projection de $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sur la base de Hadamard



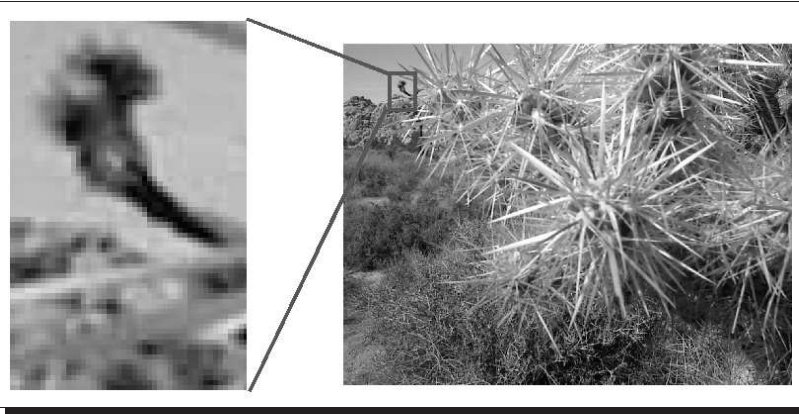
Élément de la base de Hadamard (2 × 2)

- $\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rangle / 4 = 1$
- $\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rangle / 4 = -1/2$
- $\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rangle / 4 = -1/2$
- $\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rangle / 4 = 0$

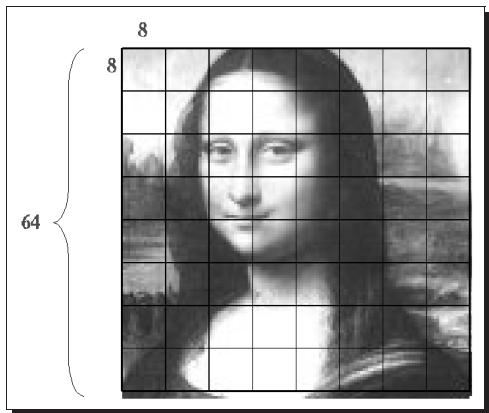
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 1/2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 1/2 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

COMPRESSION COMPRESSION JPEG (1)

- Forte compression mais avec perte (25 : 1)
- Basée sur la Transformée Cosinus Discrète (DCT) rapide (FDCT) 2D d'images de tailles 8×8 pixels



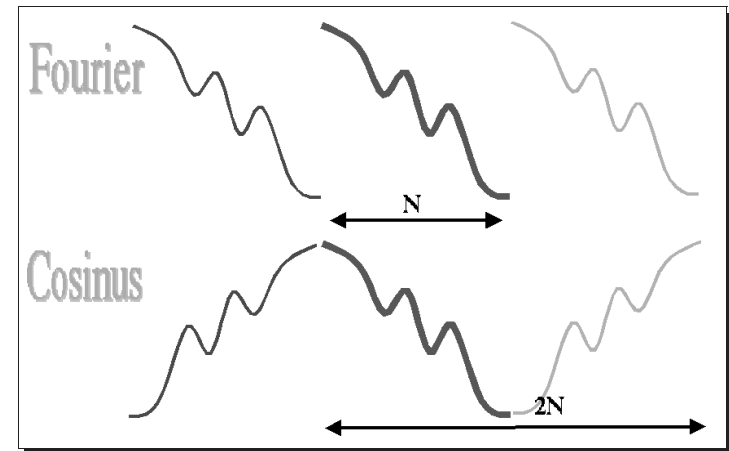
Division de l'image en sous images 8×8



COMPRESSION COMPRESSION JPEG (2)

Pourquoi la Transformée de Cosinus Discrète ?

- La TF suppose que l'image à transformer est périodique ► crée des discontinuités ► hautes fréquences qui ne sont pas présent dans l'image
- la TCD suppose que l'image à transformer est paire ► aucune discontinuités



Pour une image de taille $N \times N$

$$C(u, \nu) = k_1(u)k_2(\nu) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos\left(\pi u \frac{x + \frac{1}{2}}{N}\right) \cos\left(\pi \nu \frac{y + \frac{1}{2}}{N}\right)$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{\nu=0}^{N-1} C(u, \nu) \cos\left(\pi x \frac{u + \frac{1}{2}}{N}\right) \cos\left(\pi y \frac{\nu + \frac{1}{2}}{N}\right)$$

COMPRESSION COMPRESSION JPEG (3)

Transformée de Cosinus Discrète et TCD inverse

$$C(u, \nu) = k_1(u)k_2(\nu) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos\left(\pi u \frac{x + \frac{1}{2}}{N}\right) \cos\left(\pi \nu \frac{y + \frac{1}{2}}{N}\right)$$

$$k_1(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & \text{si } u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{sinon} \end{cases} \quad k_2(\nu) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & \text{si } \nu = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Symétrie miroir

$$C(-u, \nu) = C(u, -\nu) = C(-u, -\nu) = C(u, \nu) \\ \text{car } \cos(x) = \cos(-x)$$

Périodicité

$$C(u + 2N, \nu) = C(u, \nu + 2N) = C(u + 2N, \nu + 2N) = C(u, \nu)$$

$$\text{car } \cos\left(\pi(u + 2N)\frac{x + \frac{1}{2}}{N}\right) = \cos\left(\pi u \frac{x + \frac{1}{2}}{N} + (2x + 1)\pi\right) \\ = \cos\left(\pi u \left(x + \frac{1}{2}\right)\right)$$

Remarque

- TCD réelle ► Nb. de coefficients moins important que la TF

COMPRESSION COMPRESSION JPEG (4)

