



DIRO  
IFT 3205

## TRAITEMENT DU SIGNAL FILTRAGE SPATIAL

*Max Mignotte*

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

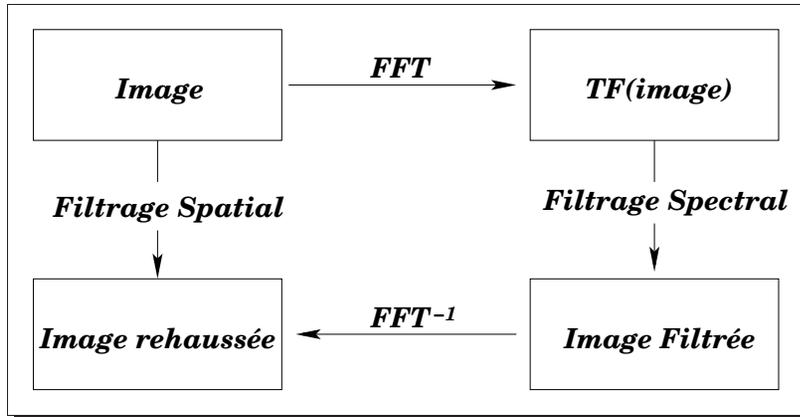
E-mail : [mignotte@iro.umontreal.ca](mailto:mignotte@iro.umontreal.ca)

## FILTRAGE SPATIALE SOMMAIRE

Introduction .....	2
Convolution Discrète 2D -Rappel- .....	4
Filtre de Moyenne (Passe-bas) .....	6
Filtre Gaussien (Passe-bas) .....	7
Autres Filtres Passe-bas .....	8
Filtre Passe-haut -Op. Mathématique- .....	9
Filtre Passe-haut -Gradient- .....	12
Filtre Passe-haut -Laplacien- .....	17
Filtre de Marr-Hildreth .....	19
Exercices .....	21

## FILTRAGE SPATIALE INTRODUCTION (1)

### Principe de Filtrage Spatial/Fréquentiel



### Théorème de Convolution -Rappel-

$$f(x, y) * g(x, y) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} F(u, \nu) \cdot G(u, \nu)$$

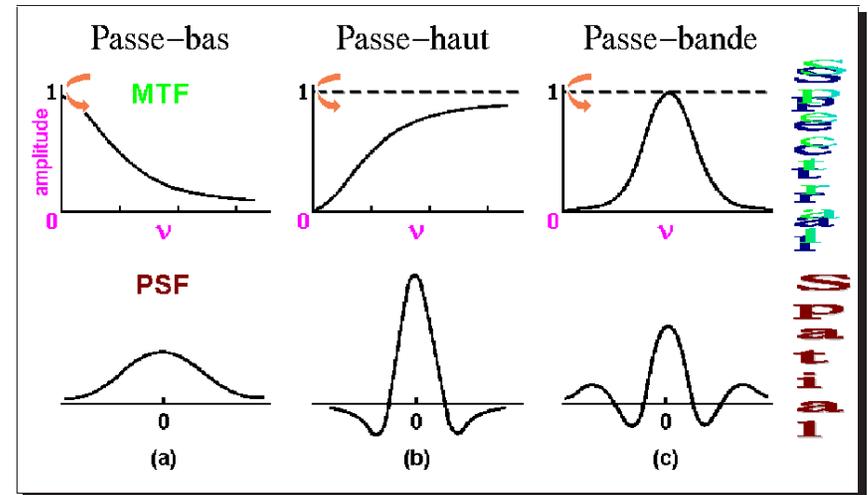
$$f(x, y) \cdot g(x, y) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} F(u, \nu) * G(u, \nu)$$

donc, si  $f(x, y)$  est l'image à filtrer (ou à rehausser) et  $g(x, y)$ , le filtre spatial (ou PSF ou masque)

$$f(x, y) * g(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \underbrace{\mathcal{F}\{f(x, y)\}} \cdot \underbrace{\mathcal{F}\{g(x, y)\}}_{G(u, \nu)} \right\}$$

## FILTRAGE SPATIALE INTRODUCTION (2)

### Trois Types de Filtrage

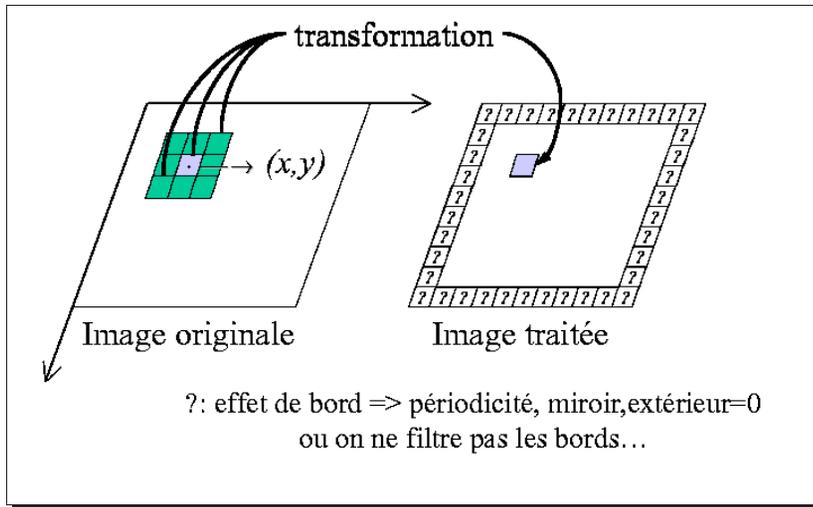


- **PSF** : Point Spread Function (ou Fonction d'Étalement Spectrale)
- **MTF** : Modulation Transfer Function (ou Fonction de Transfert)
- ▶ **Filtre Passe-bas** : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image
- ▶ **Filtre Passe-haut** : accentue les contours et les détails de l'image mais amplifie le bruit
- ▶ **Filtre Passe-bande** : élimine certaines fréquences indésirables présentes dans l'image

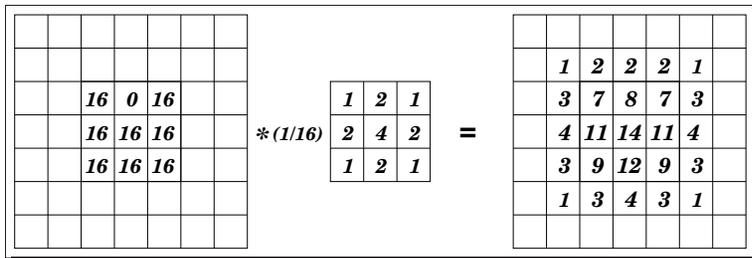
## FILTRAGE SPATIALE CONVOLUTION DISCRÈTE 2D -RAPPEL- (1)

### Convolution Discrète 2D -Rappel-

Transformation basée sur le voisinage d'un point  $(x, y)$



### Exemple



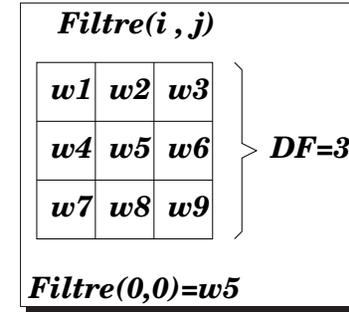
## FILTRAGE SPATIALE CONVOLUTION DISCRÈTE 2D -RAPPEL- (2)

$$g(x, y) = (f * \text{filtre})(x, y) = \sum_i \sum_j f(x - i, y - j) \text{filtre}(i, j)$$

### Remarque

- Généralement le masque est de dimension  $(DF)$  impair et symétrique et dans ce cas

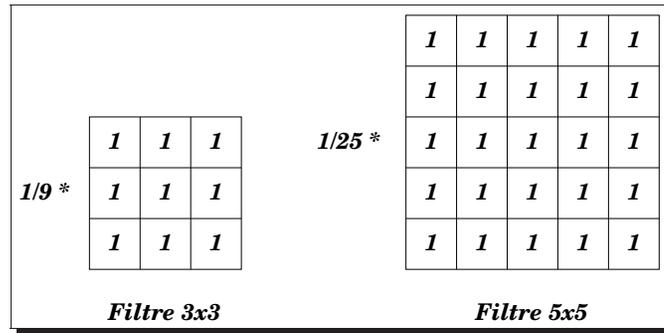
$$(f * \text{filtre})(x, y) = \sum_{i=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} \sum_{j=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} f(x + i, y + j) \text{filtre}(i, j)$$



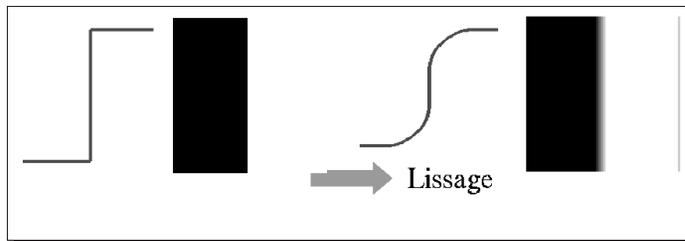
$$g(x, y) = w_1 f(x - 1, y - 1) + w_2 f(x, y - 1) + w_3 f(x + 1, y - 1) + w_4 f(x - 1, y) + w_5 f(x, y) + w_6 f(x + 1, y) + w_7 f(x - 1, y + 1) + w_8 f(x, y + 1) + w_9 f(x + 1, y + 1)$$

- Afin de conserver la moyenne de l'image  $f(x, y)$ , la somme des éléments du filtre est normalisée à 1 (i.e.,  $\sum_i w_i = 1$ )

## FILTRAGE SPATIALE FILTRE DE MOYENNE (PASSE-BAS)



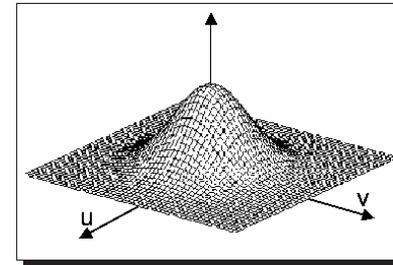
### Exemple



► **Filtre Passe-bas** : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image (flou)

## FILTRAGE SPATIALE FILTRE GAUSSIEN (PASSE-BAS)

$$\text{Gaussienne}(x,y) = \exp(-\pi(x^2 + y^2)/\sigma^2)$$



$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} & & 1 & 2 & 1 \\ & (1/16) & & & \\ & & 2 & 4 & 2 \\ & & & & \\ & & 1 & 2 & 1 \end{matrix} \\
 \\
 (1/4) \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} * (1/4) \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} &= (1/16) \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix} \\
 \\
 (1/4) \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} * (1/4) \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \end{matrix} &= (1/16) \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

## FILTRAGE SPATIALE AUTRES FILTRES PASSE-BAS

### Filtre Binomial

Les coefficients de ce filtre sont obtenus par le binome de Newton. Un filtre 1D Binomial du quatrième ordre donne le vecteur  $(1/16)(1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1)$ . Le filtre 2D est

$$\frac{1}{256} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

### Filtre Pyramidal

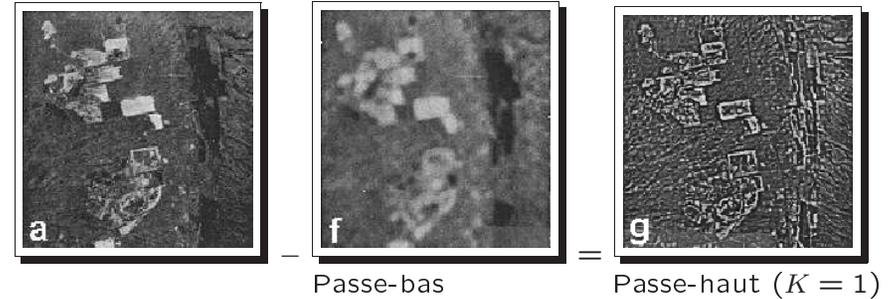
$$\frac{1}{81} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

### Filtre Conique

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

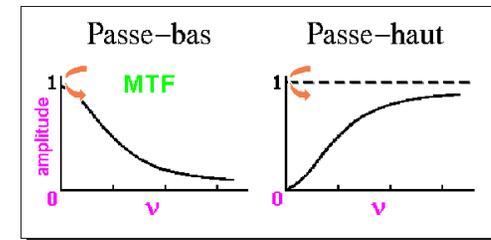
## FILTRAGE SPATIALE FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (1)

### Filtre "High-boost"



$$\text{High boost} = K(\text{original}) - \text{Passe-bas}(\text{original})$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= Kf(x, y) - f(x, y) * h(x, y) \\ &= (K - 1)f(x, y) + (f(x, y) * \delta(x, y)) - f(x, y) * h(x, y) \\ &= (K - 1)f(x, y) + f(x, y) * (\delta(x, y) - h(x, y)) \\ &\Downarrow \mathcal{F} \\ G(u, v) &= (K - 1)F(u, v) + F(u, v) \underbrace{[1 - H(u, v)]}_{\text{Passe-haut}} \end{aligned}$$



- $K = 1$  Passe-haut
- $K > 1$  Rehaussement de Contour

## FILTRAGE SPATIALE

### FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (2)

- Filtre 3 × 3 -

$$\delta(x, y) - h(x, y) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Filtre 5 × 5 -

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

### Opérations sur les filtres de voisinage

Passe-bas

$$\frac{1}{35} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \boxed{1} \right\}$$

Passe-haut

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \boxed{25} \right\}$$

## FILTRAGE SPATIALE

### FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (3)

Détection de Point

Convolution avec

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Grande valeur positive ► point blanc sur fond noir
- Grande valeur négative ► point noir sur fond blanc

- Exemple -

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 100 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -95 & -95 & -95 \\ 0 & 0 & -95 & 760 & -95 \\ 0 & 0 & -95 & -95 & -95 \end{bmatrix}$$

## FILTRAGE SPATIALE FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (1)

### Le Gradient

- Soit  $f(x, y)$ , alors

$$\nabla f = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- Magnitude du Gradient

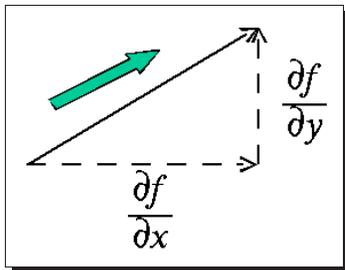
$$\text{mag}(\nabla f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

- Approximation de la Magnitude

$$\text{mag}(\nabla f) \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

- Direction du Gradient

$$\theta = \arctan\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)$$



## FILTRAGE SPATIALE FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (2)

### Approximation du Gradient (en x)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta_x, y) - f(x, y)}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x - \Delta_x, y)}{\Delta_x}$$

$\Delta_x = 1$  ► Masque de convolution ► 

1	-1
---	----

 ou 

-1	1
----	---

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta_x, y) - f(x - \Delta_x, y)}{2\Delta_x}$$

$\Delta_x = 1$  ► Masque de convolution ► 

1	0	-1
---	---	----

### Approximation du Gradient (en y)

Masque de convolution ► 

1	-1
-1	1

 ou 

-1	1
1	-1

 ou 

-1	0
0	-1

 ou 

1	0
0	-1

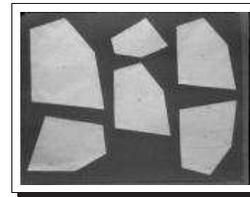
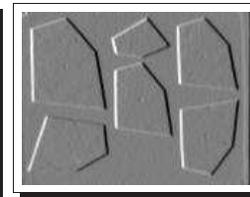
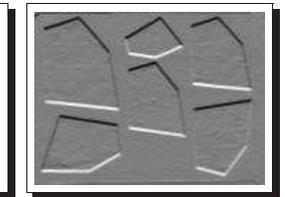


Image original



Gradient en x



Gradient en y

## FILTRAGE SPATIALE

### FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (3)

#### Filtre de Robert

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx f(x, y) - f(x - 1, y - 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx f(x - 1, y) - f(x, y - 1)$$

On obtient respectivement, les masques suivants,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

► Sensible au bruit

#### Filtre de Prewitt

Filtre Moyenneur + Gradient

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

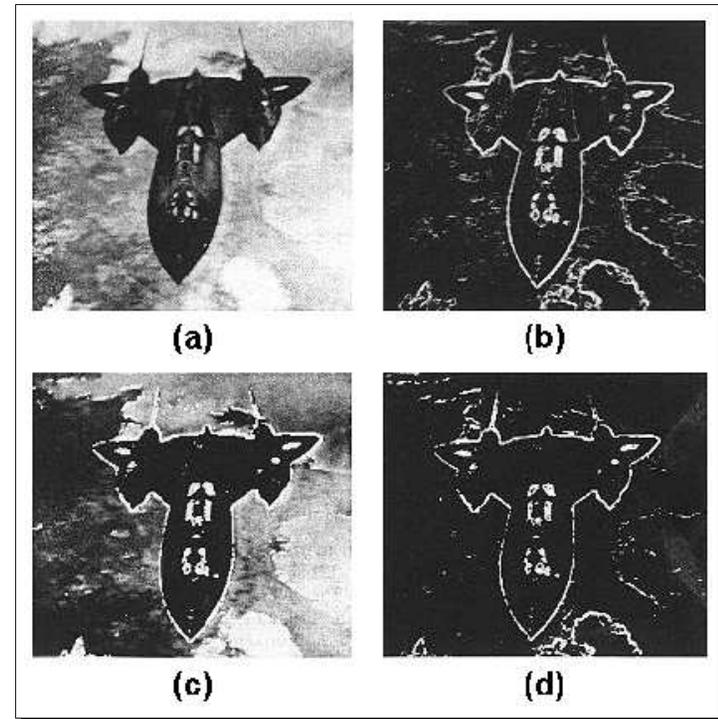
Filtre Gaussien + Gradient = Filtre de Sobel

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

## FILTRAGE SPATIALE

### FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (4)

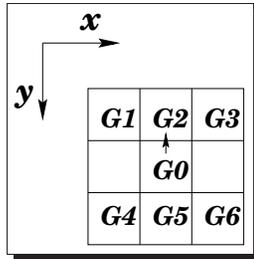
#### Exemple



- (a) Image originale
- (b) Image obtenue à partir des valeurs de magnitude du gradient (masque de Prewitt)
- (c) Image originale dont les pixels ayant un gradient  $> 10\%I_{max}(= 25)$  ont été mis à 255
- (d) Idem que (c) mais les pixels dont les gradient  $< 25\%I_{max}$  ont été mis à 0 (image binaire)

## FILTRAGE SPATIALE FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (5)

### Décision Contour



- $G_0$  contour si  $|G_0| > \text{seuil}$
- $G_0$  contour si  $\begin{cases} G_2 < G_0 \\ G_5 < G_0 \end{cases}$  ou  $G_0$  contour si  $\begin{cases} G_1 < G_0 \\ G_3 < G_0 \end{cases}$

### Seuillage par hystérésis

On définit deux seuils  $S_b$  (seuil bas) et  $S_h$  (seuil haut) et la classification en pts de contour ou non est donnée

$$\begin{cases} G_0 > S_h & \text{Pts de contour (PC)} \\ G_0 > S_b & \text{Pts de contour possible (PCP)} \\ G_0 < S_b & \text{Pas de contour (PNC)} \end{cases}$$

Un point de contour possible (PCP) est ensuite classé comme un PC lorsque il a un voisin PC, ou PNC dans le cas contraire

## FILTRAGE SPATIALE FILTRE PASSE-HAUT -LAPLACIEN- (1)

### Dérivée seconde

- Formule des différences finis -

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} &= f''(x,y) = f'(x+1,y) - f'(x,y) \\ &= [f(x+1,y) - f(x,y)] - [f(x,y) - f(x-1,y)] \\ &= f(x+1,y) - 2f(x,y) + f(x-1,y) \end{aligned}$$

Convolution avec le masque ► 

1	-2	1
---	----	---

- Par convolution répétée -

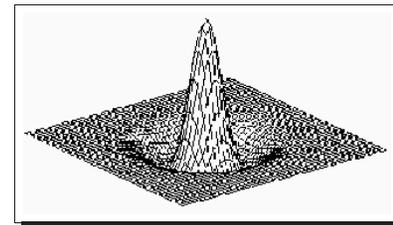
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

### Opérateur Laplacien

$$\nabla^2 = \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \quad \blacktriangleright \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Autres formes

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



## FILTRAGE SPATIALE FILTRE PASSE-HAUT -LAPLACIEN- (2)

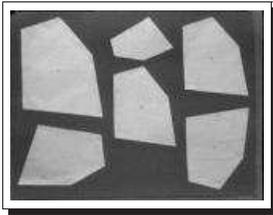
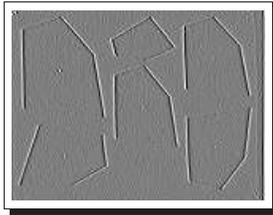
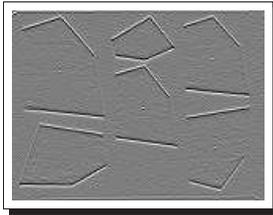


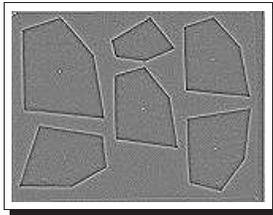
Image original



Dérivée 2nd en x



Dérivée 2nd en y



Laplacien

Filtre Moyenneur + Dérivée 2nd

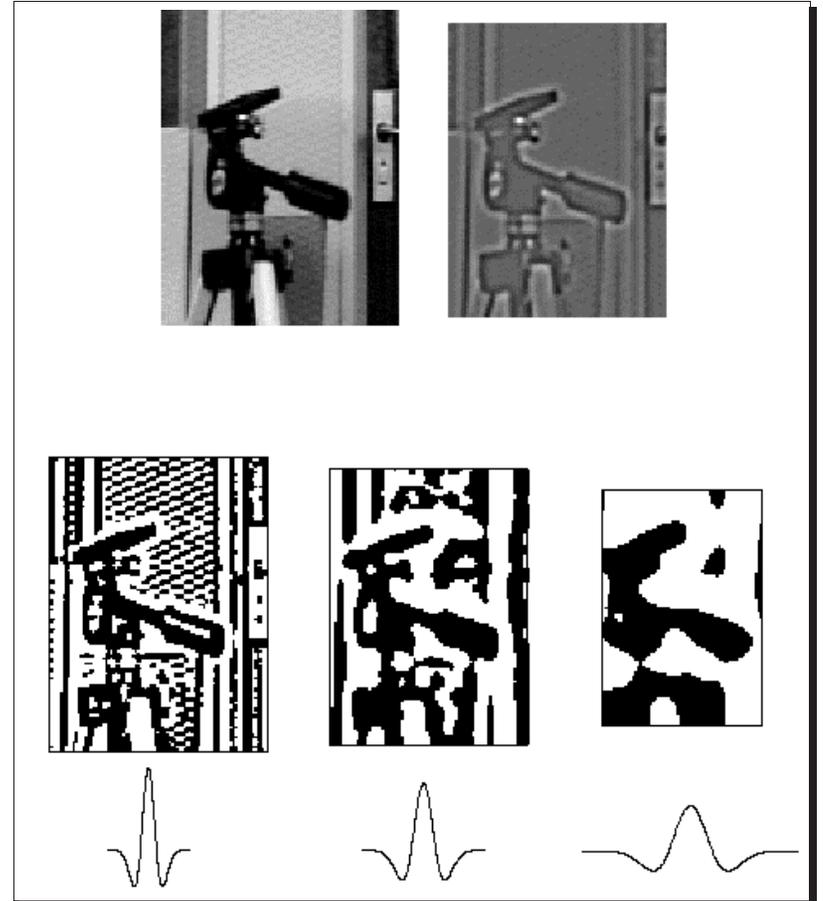
$$1/3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 1/3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtre Gaussien + Dérivée 2nd

$$1/4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 1/4 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

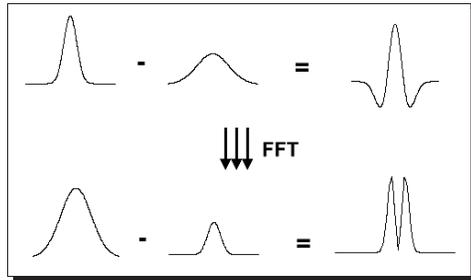
## FILTRAGE SPATIALE FILTRE DE MARR-HILDRETH (1)

1. On filtre l'image avec un filtre Gaussien
2. On prend le laplacien de l'image filtrée



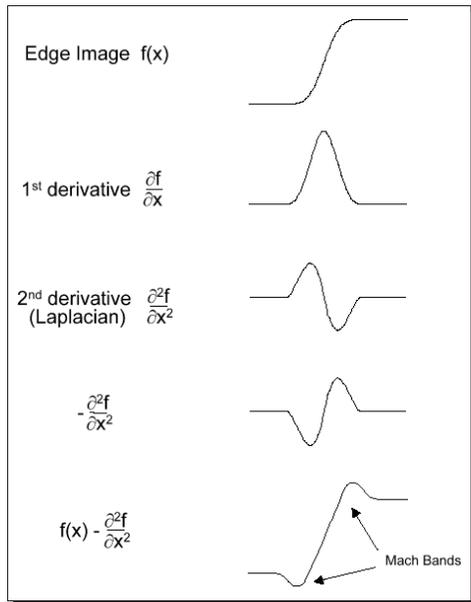
## FILTRAGE SPATIALE FILTRE DE MARR-HILDRETH (2)

Filtre de Marr-Hildreth  $\approx$  Différence de deux Gaussienne



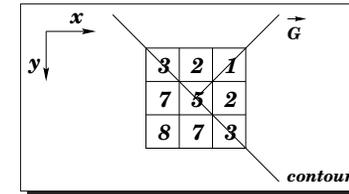
► Filtre Passe-bande

Rehaussement des contours avec le Laplacien



## FILTRAGE SPATIALE EXERCICE

Exercice 1



convoluée par l'op. gradient en  $x$  ► 

-1
0
1

 et  $y$ 

-1
0
1

on trouve, pour le pixel du milieu  $G_y = -5$  et  $G_x = 5$ .  
Donc,  $|\vec{G}| = 10$  et  $\theta = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

Exercice 2

Trouver l'allure de la réponse fréquentielle de l'opérateur de convolution

1	-3	1
-3	9	-3
1	-3	1

Filtre séparable ► 

-1
3
-1

-1	3	-1
----	---	----

$$H(u) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-2\pi j u x) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi j u x)$$

$$= -\exp(2\pi j u) + 3 - \exp(-2\pi j u) = 3 - 2 \cos(2\pi u)$$

