DIRO
IFT 3205

TRAITEMENT DU SIGNAL

FILTRAGE SPATIAL

Max Mignotte

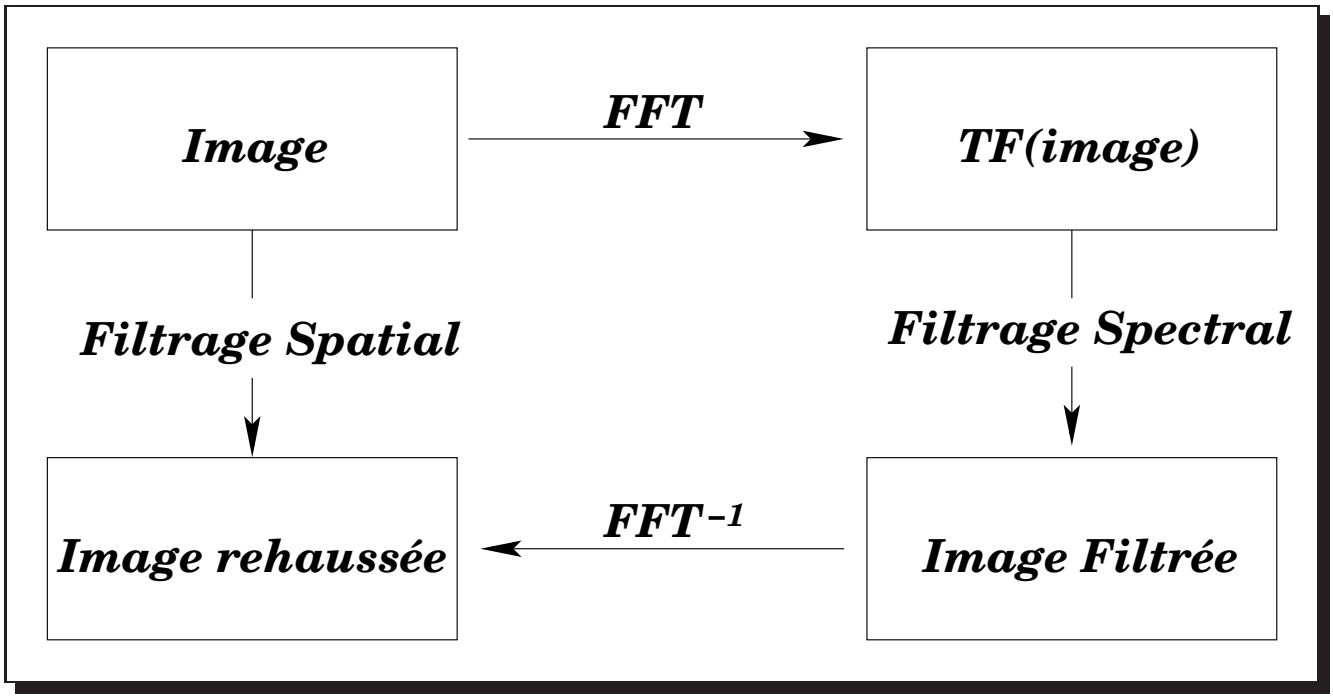
Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift3205
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

FILTRAGE SPATIALE
SOMMAIRE

Introduction 2
Convolution Discrète 2D -Rappel- 4
Filtre de Moyenne (Passe-bas) 6
Filtre Gaussien (Passe-bas) 7
Autres Filtres Passe-bas 8
Filtre Passe-haut -Op. Mathématique- 9
Filtre Passe-haut -Gradient- 12
Filtre Passe-haut -Laplacien- 17
Filtre de Marr-Hildreth 19
Exercices 21

FILTRAGE SPATIALE
INTRODUCTION (1)

Principe de Filtrage Spatial/Fréquentiel



Théorème de Convolution -Rappel-

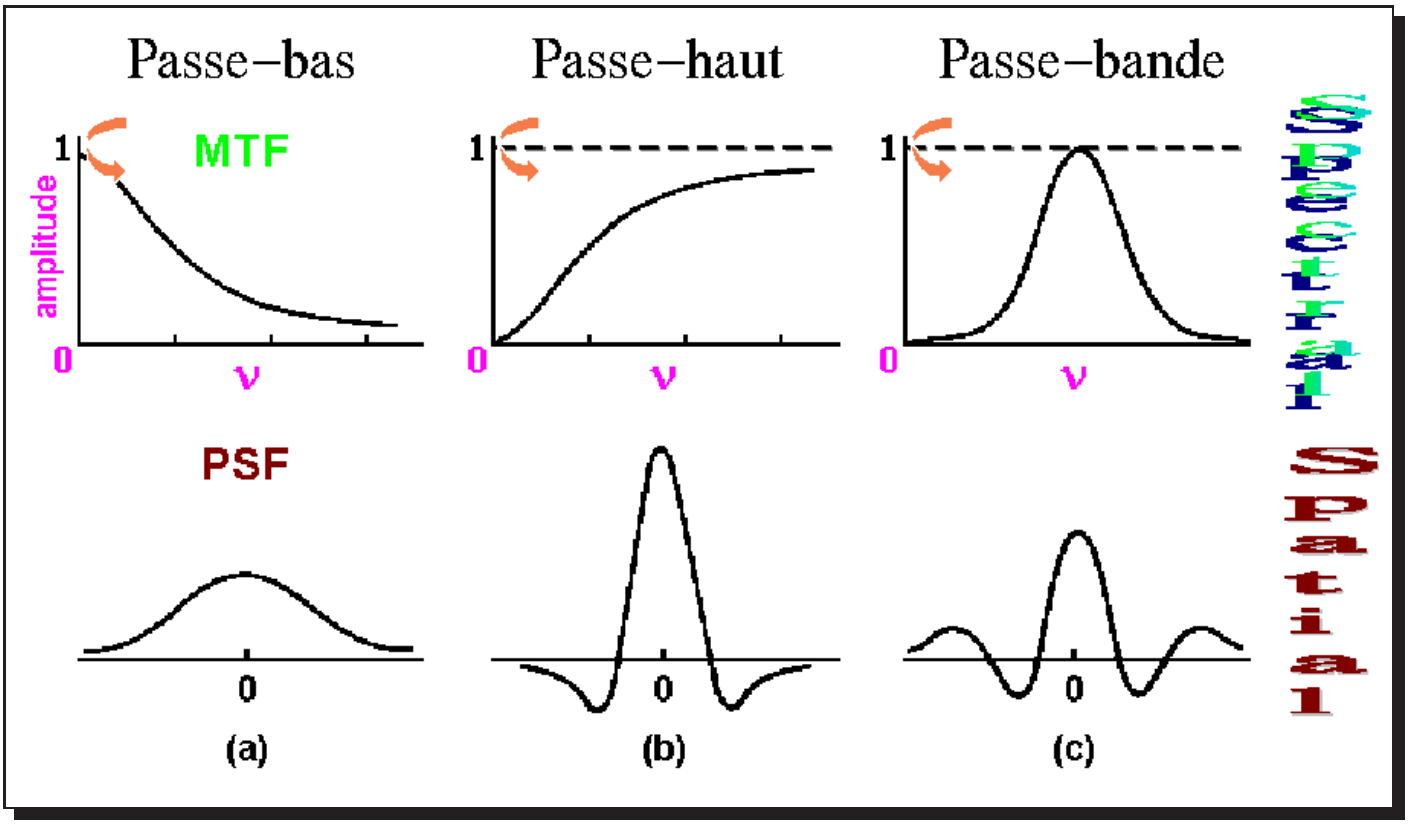
$$f(x,y) * g(x,y) \quad \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad F(u,\nu) \,.\, G(u,\nu)$$
$$f(x,y) \,.\, g(x,y) \quad \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad F(u,\nu) * G(u,\nu)$$

donc, si $f(x,y)$ est l'image à filtrer (ou à rehausser) et $g(x,y)$, le filtre spatial (ou PSF ou masque)

$$f(x,y) * g(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\{f(x,y)\} \cdot \underbrace{\mathcal{F}\{g(x,y)\}}_{G(u,\nu)}\right\}$$

FILTRAGE SPATIALE
INTRODUCTION (2)

Trois Types de Filtrage



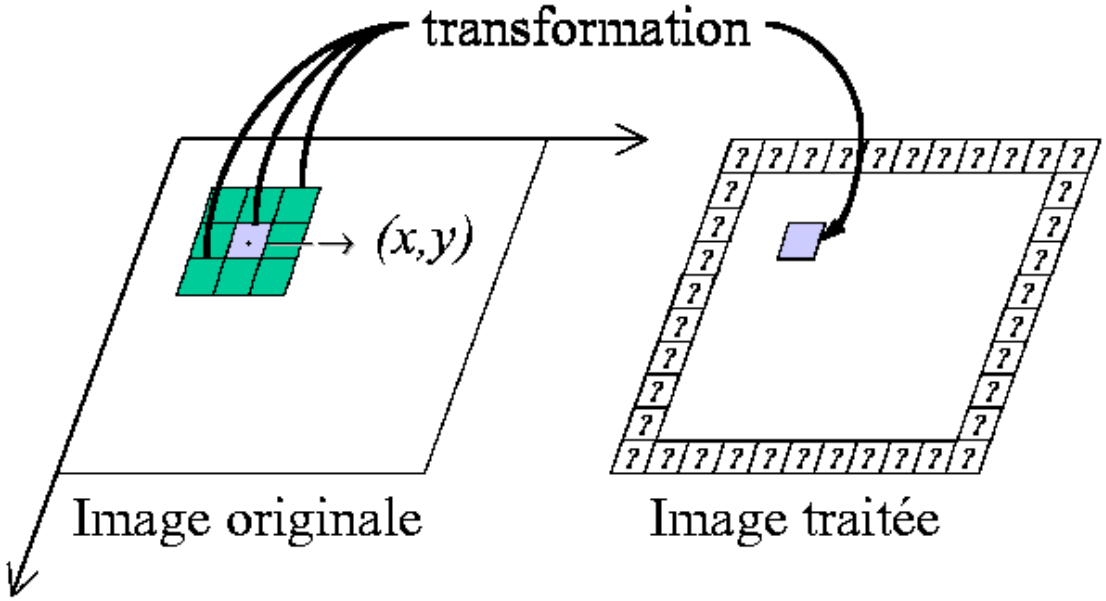
- **PSF** : Point Spread Function
  (ou Fonction d'Étalement Spectrale)
- **MTF** : Modulation Transfer Function
  (ou Fonction de Transfert)

- ▶ Filtre Passe-bas : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image
- ▶ Filtre Passe-haut : accentue les contours et les détails de l'image mais amplifie le bruit
- ▶ Filtre Passe-bande : élimine certaines fréquences indésirables présentes dans l'image

FILTRAGE SPATIALE
CONVOLUTION DISCRÈTE 2D -RAPPEL- (1)

Convolution Discrète 2D -Rappel-

Transformation basée sur le voisinage d'un point (x, y)



?: effet de bord => périodicité, miroir,extérieur=0
ou on ne filtre pas les bords...

Exemple

		16	0	16		
		16	16	16		
		16	16	16		

$*(1/16)$

1	2	1
2	4	2
1	2	1

$=$

	1	2	2	2	1	
	3	7	8	7	3	
	4	11	14	11	4	
	3	9	12	9	3	
	1	3	4	3	1	

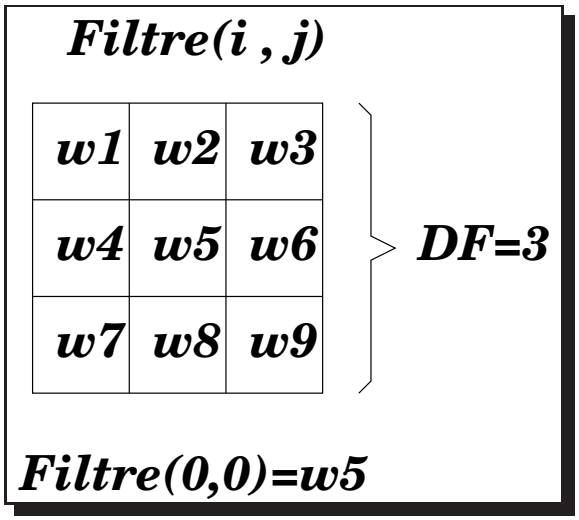
FILTRAGE SPATIALE
CONVOLUTION DISCRÈTE 2D -RAPPEL- (2)

$$g(x,y) = (f * \text{filtre})(x,y) = \sum_i \sum_j f(x-i, y-j)\ \text{filtre}(i,j)$$

Remarque

• Généralement le masque est de dimension (DF) impair et symétrique et dans ce cas

$$(f * \text{filtre})(x,y) = \sum_{i=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} \sum_{j=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} f(x+i, y+j)\ \text{filtre}(i,j)$$



$$\begin{aligned} g(x,y) &= w_1 f(x-1,y-1) + w_2 f(x,y-1) + w_3 f(x+1,y-1) \\ &+ w_4 f(x-1,y) + w_5 f(x,y) + w_6 f(x+1,y) \\ &+ w_7 f(x-1,y+1) + w_8 f(x,y+1) + w_9 f(x+1,y+1) \end{aligned}$$

• Afin de conserver la moyenne de l'image $f(x,y)$, la somme des éléments du filtre est normalisée à 1 (i.e., $\sum_i w_i = 1$)

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE DE MOYENNE (PASSE-BAS)

*1/9 **

1	1	1
1	1	1
1	1	1

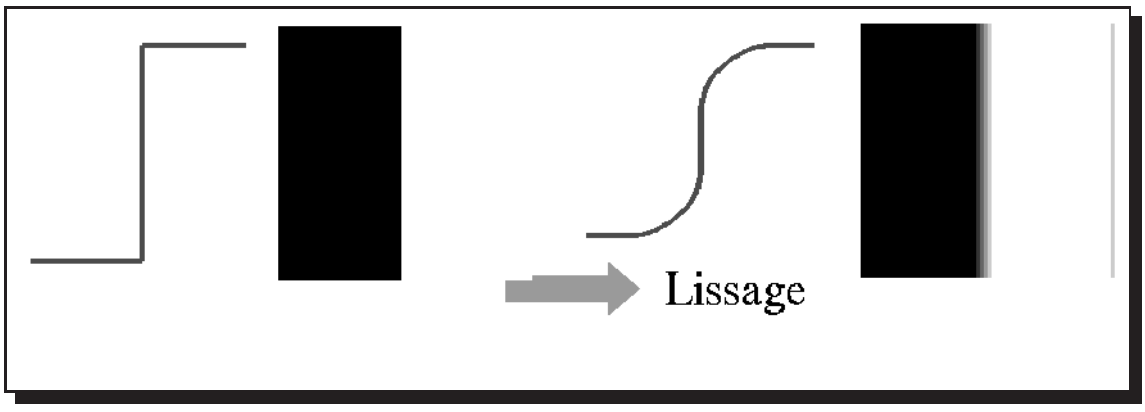
Filtre 3x3

*1/25 **

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Filtre 5x5

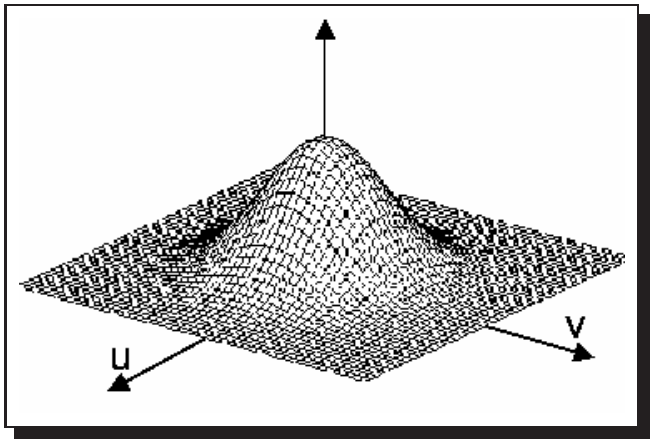
Exemple



▶ Filtre Passe-bas : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image (flou)

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE GAUSSIEN (PASSE-BAS)

$$\text{Gaussienne(x,y)} = \exp\left(-\pi(x^2+y^2)/\sigma^2\right)$$



$$(1/16)\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{bmatrix}$$

$$(1/4)\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix} * (1/4)\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix} = (1/16)\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{bmatrix}$$

$$(1/4)\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} * (1/4)\begin{bmatrix}1&2&1\end{bmatrix} = (1/16)\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{bmatrix}$$

FILTRAGE SPATIALE
AUTRES FILTRES PASSE-BAS

Filtre Binomial

Les coefficients de ce filtre sont obtenus par le binome de Newton. Un filtre 1D Binomial du quatrième ordre donne le vecteur (1/16)(1 4 6 4 1). Le filtre 2D est

$$\frac{1}{256}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtre Pyramidal

$$\frac{1}{81}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtre Conique

$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

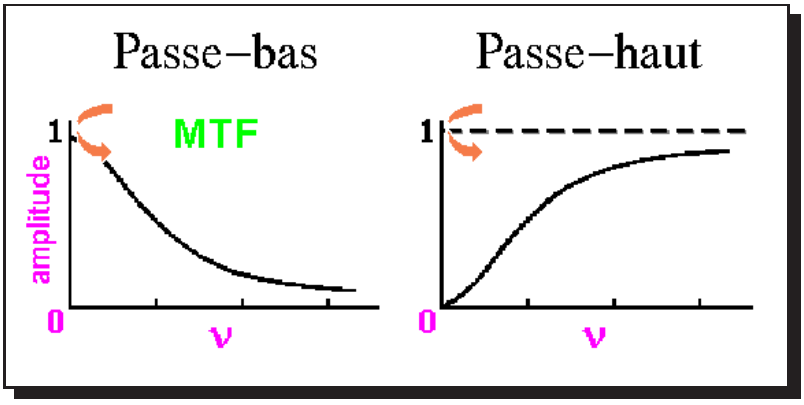
FILTRAGE SPATIALE
FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (1)

Filtre "High-boost"

$-$ Passe-bas $=$ Passe-haut $(K = 1)$

High boost $= K$(original) $-$ Passe-bas(original)

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= Kf(x,y) - f(x,y) * h(x,y) \\
&= (K-1)f(x,y) + \big(f(x,y) * \delta(x,y)\big) - f(x,y) * h(x,y) \\
&= (K-1)f(x,y) + f(x,y) * \big(\delta(x,y) - h(x,y)\big) \\
&\Downarrow \mathcal{F} \\
G(u,v) &= (K-1)F(u,v) + F(u,v)\underbrace{[1 - H(u,v)]}_{\text{Passe-haut}}
\end{aligned}
$$



- $K = 1$ Passe-haut
- $K > 1$ Rehaussement de Contour

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (2)

- Filtre 3×3 -

$$\delta(x,y) - h(x,y) = \frac{1}{9}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 0&9&0\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array} - \frac{1}{9}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 1&1&1\\\hline 1&1&1\\\hline\end{array} = \frac{1}{9}\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1&-1&-1\\\hline -1&8&-1\\\hline -1&-1&-1\\\hline\end{array}$$

- Filtre 5×5 -

$$\frac{1}{25}\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline -1&-1&-1&-1&-1\\\hline -1&-1&-1&-1&-1\\\hline -1&-1&24&-1&-1\\\hline -1&-1&-1&-1&-1\\\hline -1&-1&-1&-1&-1\\\hline\end{array}$$

Opérations sur les filtres de voisinage

Passe-bas

$$\frac{1}{35}\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&1&1\\\hline 1&2&2&2&1\\\hline 1&2&3&2&1\\\hline 1&2&2&2&1\\\hline 1&1&1&1&1\\\hline\end{array} = \frac{1}{35}\left\{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1&1\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 1&1&1\\\hline 1&1&1\\\hline\end{array} + \boxed{1}\right\}$$

Passe-haut

$$\frac{1}{25}\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline -1&-1&-1&-1&-1\\\hline -1&-1&-1&-1&-1\\\hline -1&-1&24&-1&-1\\\hline -1&-1&-1&-1&-1\\\hline -1&-1&-1&-1&-1\\\hline\end{array} = \frac{1}{25}\left\{-\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1&1\\\hline\end{array} + \boxed{25}\right\}$$

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (3)

Détection de Point

Convolution avec

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	- 1	-1

- Grande valeur positive ▶ point blanc sur fond noir
- Grande valeur négative ▶ point noir sur fond blanc

- Exemple -

5	5	5	5	5
5	5	5	100	5
5	5	5	5	5

$*$

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	- 1	-1

$=$

0	0	-95	-95	-95
0	0	-95	760	-95
0	0	-95	-95	-95

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (1)

Le Gradient

- Soit $f(x, y)$, alors

$$\nabla f = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- Magnitude du Gradient

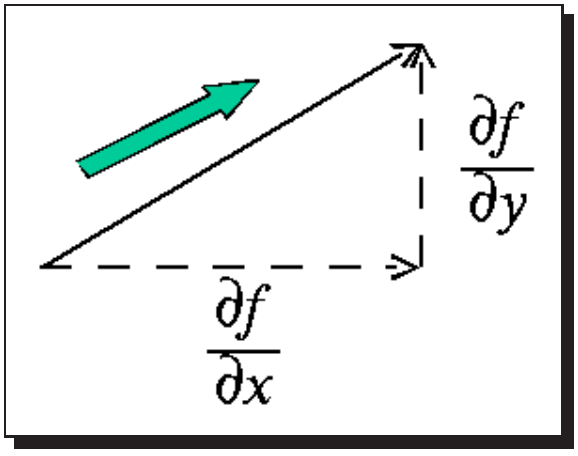
$$\text{mag}(\nabla f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

- Approximation de la Magnitude

$$\text{mag}(\nabla f) \approx |\frac{\partial f}{\partial x}| + |\frac{\partial f}{\partial y}|$$

- Direction du Gradient

$$\theta = \arctan\left(\frac{\partial f}{\partial y} / \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$



FILTRAGE SPATIALE
FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (2)

Approximation du Gradient (en x)

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta_x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta_x, y) - f(x,y)}{\Delta_x} = \lim\limits_{\Delta_x \to 0} \dfrac{f(x,y) - f(x-\Delta_x, y)}{\Delta_x}$

$\Delta_x = 1$ ▶ Masque de convolution ▶ | 1 | -1 | ou | -1 | 1 |

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta_x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta_x, y) - f(x-\Delta_x, y)}{2\Delta_x}$

$\Delta_x = 1$ ▶ Masque de convolution ▶ | 1 | 0 | -1 |

Approximation du Gradient (en y)

Masque de convolution ▶ | 1 / -1 | ou | -1 / 1 | ou | -1 / 0 / 1 | ou | 1 / 0 / -1 |

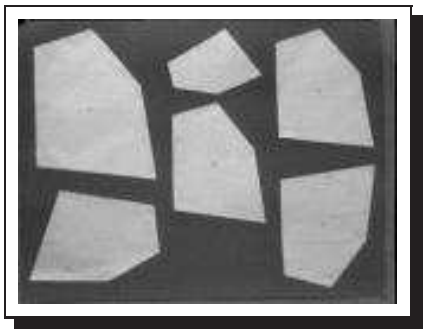
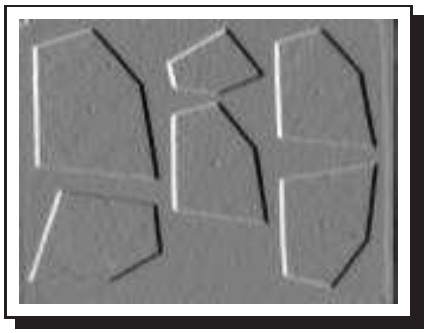
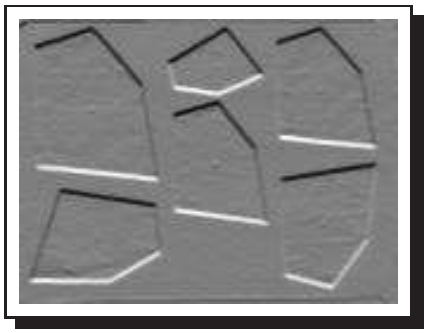


Image original



Gradient en x



Gradient en y

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (3)

Filtre de Robert

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx f(x,y) - f(x-1,y-1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx f(x-1,y) - f(x,y-1)$$

On obtient respectivement, les masques suivants,

1	0
0	-1

et

0	1
-1	0

- Sensible au bruit

Filtre de Prewitt

Filtre Moyenneur + Gradient

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

et

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1

1
1
1

-1	0	1

et

-1
0
1

1	1	1

Filtre Gaussien + Gradient = Filtre de Sobel

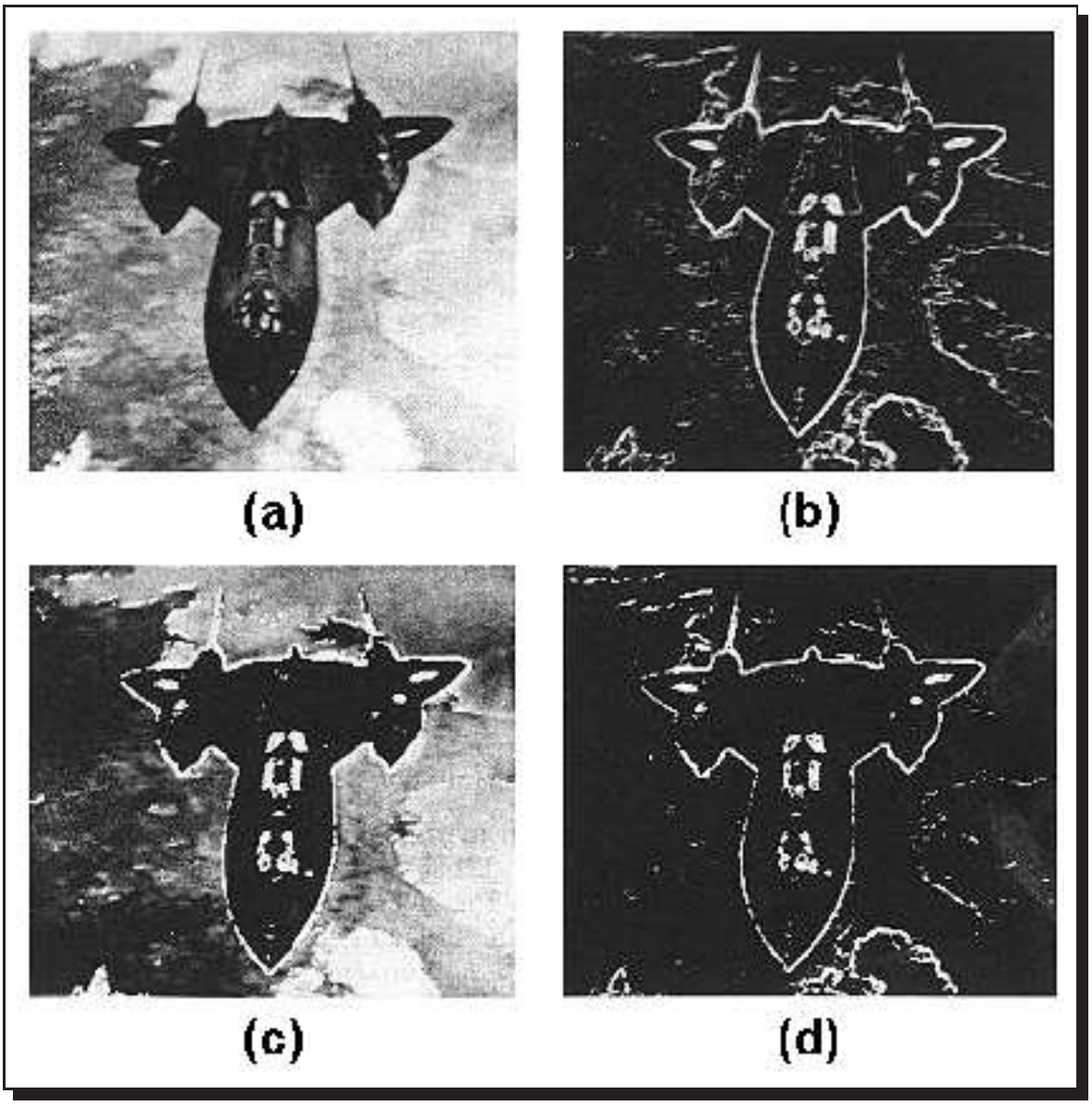
-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

et

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (4)

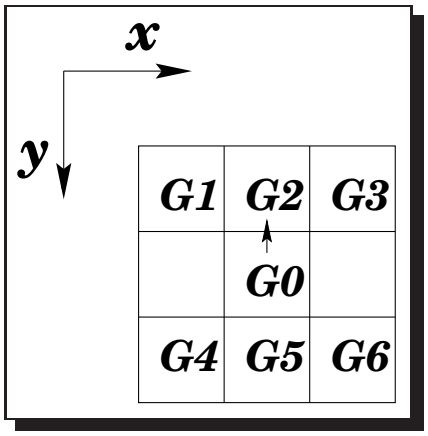
Exemple



- (a) Image originale
- (b) Image obtenue à partir des valeurs de magnitude du gradient (masque de Prewitt)
- (c) Image originale dont les pixels ayant un gradient $> 10\% I_{max} (= 25)$ ont été mis à 255
- (d) Idem que (c) mais les pixels dont les gradient $< 25\% I_{max}$ ont été mis à 0 (image binaire)

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (5)

Décision Contour



- G_0 contour si $|G_0| >$ seuil
- G_0 contour si $\begin{cases} G_2 < G_0 \\ G_5 < G_0 \end{cases}$ ou G_0 contour si $\begin{cases} G_2 < G_0 > G_5 \\ G_1 < G_0 > G_6 \\ G_3 < G_0 > G_4 \end{cases}$
- Seuillage par hystéresis

On définit deux seuils S_b (seuil bas) et S_h (seuil haut) et la classification en pts de contour ou non est donnée

$$\begin{cases} G_0 > S_h & \text{Pts de contour (PC)} \\ G_0 > S_b & \text{Pts de contour possible (PCP)} \\ G_0 < S_b & \text{Pas de contour (PNC)} \end{cases}$$

Un point de contour possible (PCP) est ensuite classé comme un PC lorsque il a un voisin PC, ou PNC dans le cas contraire

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE PASSE-HAUT -LAPLACIEN- (1)

Dérivée seconde

- Formule des différences finis -

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f''(x,y) &= f'(x+1,y) - f'(x,y) \\ &= [f(x+1,y) - f(x,y)] - [f(x,y) - f(x-1,y)] \\ &= f(x+1,y) - 2f(x,y) + f(x-1,y)\end{aligned}$$

Convolution avec le masque ▶

1	-2	1

- Par convolution répétée -

-1	1

$*$

-1	1

$=$

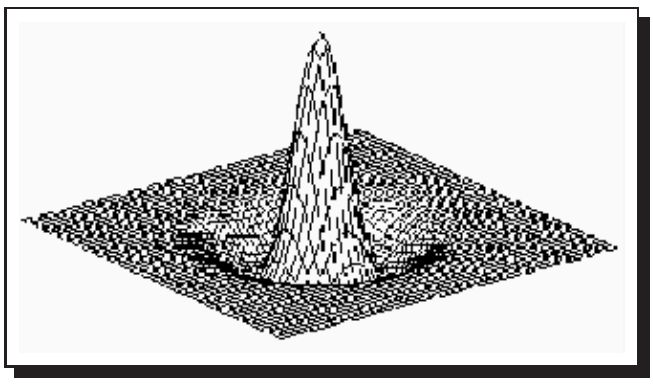
1	-2	1

Opérateur Laplacien

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right) \quad \blacktriangleright \quad [1 \quad -2 \quad 1] + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Autres formes

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



FILTRAGE SPATIALE
FILTRE PASSE-HAUT -LAPLACIEN- (2)

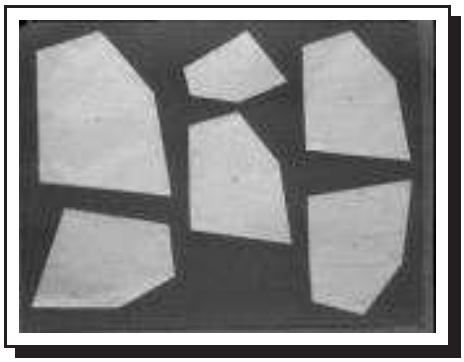
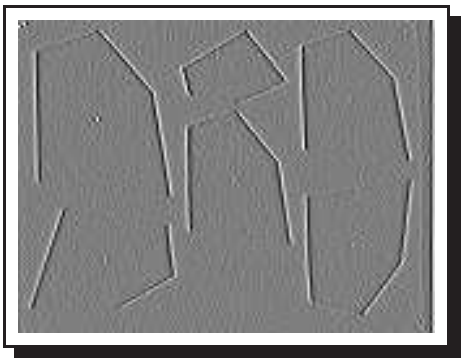
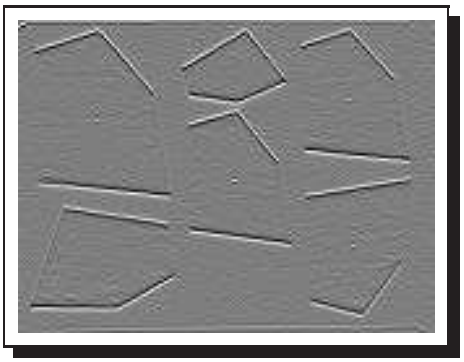


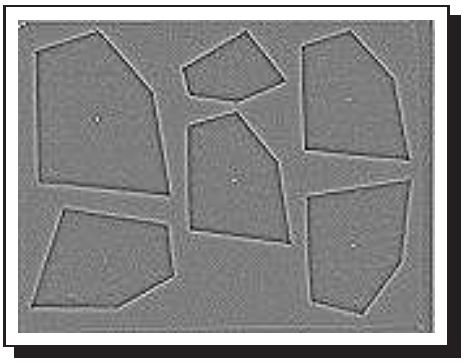
Image original



Dérivée 2nd en x



Dérivée 2nd en y



Laplacien

Filtre Moyenneur + Dérivée 2nd

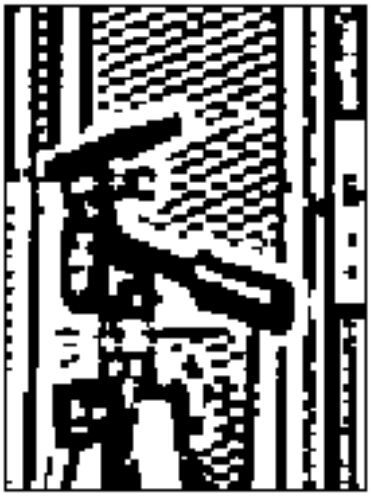
$$1/3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 1/3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtre Gaussien + Dérivée 2nd

$$1/4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 1/4 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

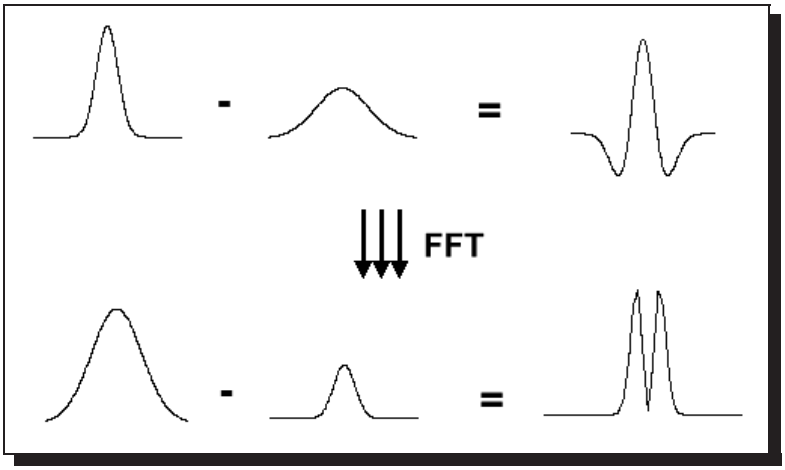
FILTRAGE SPATIALE
FILTRE DE MARR-HILDRETH (1)

1. On filtre l'image avec un filtre Gaussien
2. On prend le laplacien de l'image filtrée



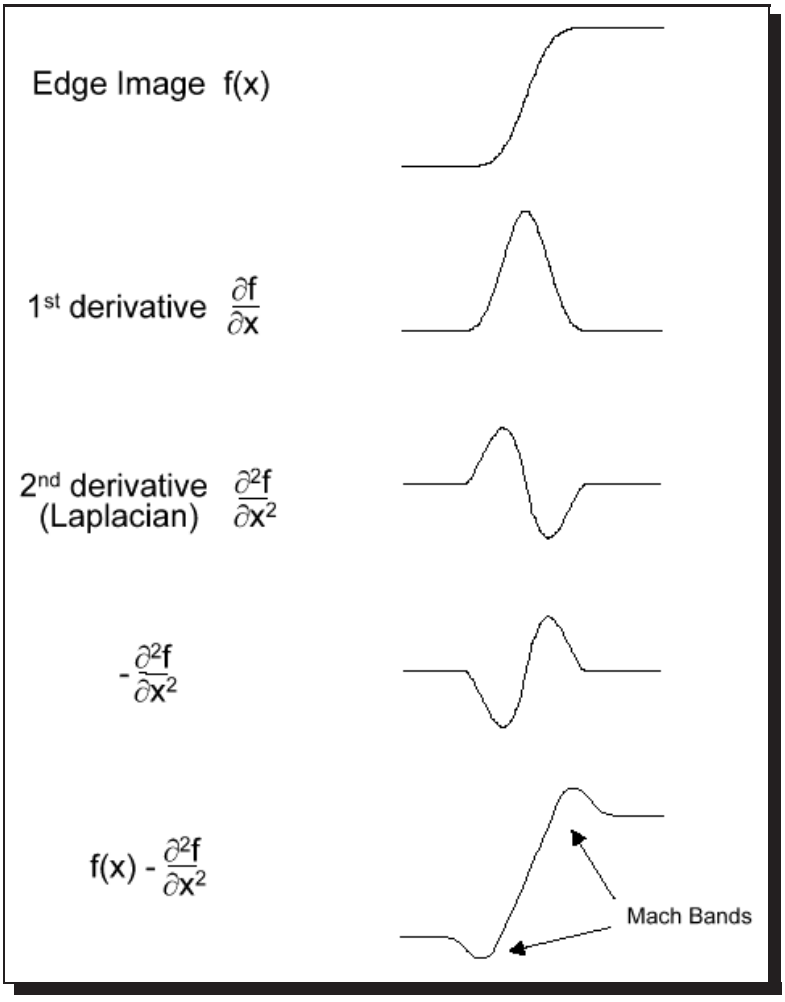
FILTRAGE SPATIALE
FILTRE DE MARR-HILDRETH (2)

Filtre de Marr-Hildreth ≈ Différence de deux Gaussienne



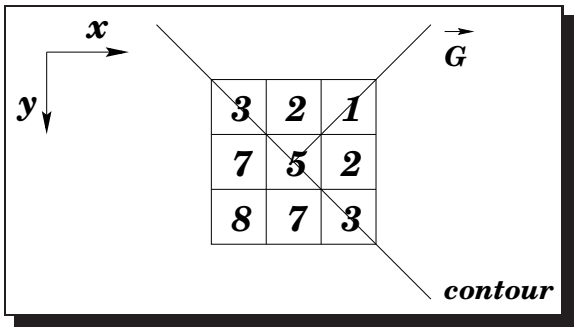
▶ Filtre Passe-bande

Rehaussement des contours avec le Laplacien



FILTRAGE SPATIALE
EXERCICE

Exercice 1



convoluée par l'op. gradient en x ▶

-1	0	1

et y

-1
0
1

on trouve, pour le pixel du milieu $G_y = -5$ et $G_x = 5$. Donc, $|\overrightarrow{G}| = 10$ et $\theta = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

Exercice 2

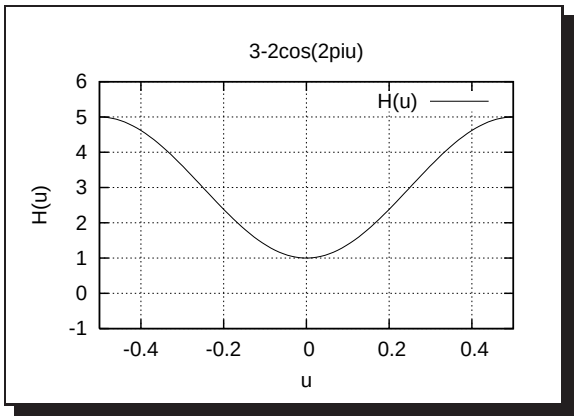
Trouver l'allure de la réponse fréquentielle de l'opérateur de convolution

1	-3	1
-3	9	-3
1	-3	1

.

Filtre séparable ▶

-1
3
-1

-1	3	-1

$$H(u) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x)\exp(-2\pi jux) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x)\exp(-2\pi jux)$$
$$= -\exp(2\pi ju) + 3 - \exp(-2\pi ju) = 3 - 2\cos(2\pi u)$$