

DIRO  
IFT 3205

# TRAITEMENT DU SIGNAL SYSTÈME LIT RATIONNEL

*Max Mignotte*

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

*E-mail : [mignotte@iro.umontreal.ca](mailto:mignotte@iro.umontreal.ca)*

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

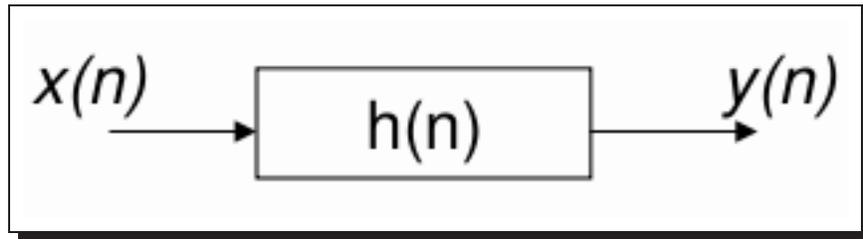
## SOMMAIRE

Exemple de fonctions de transfert .....	3
Propriétés .....	8
Stabilité .....	11
Analyse fréquentielle .....	16
Filtres RIF et RII .....	23
Exemple de filtre .....	25
Exemple d'étude complète .....	27

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## EX. DE FONCTIONS TRANSFERT (1)

Prenons le cas d'un **système** ou un filtre définie par son **équation aux différences**



$$\sum_{m=0}^N a_m y(n-m) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

$\Downarrow \mathcal{Z}$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{m=0}^N a_m z^{-m}} = H(z)$$

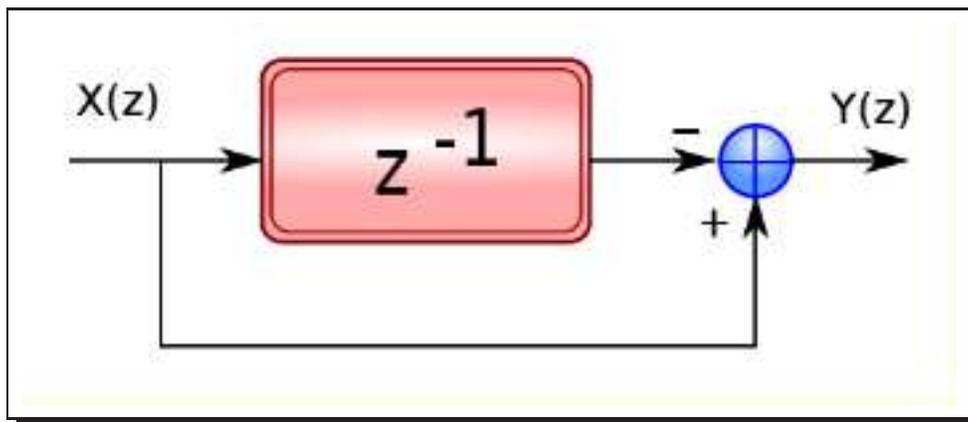
La fonction de transfert  $H(z)$  de ces systèmes est définie par une fraction **rationnelle**

### Système Délai

$$y(n) = x(n-1] \quad \stackrel{\mathcal{Z}}{\Leftrightarrow} \quad Y(z) = z^{-1}X(z) \Leftrightarrow H(z) = z^{-1}$$

### Système Dérivateur

$$y(n) = x(n) - x(n-1] \quad \stackrel{\mathcal{Z}}{\Leftrightarrow} \quad Y(z) = X(z)(1 - z^{-1})$$
$$\Leftrightarrow H(z) = 1 - z^{-1}$$



# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## EX. DE FONCTIONS TRANSFERT (2)

### Système Moyenneur

Soit le filtre moyenneur des  $M$  échantillons précédents

$$y(n) = \frac{1}{M} \sum_{m=n-M+1}^n x(m) = \frac{1}{M} \{x(n) + x(n-1) + \dots + x(n-M+1)\}$$

$\downarrow \mathcal{Z}$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{M} \{1 + z^{-1} + \dots + z^{-M+1}\}$$

———— Non-récurif ————

$$y(n) = \frac{1}{M} x(n) + \dots + \frac{1}{M} x(n-M+2) + \frac{1}{M} x(n-M+1)$$

$$y(n-1) = \frac{1}{M} x(n-1) + \dots + \frac{1}{M} x(n-M+1) + \frac{1}{M} x(n-M)$$

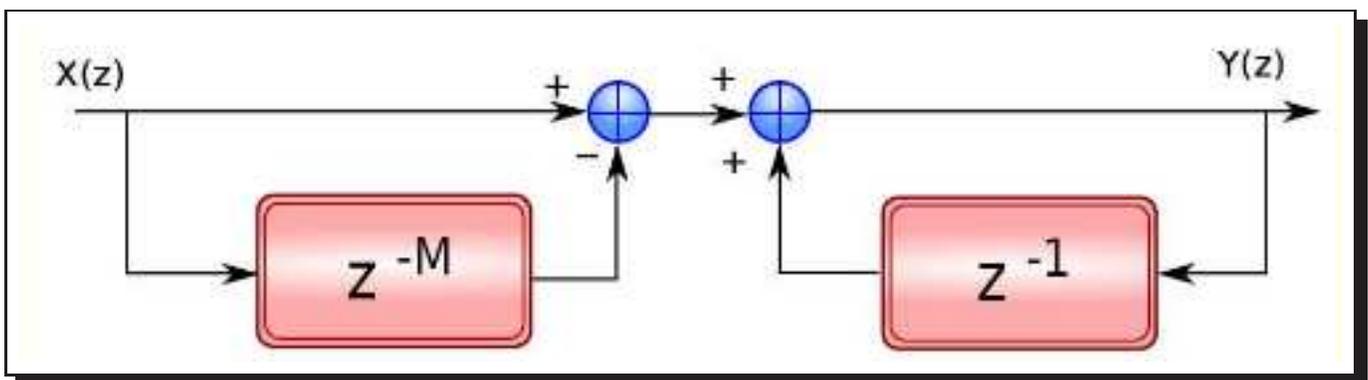
———— Récurif ————

$$y(n) = \frac{1}{M} x(n) + y(n-1) - \frac{1}{M} x(n-M)$$

$\downarrow \mathcal{Z}$

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + \frac{1}{M} X(z) - \frac{1}{M} z^{-M} X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1}{M} \cdot \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}}$$



- Recalculer  $h(n) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)]$

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## EX. DE FONCTIONS TRANSFERT (3)

### Système Accumulateur

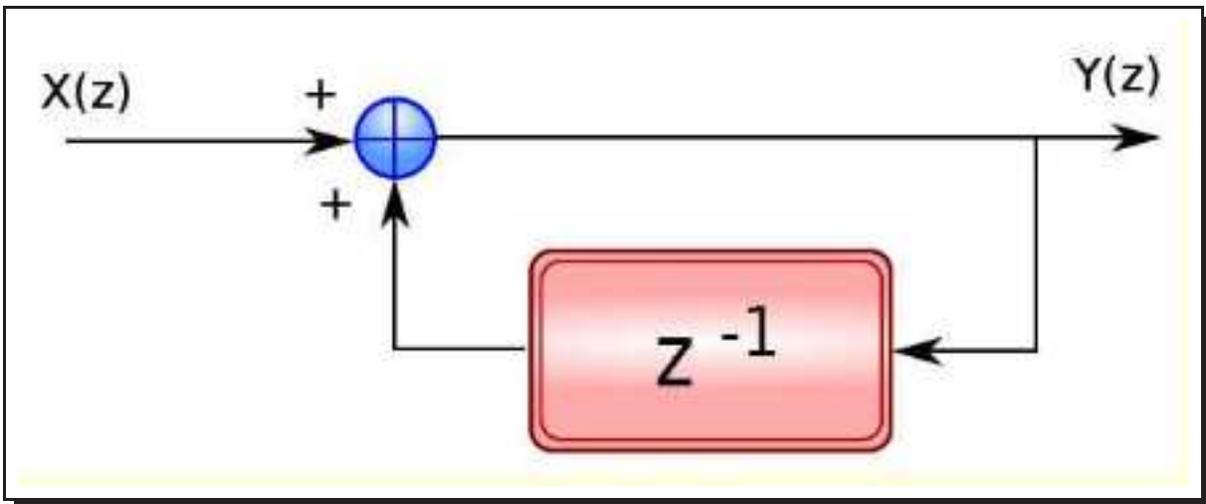
Soit le filtre ou système intégrateur suivant fait sur tous les échantillons passés

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$$

↓  $\mathcal{Z}$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + z^{-1} + \dots + z^{-n} + z^{-\infty} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

i.e. ;  $Y(z) = X(z) + z^{-1}Y(z)$



### Réponse Impulsionnelle $h(n)$

► Par inversion :  $H(z) \stackrel{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightleftharpoons} h(n) = \mathcal{U}(n)$

► Par réponse du système à une impulsion du dirac

$$H(z) = Y(z) \Big|_{\text{si } X(z)=1} \stackrel{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightleftharpoons} h(n) = y(n) \Big|_{\text{si } x(n)=\delta(n)}$$

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## EX. DE FONCTIONS TRANSFERT (4)

### Système Défini Par une Equation Différentielle

On désire réaliser un filtre numérique qui se comporterait comme un syst. analogique du 1er ordre défini par

$$y + \tau \frac{\partial y}{\partial t} = x$$

On utilise l'approx. de la dérivée,  $\frac{\partial y(t)}{\partial t} \approx y(n) - y(n-1)$

$$y + \tau \frac{\partial y}{\partial t} = x \stackrel{\text{discret}}{\Leftrightarrow} (1 + \tau) y(n) - \tau y(n-1) = x(n)$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}$$
$$Y(z) \left[ (1 + \tau) - \tau z^{-1} \right] = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{(1 + \tau) - \tau z^{-1}}$$

### Réponse Impulsionnelle $h(n)$

► Par inversion :  $H(z) \stackrel{\mathcal{Z}^{-1}}{\Leftrightarrow} h(n) = \frac{1}{1 + \tau} \left[ \left( \frac{\tau}{1 + \tau} \right)^n \mathcal{U}(n) \right]$   
Si  $\tau = 1 \Leftrightarrow h(n) = \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} \mathcal{U}(n)$

► Par réponse du système à  $x(n) = \delta(n)$

$$\text{Si } \tau = 1 \Leftrightarrow y(n) = \frac{1}{2} \left[ y(n-1) + x(n) \right]$$

$$y(0) = \frac{1}{2}$$

$$y(1) =$$

$$y(2) =$$

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## EX. DE FONCTIONS TRANSFERT (5)

### Réponse Indicielle

On appelle réponse indicielle d'un système, sa réponse à une suite échelon unité, i.e., pour  $x(n) = \mathcal{U}(n)$

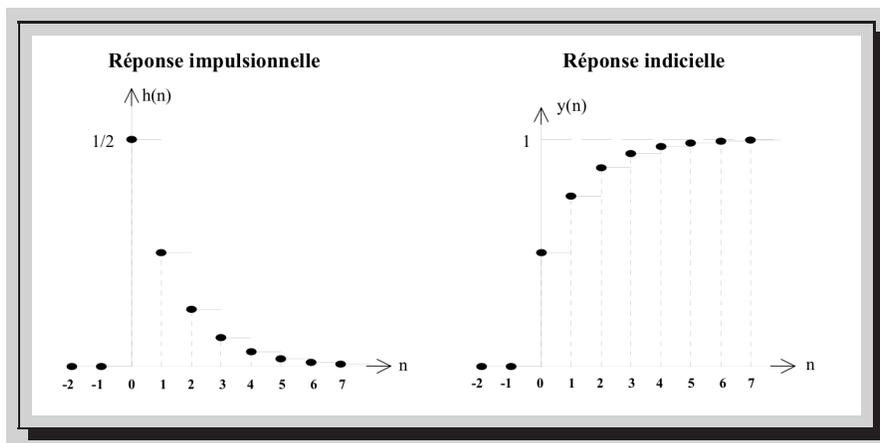
► Par inversion

$$\underbrace{Y(z)}_{\text{si } X(z)=Z[\mathcal{U}(n)]} = H_u(z) = \frac{\frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{-1/2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{1}{(1 - z^{-1})}$$

↓  $Z^{-1}$

$$h_u(n) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathcal{U}(n) + \mathcal{U}(n)$$

$$h_u(n) = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] \mathcal{U}(n)$$



► en utilisant l'équation récurrente et  $x(n) = \mathcal{U}(n)$

$$\text{Si } \tau = 1 \Leftrightarrow y(n) = \frac{1}{2} \left[ y(n-1) + \mathcal{U}(n) \right]$$

$$y(0) = \frac{1}{2}$$

$$y(1) = \frac{3}{4}$$

$$y(2) =$$

### Réponse fréquentielle ou transmittance

On étudie ►  $H[z = \exp(2j\pi\nu)]$

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## EX. DE FONCTIONS TRANSFERT (6)

### Système ou Filtre RIF

Le filtre à **Réponse Impulsionnelle Finie** à une réponse uniquement basée sur les valeurs du signal d'entrée

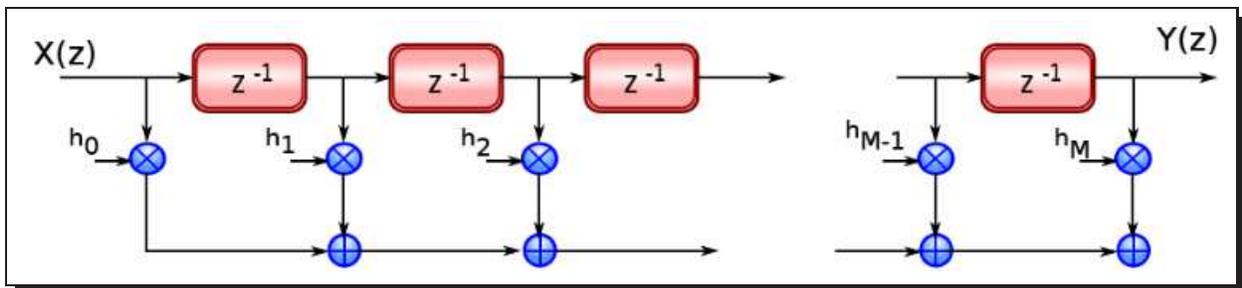
⇔

- $h(n)$  est de **durée finie**
- **non récursif**
- à **moyenne mobile**

Contrairement au filtre RII (Réponse Impuls. Infinie)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m) h(m)$$

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(M)x(n-M)$$



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \dots + h(M)z^{-M}$$

# SYSTÈME LTI RATIONNEL

## PROPRIÉTÉS (1)

### Système Sans Mémoire :

La sortie à l'instant  $n$  est une fonction de l'entrée uniquement à l'instant  $n$

- ▶ **Exemple :**  $y(n) = 2x(n)$  ou  $y(n) = x^2(n) + 3x(n)$
- ▶ **Contre-Exemple :**  $y(n) = x(n-1)$

### Système Linéaire :

Modèle mathémat. régi par le principe de superposition :

$$y(n) = T\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = aT\{x_1(n)\} + bT\{x_2(n)\}$$

### Système Causal :

La sortie à n'importe quel instant ne dépend que des valeurs de l'entrée aux instant présent et passés : syst. causal ▶ tps réel

- ▶ **Exemple :**  $y(n) = x(n) - x(n-1)$
- ▶ **Contre-ex. :**  $y(n) = x(n+1) - x(n)$  ou  $y(n) = x(-n)$

### Système Inversible :

La sortie de la mise en série du système et du système inverse donnera la même entrée :

$$x(n) * h(n) * h_{inv}(n) = x(n)$$

### Système Stable :

Si n'importe quelle entrée bornée donne une sortie bornée

- ▶ **Contre-ex. :** Intégrateur ou accumulateur

### Système Temporellement Invariant Dans Le Temps :

Un décalage temporel sur le signal d'entrée entraîne le même décalage sur le signal de sortie

- ▶ **Contre-ex. :**  $y(n) = nx(n)$

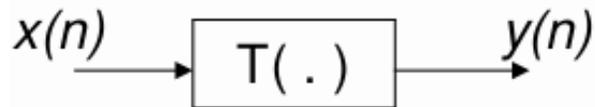
**Un système LTI initialement au repos est un système convolutif**

# SYSTÈME LTI RATIONNEL

## PROPRIÉTÉS (2)

Un système LTI (initialement au repos) est convolutif

$$y(n) = T\{x(n)\}$$



Par définition ou modélisation :

- 1.  $h(n)$  est la réponse de  $T$  pour  $\delta(n)$  :  $h(n) = T[\delta(n)]$
- 2. Un signal discret s'écrit :  $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n - k)$

• En utilisant la **linéarité** de  $T$  :

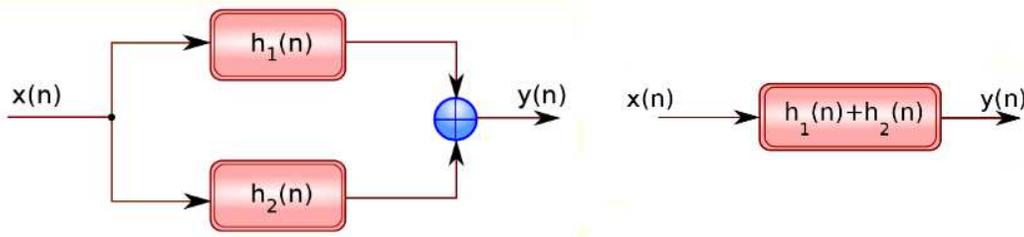
$$y(n) = T\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n - k) \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T\{\delta(n - k)\}$$

• En utilisant l'**invariance dans le temps** et 1. :

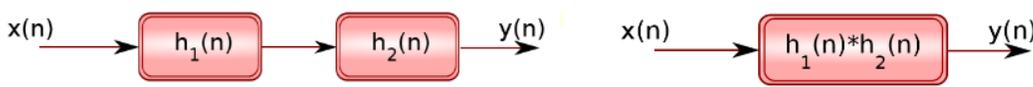
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n - k) \quad \Leftrightarrow \quad y(n) = x(n) * h(n)$$

### Propriétés : connexion

**Parallèle** :  $x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$



**Série** :  $x_n * h_1(n) * h_2(n) = x_n * (h_1(n) * h_2(n))$



# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## PÔLES & ZÉROS D'UNE FONCTION DE TRANSFERT

La formulation de  $H(z)$  sous la forme

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots}$$

offre l'avantage de passer à l'équation aux différences

Pour se donner une idée *-rapidement-* de la [stabilité] [réponse temporelle] [réponse fréquentielle] de ce filtre, il faut faire apparaître ses pôles et ses zéros

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = K \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots}{(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3) \dots}$$

- L'ordre du filtre est le nombre de pôle qu'il possède

- Les pôles régissent sa stabilité et sa réponse temporelle
- Les pôles et les zéros régissent sa réponse fréquentielle

- Ils permettent de caractériser deux type de filtres numériques

- Les filtres non récurrents ou RIF si tous les pôles sont au centre du plan  $\mathbb{C}$
- Les filtres récurrents ou RII si les pôles ne sont pas au centre du plan  $\mathbb{C}$

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

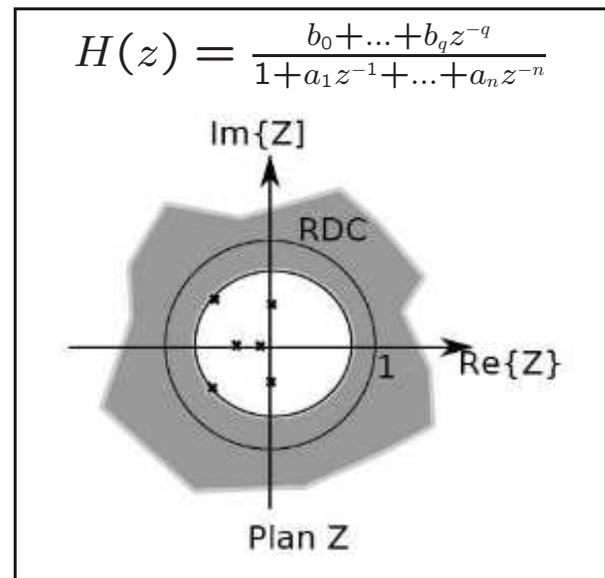
## STABILITÉ (1)

- La connaissance de  $H(z)$  n'est pas suffisant pour déterminer de façon unique un système : on a besoin de son domaine de convergence (DOC)

- Pour un **système causal**, son DOC est à l'extérieur du pôle le plus extérieur

- Pour qu'un système LIT causal soit stable, il faut que :

ces pôles  $\in$  du disque unité  
 $\Leftrightarrow$   
cercle unité ( $\mathcal{C}_{|z|=1}$ )  $\in$  DOC  
 $\Leftrightarrow$   
TFD[ $h(n)$ ] existe



### Nota

- Si les coefs de  $H(z)$  sont réels :

- La réponse impulsionnelle est réelle
- Les numérateurs et dénominateurs de  $H(z)$  sont des polynômes à coefs réels (i.e., ses pôles sont soit réels, soit vont par pair de complexes conjugués)

► Un filtre RIF qui a tous ses pôles à l'origine sera donc forcément toujours stable

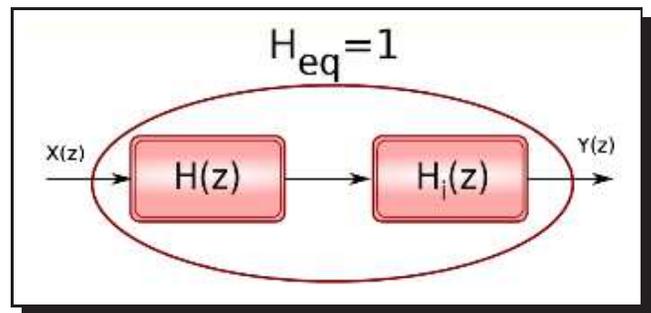
# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## STABILITÉ (2)

### Exemple : Système Inverse

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)}$$

$$g(n) = h(n) * h_i(n) = \delta(n)$$



### Exemple 1

$$H(z) = \frac{1 - 0.5 z^{-1}}{1 - 0.9 z^{-1}} \quad \text{DOC} : |z| > 0.9 \quad H_i(z) = \frac{1 - 0.9 z^{-1}}{1 - 0.5 z^{-1}}$$

- Le DOC de  $H_i(z)$  causal est  $|z| > 0.5$ , pôle à l'intérieur du cercle unité donc stable

### Exemple 2

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 0.5}{1 - 0.9 z^{-1}} \quad \text{DOC} : |z| > 0.9 \quad H_i(z) = \frac{1 - 0.9 z^{-1}}{z^{-1} - 0.5}$$

- Le DOC de  $H_i(z)$  causal est  $|z| > 2$ , pôle à l'extérieur du cercle unité donc instable
- $y(n) = -0.9\delta(n) - 1.1 (2)^n \mathcal{U}(n)$

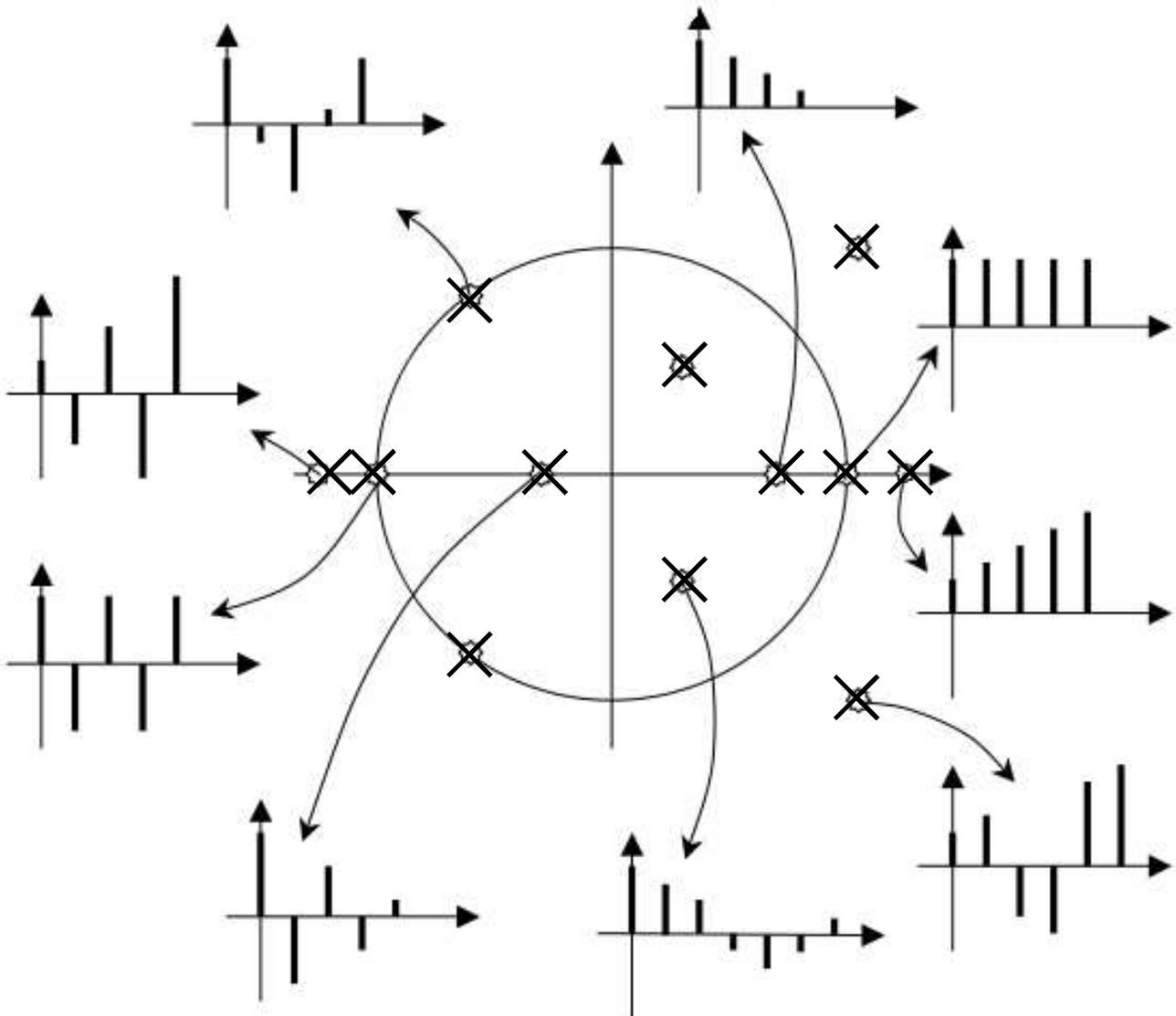
**On peut définir un filtre inverse causal de  $H(z)$  si ces pôles et zéros sont à l'intérieur du cercle unité**

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## STABILITÉ (3)

### Position des Pôles : Réponse Impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système dépend de la **position des pôles** de la fonction de transfert  $H(z)$



**PS** : les croix (x) désignent les **pôles**

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

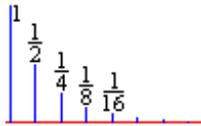
## STABILITÉ (4)

La réponse impulsionnelle d'un système dépend **du degré des pôles** de la fonction de transfert  $H(z)$

### Pôle d'ordre 1

$$H(z) = K \frac{N(z)}{z - p} \stackrel{z^{-1}}{\Leftrightarrow} h(n) = A p^n$$

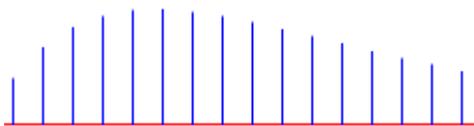
► Échelon amorti



### Pôle d'ordre 2

$$H(z) = K \frac{N(z)}{(z - p)^2} \stackrel{z^{-1}}{\Leftrightarrow} h(n) = (Bn + A) p^n$$

► Linéaire amorti



### Pôle d'ordre 3

$$H(z) = K \frac{N(z)}{(z - p)^3} \stackrel{z^{-1}}{\Leftrightarrow} h(n) = (Cn^2 + Bn + A) p^n$$

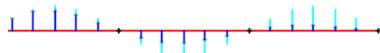
► Parabolique amorti



### 2 Pôles complexes conjugués

$$H(z) = K \frac{N(z)}{(z - p)(z - p^*)} \stackrel{z^{-1}}{\Leftrightarrow} h(n) = (A p^n) \sin(n\theta + \Phi)$$

► Sinusoidal amorti



# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## STABILITÉ (5)

D'une manière générale, tout  $H(z)$  se

Décompose en éléments simples et par  $\mathcal{TZ}^{-1}$  donne :  
 $h(n) = \sum \text{réponses} \{ \text{échelon, linéaire, ... amorti} \}$

### Exemple

$$H(z) = K \frac{N(z)}{(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3)^2(z - p_4)^3(z - p_5)(z - p_5^*)}$$

Somme des **modes** vus précédemment

En fonction de la position des pôles

1. **Stabilité asymptotique** : tous les pôles  $\in \mathcal{C}_{|z| < 1}$
2. **Stabilité marginale** : plusieurs pôles sur  $\mathcal{C}_{|z|=1}$

mais les autres pôles étant dans  $\mathcal{C}_{|z| < 1}$

**Exemple** : Intégrateur (pôle en 1) & oscillateurs

3. **Instabilité**

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## ANALYSE FRÉQUENTIELLE (1)

### Méthode Graphique

Utilise les pôles et zéros du système pour une analyse rapide des caractéristiques du système

$$H(e^{2\pi\nu j}) = A \frac{\prod_{m=1}^M (e^{2\pi\nu j} - z_m)}{\prod_{n=1}^N (e^{2\pi\nu j} - p_n)}$$

$$|H(e^{2\pi\nu j})| = A \frac{\prod_{i=1}^M Z_i M}{\prod_{j=1}^N P_j M} \quad \phi(f) = \sum_i (\vec{Ox}, Z_i \vec{M}) - \sum_j (\vec{Ox}, P_j \vec{M})$$

Dans le plan  $\mathbb{C}$  :

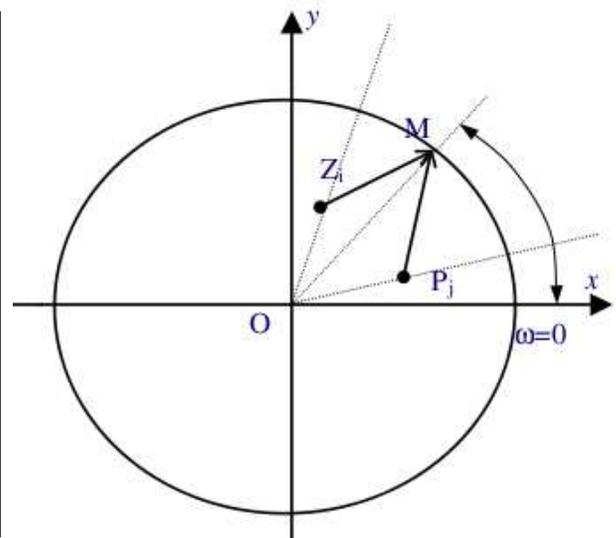
$M$  sur le cercle unité  $\mathcal{C}_{|z|=1}$

zéro  $z_m \Rightarrow \vec{OZ}_i$

pôle  $p_n \Rightarrow \vec{OP}_j$

$(z - z_m) \Rightarrow$  vecteur  $Z_i \vec{M}$

$(z - p_n) \Rightarrow$  vecteur  $P_j \vec{M}$



Pratiquement, pour un pts  $M(f)$  circulant sur  $\mathcal{C}_{|z|=1}$

1. Passer au voisinage d'un pôle  $\Leftrightarrow$  croissance de  $|H(f)|$  (résonance) et croissance rapide de  $\phi(f)$
2. Passer au voisinage d'un zéro  $\Leftrightarrow$  chute du gain de  $|H(f)|$  et décroissance rapide de  $\phi(f)$
3. Passer sur un zéro  $\Leftrightarrow$  rejet de la fréquence  $f$  (correspondante à ce zéro), i.e.,  $|H(f)| = 0$  et discontinuité de phase de  $180^\circ$

**Idée du comportement du syst. (passe-bas/haut/bande) et des atténuations ou résonance introduites dans le système**

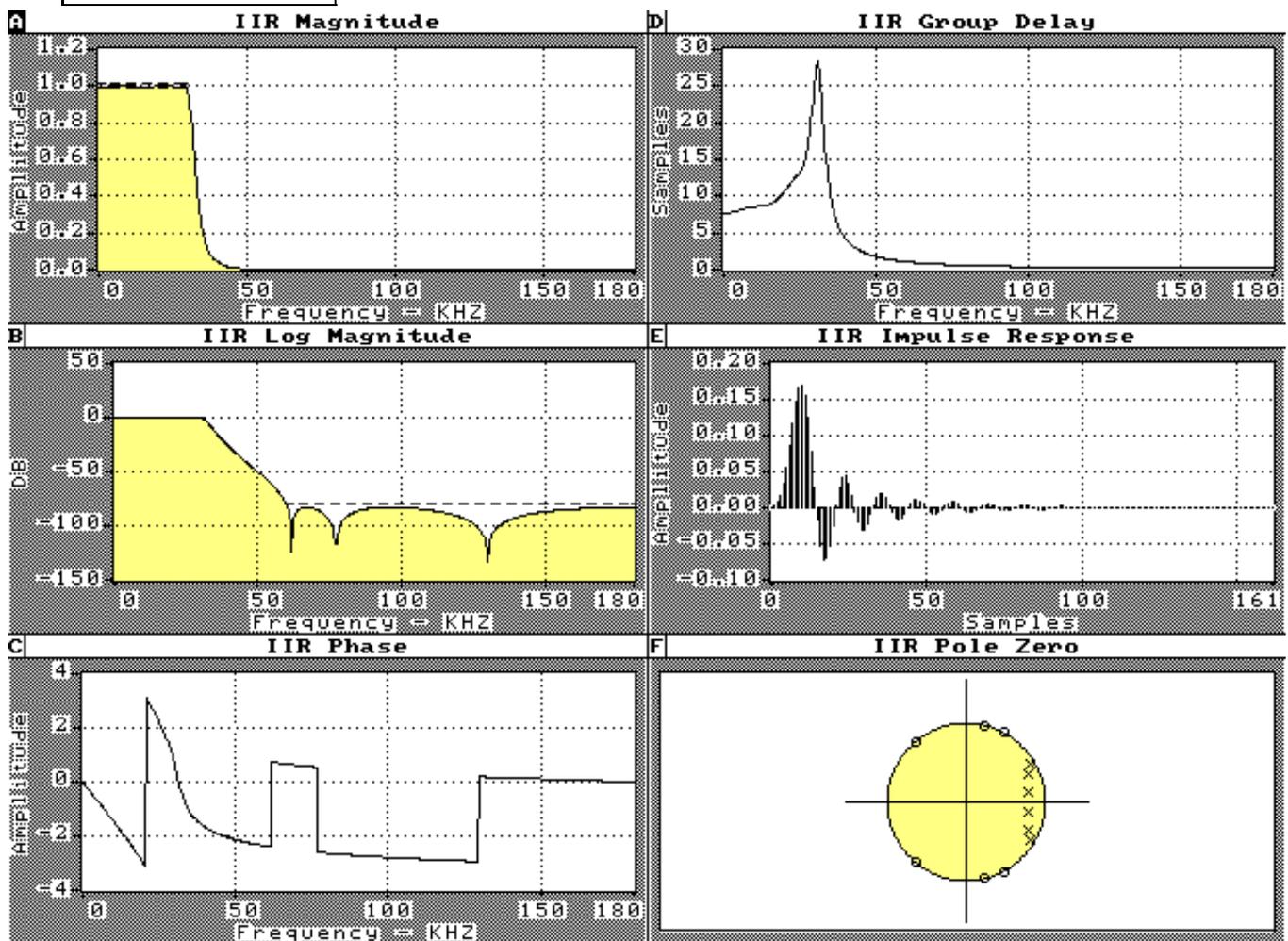
# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## ANALYSE FRÉQUENTIELLE (2)

La lecture de la position des pôles et zéros dans le plan  $\mathbb{C}$  permet

- d'avoir une idée sur la bande passante d'un filtre
- de réaliser la synthèse de filtres simples  
Ex : filtres réjecteurs de fréquence ou *notch filter*
- de retoucher ou d'ajouter une caractéristique supplémentaire à un filtre existant (ou obtenu par une méthode de synthèse)

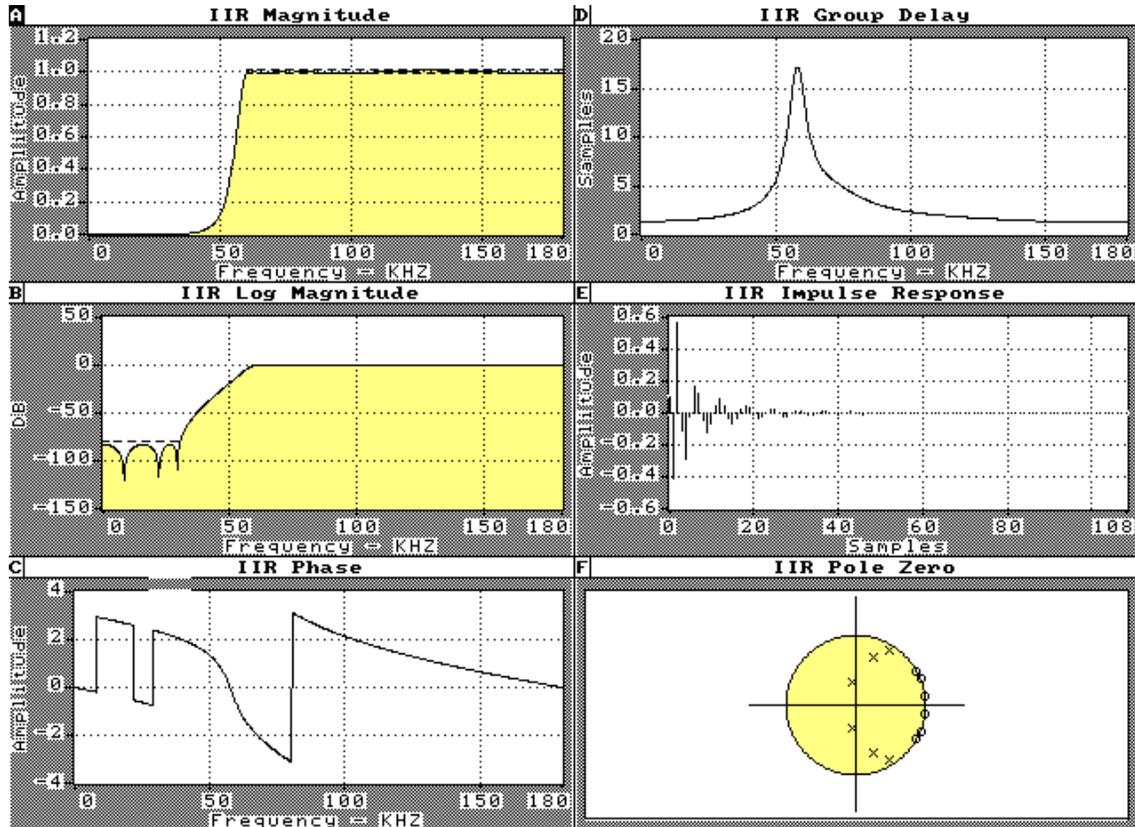
Un exemple



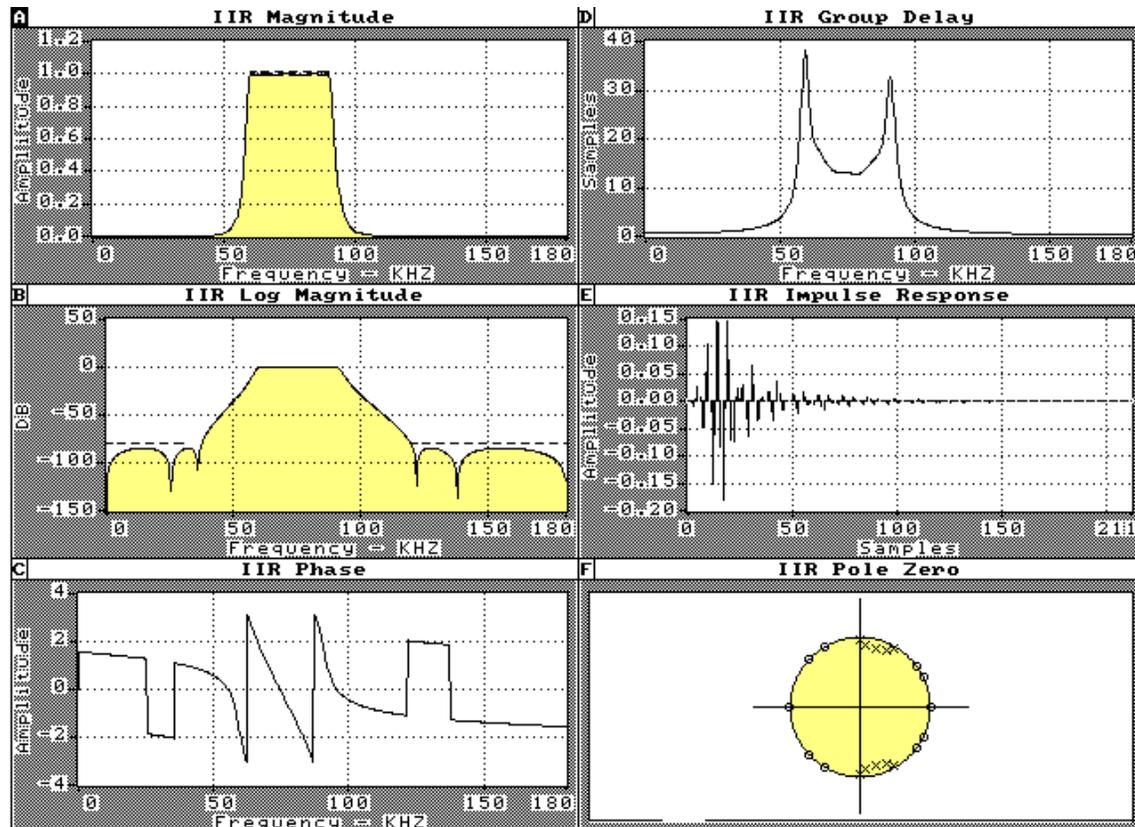
IIR, Passe bas, elliptique ordre 6, quantification 16 bits

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## ANALYSE FRÉQUENTIELLE (3)



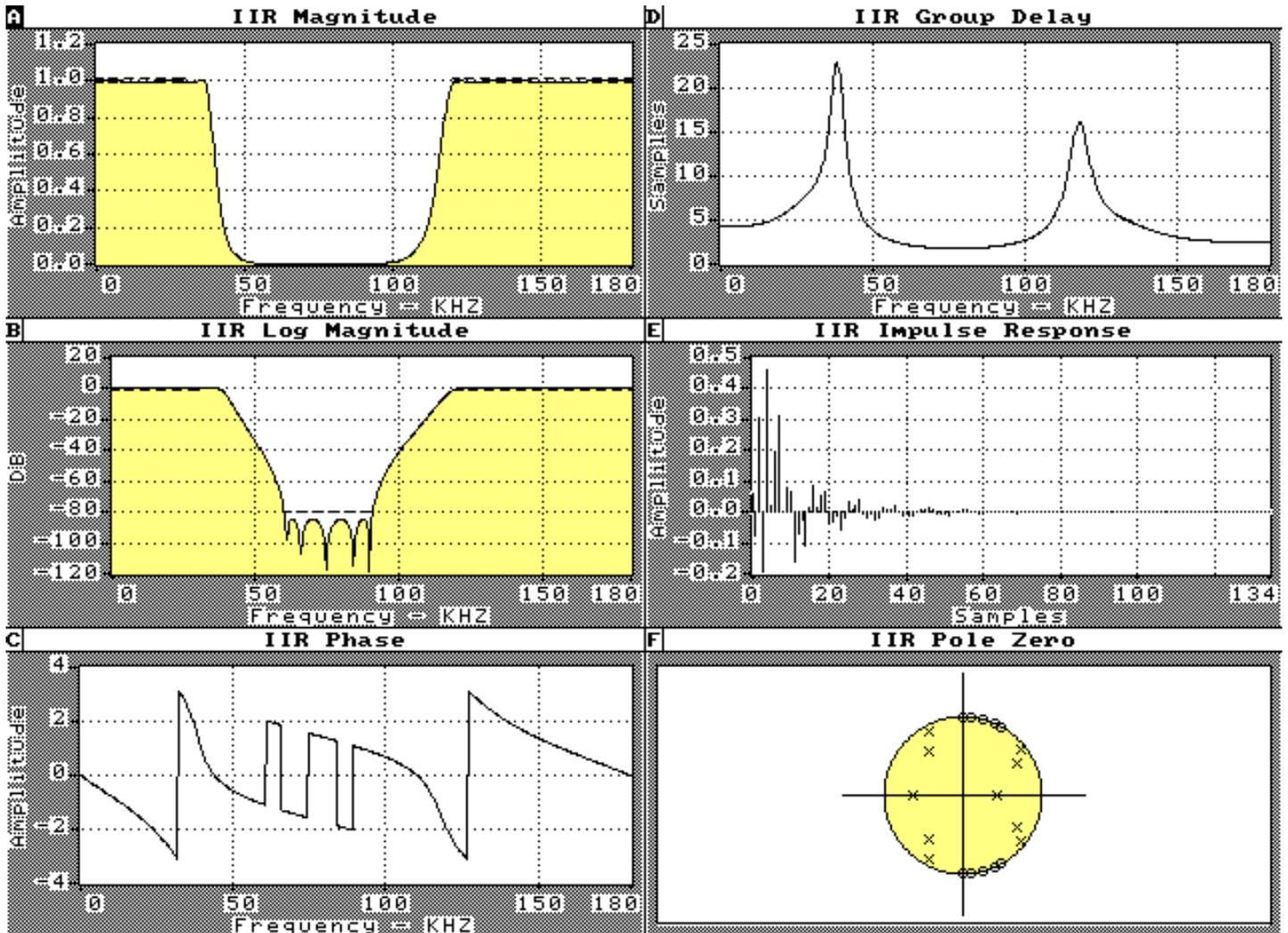
IIR, passe haut, elliptique ordre 6, quantification 16 bits



IIR, passe bande, elliptique ordre 10, quantification 16 bits

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## ANALYSE FRÉQUENTIELLE (4)



IIR, coupe bande, elliptique ordre 10, quantification 16 bits

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## ANALYSE FRÉQUENTIELLE (5)

### Méthode Calculatoire

Soit le moyennneur RIF (d'ordre 1) des 2 échant. préc.

$$y(n) = \frac{1}{2} \sum_{m=n-1}^n x(m) = \frac{1}{2} x(n) + \frac{1}{2} x(n-1)$$

↓  $\mathcal{Z}$

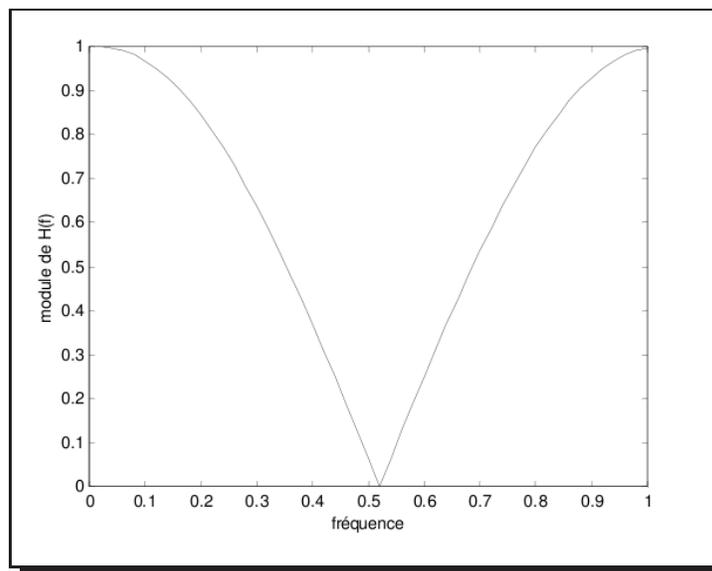
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} \{1 + z^{-1}\} = \frac{z+1}{2z}$$

**Passage de l'espace  $\mathcal{Z}$  à l'espace des fréquences**

$$H(z = e^{2\pi j\nu}) = H(\nu) = \frac{1}{2} (1 + e^{-2\pi j\nu}) = e^{-\pi j\nu} \cos(\pi\nu)$$

$$H_{(\nu=0)} = H(z)|_{z=1}$$

$$H_{(\nu=0.5)} = H(z)|_{z=-1}$$



**Méthode graphique :** Un zéro  $z = -1$  sur  $\mathcal{C}_{|z|=1}$

$$\Leftrightarrow |H(f = O\vec{Z}_i)| = 0 \text{ en } f = 0.5 = \|\vec{OZ}_i\|$$

**Nota :** Déphasage linéaire en fonction de  $\nu$  ( $\phi(\nu) = \pi\nu$ )

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## ANALYSE FRÉQUENTIELLE (6)

Attention aux pôle et zéro identiques !

**1** Un filtre moyennneur peut se réaliser sous forme **RIF** i.e., un filtre **non récuratif** d'ordre  $M - 1$

$$H(z) = \frac{1}{M} \left\{ 1 + z^{-1} + \dots + z^{-(M-1)} \right\}$$

$$\text{avec} \left\| \begin{array}{l} M - 1 \text{ zéros (sur } \mathcal{C}_{|z|=1}) \\ M - 1 \text{ pôles à l'origine} \end{array} \right.$$

**2** Un filtre moyennneur peut se réaliser sous forme **RII** i.e., un filtre **récuratif** (d'ordre 1)

$$H(z) = \frac{1}{M} \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}}$$

$$\text{avec} \left\| \begin{array}{l} ? \text{ zéros} \\ ? \text{ pôles à l'origine} \end{array} \right.$$

Ce serait une erreur de penser que  $H(z)$  possède  $M$  zéros et un pôle !, car un pôle, identique à un zéro, s'annule

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{M} \frac{z^M - 1}{z^M - z^{M-1}} = \frac{z^M - 1}{z^{M-1}(z - 1)} \\ &= \frac{(z - 1) \left( \text{poly. de deg. } [M-1] \text{ avec zéros sur } \mathcal{C}_{|z|=1} \right)}{z^{M-1} (z - 1)} \\ &= \frac{\text{poly. de deg. } [M-1] \text{ avec zéros sur } \mathcal{C}_{|z|=1}}{z^{M-1}} \end{aligned}$$

$$\text{avec} \left\| \begin{array}{l} M - 1 \text{ zéros sur } \mathcal{C}_{|z|=1} \\ M - 1 \text{ pôles à l'origine} \end{array} \right.$$

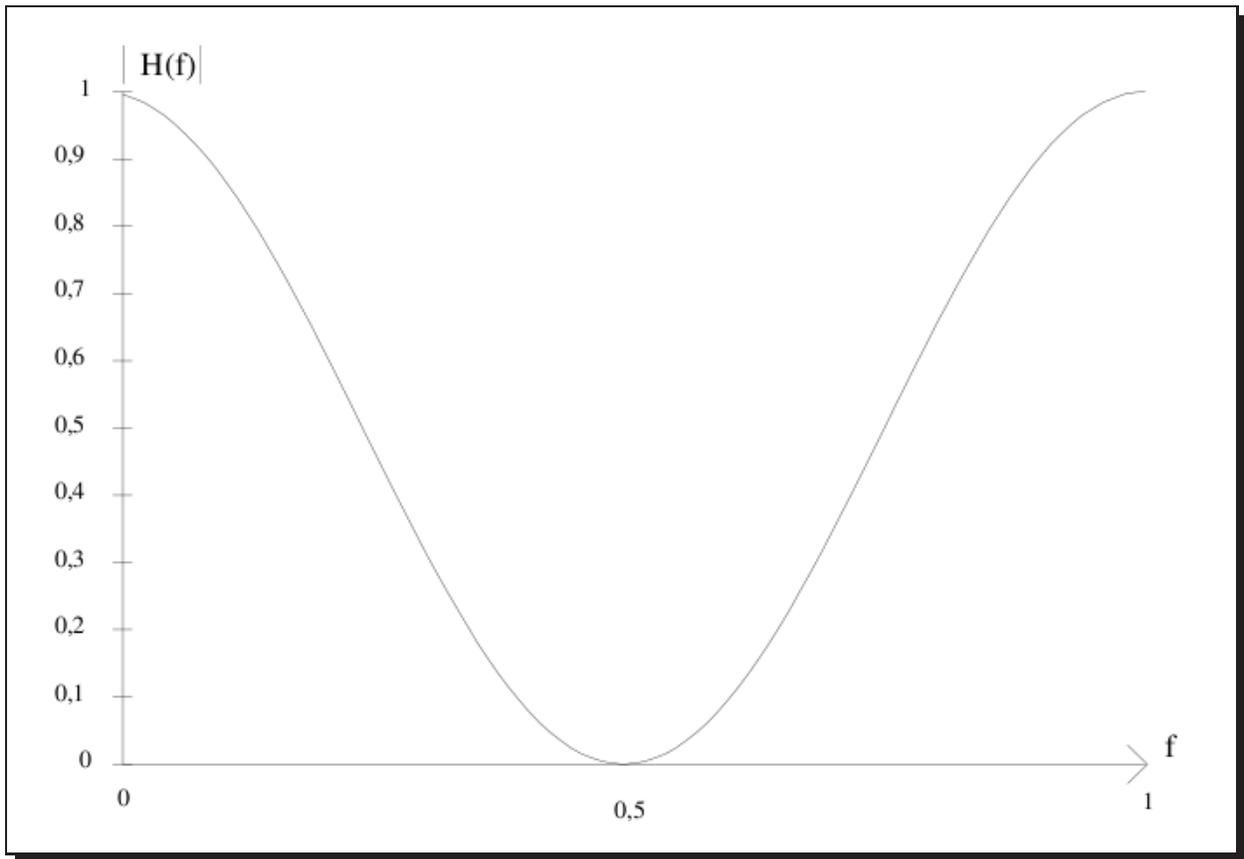
# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## ANALYSE FRÉQUENTIELLE (7)

Soit le RIF suivant

$$y(n) = \frac{1}{4}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2)$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \mathcal{Z} \\ \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 + 2z + 1}{4z^2} \end{array}$$



**Comportement fréquentiel**

$$H(\nu) = \frac{1}{2}e^{-2\pi j\nu} (1 + \cos(2\pi\nu))$$

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## FILTRES RIF ET FILTRE RII (1)

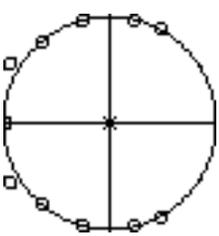
### FILTRE RIF

#### Fonction de Transfert

$H(z)$  est un polynôme de degré  $N$  en  $z^{-1}$

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}$$

#### Pôles et Zéros



- Les  $N$  pôles sont tous à l'origine du plan  $\mathbb{C}$   
Ils sont **neutres**

- Les  $N$  zéros peuvent être en tout lieu du plan  $\mathbb{C}$   
Ils ont une **action** sur la bande passante

#### Réponse Impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est finie (pôles en  $z = 0$ )

#### Qualités & Défauts

- **Stabilité assurée** (Pôles non actifs, en  $z = 0$ )

- **Peu sensibles aux bruits de quantification**  
& Incidence faible de la structure sur la propagation des erreurs de quantification

- Les filtres analogiques ne peuvent pas servir de modèle

- Une bonne précision nécessite bcp de coefs

  - Beaucoup d'opérations arithmétiques

  - Beaucoup de mémoire

  - Fort retard entrée-sortie

#### Exemple

RIF d'ordre 300, calcul sur 16 bits fixe

300 coefs ► 300 add. + 300 mult. & 300 mémorisations

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## FILTRES RIF ET FILTRE RII (2)

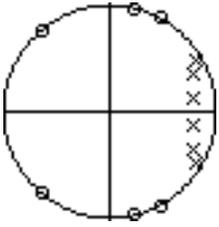
### FILTRE RII

#### Fonction de Transfert

$H(z)$  est une fraction en  $z^{-1}$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

#### Pôles et Zéros



- Les  $N$  pôles sont à l'intérieur du  $\mathcal{C}_{|z|=1}$   
Ils ont une **action** sur la bande passante
- Les  $M$  zéros peuvent être en tout lieu du plan  $\mathbb{C}$   
Ils ont une **action** sur la bande passante

#### Réponse Impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est infinie (pôles en  $z \neq 0$ )

#### Qualités & Défauts

- Les filtres analogiques peuvent servir de modèle
- Nécessite peu de coefs
- Peu d'ops arithmétiques
- Peu de mémoire
- Faible retard entrée-sortie
- S'assurer de la **stabilité** (pôles "actifs" en  $z \neq 0$ )
- Très sensibles aux bruits de quantification  
& aux structures propageant les erreurs numériques
- Requier un grand nb de bits

#### Exemple

RII d'ordre 11, calcul sur 32 bits fixe  
22 coefs ► 22 add. + 22 mult. & 22 mémorisations

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## EXEMPLE DE FILTRE (1)

### Système À Phase Minimale

Ces systèmes ont une  $H(z) = \frac{z^{-1}-g}{1-gz^{-1}}$ , sont appelés système passe-tout/déphaseurs/correcteur de phase, et

1.  $H(\nu)$  (transmittance) de module égal à 1
2. Phase variant de  $\pm\pi$
3. Il y en a une infinité mais un seul pour lequel la phase est minimal (pôle et zéro à l'intérieur de  $\mathcal{C}_{|z|=1}$  : son inverse est aussi stable)

Transmittance (Fonction de transfert en  $z = e^{2\pi j\nu}$ )

$$H(z = e^{2\pi j\nu}) = \frac{e^{-2\pi j\nu} - g}{1 - g e^{-2\pi j\nu}} = e^{-2\pi j\nu} \frac{1 - g e^{2\pi j\nu}}{1 - g e^{-2\pi j\nu}}$$
$$|H(\nu)| = 1 \quad \forall f$$

### Utilité

1. Ligne à retard  $\frac{\text{retard}}{360^\circ} \times$  Longueur d'onde
  - recul mécanique
  - mise en phase des haut-parleurs
  - ...
2. Déphasage variable selon la fréquence
3. simuler la réverbération (écho, table de réverbération, réverbération stéréo)
4. déconvolution
5. ...

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## EXEMPLE DE FILTRE (2)

### Rejecteur de Fréquence

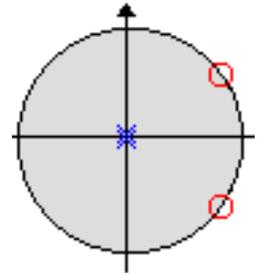
Soit le filtre FIR suivant défini par son équation aux différences

$$y(n] = x(n] - 2 \cos(\theta) x(n - 1) + x(n - 2)$$

$\downarrow \mathcal{Z}$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - 2z^{-1} \cos(\theta) + z^{-2}$$

$$H(z) = \frac{z^2 - 2z \cos \theta + 1}{z^2} = \frac{(z - e^{-j\theta})(z - e^{j\theta})}{z^2}$$



**Rejecteur de la fréquence  $\theta/2\pi$**

### Nota

- Comment modifier ce filtre pour avoir une rejection de fréquence plus étroite ?
- 

### Analyse d'un Filtre

Soit le filtre défini par sa fonction de transfert suivante

$$H(z) = \frac{1}{(z - e^{-j\theta})(z - e^{j\theta})}$$

—Caractériser ce filtre—

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## EXEMPLE D'ÉTUDE COMPLÈTE (1)

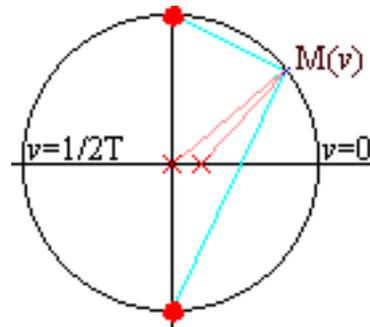
Soit un filtre numérique défini par  $H(z) = 0.6 \frac{z+z^{-1}}{z-0.2}$

### Étude Complète

#### 1 Poles/Zéros et Éq. aux Différences

$$H(z) = \underbrace{0.6 \frac{(z-j)(z+j)}{z(z-0.2)}}_{\text{Pour : pôles \& zéros}} = \underbrace{0.6 \frac{1+z^{-2}}{1-0.2z^{-1}}}_{\text{l'éq. aux différences}}$$

$$\Leftrightarrow y(n) = 0.2 y(n-1) + 0.6 (x(n) + x(n-2))$$



#### — Dédution —

- Filtre récursif à RII
- 2 pôles donc d'ordre 2
- $H(z=1) = 1.5$  donc gain statique = 1.5
- $H(z=-1) = 1$  donc gain à la fréq. de Shannon = 1
- Position des pôles  $\Leftrightarrow$ 
  - réponse impulsionnelle de type échelon amorti (du type  $0.2^n$ )
  - stable
  - Gain nul à la fréquence  $f = 0.25$

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## EXEMPLE D'ÉTUDE COMPLÈTE (2)

### 2 Réponse Impulsionnelle

⇔ Réponse du système pour  $x(n) = \delta(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = 1$

► En utilisant l'Eq. aux différences

$$y(n) = 0.2 y(n-1) + 0.6 (x(n) + x(n-2))$$

$$y(0) = 0.2 y(-1) + 0.6 (x(0) + x(-2)) = 0.6$$

$$y(1) = 0.2 y(0) + 0.6 (x(1) + x(-1)) = 0.120$$

$$y(2) = 0.2 y(1) + 0.6 (x(2) + x(0)) = 0.624$$

$$y(3) = 0.2 y(2) + 0.6 (x(3) + x(1)) = 0.1248$$

$$y(4) = \dots$$

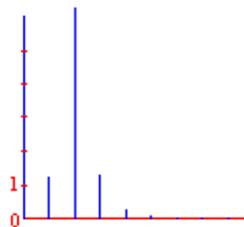
► En utilisant  $H(z)$

$$H(z) = 0.6 \frac{z^2 + 1}{z(z - 0.2)} = 0.6 + 0.6 \left\{ \frac{0.2z + 1}{z(z - 0.2)} \right\}$$

$$H(z) = 0.6 + 0.12 z^{-1} + 0.624 z^{-2} \frac{1}{1 - 0.2 z^{-1}}$$

↓  $\mathcal{Z}^{-1}$

$$h(n) = 0.6 \delta(n) + 0.12 \delta(n-1) + 0.624 \cdot \underbrace{0.2^{n-2} \mathcal{U}(n-2)}_{\text{mode}}$$



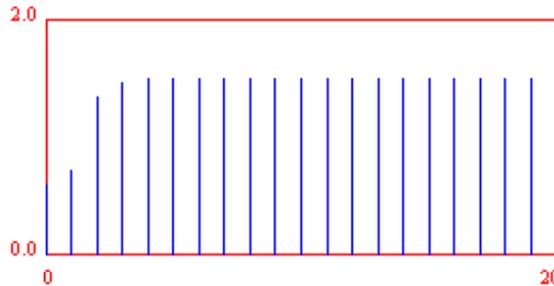
Réponse impulsionnelle  $h(n)$

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## EXEMPLE D'ÉTUDE COMPLÈTE (3)

### 3 Réponse Indicielle

⇔ Réponse du syst. pour  $x(n) = \mathcal{U}(n) \stackrel{z}{\Leftrightarrow} X(z) = \frac{z}{z-1}$

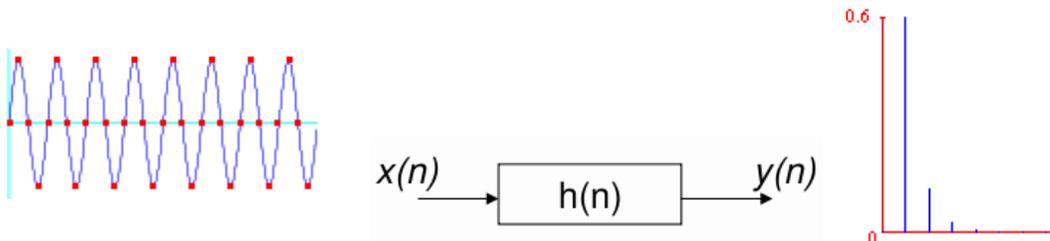


### 4 Réponse à une Rampe

⇔ Réponse pour  $x(n) = n\mathcal{U}(n) \stackrel{z}{\Leftrightarrow} X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$

### 5 Réponse à un signal sinusoïdal (bien choisi)

Réponse à un signal d'entrée sinusoïdal (amplitude 1 et 4 échant. par période) ⇔  $\{0, 1, 0, -1, \dots, 0, 1, 0, -1, \dots\}$



$$y(0) = 0.2 y(-1) + 0.6 (x(0) + x(-2)) = 0.0$$

$$y(1) = 0.2 y(0) + 0.6 (x(1) + x(-1)) = 0.6$$

$$y(2) = 0.2 y(1) + 0.6 (x(2) + x(0)) = 0.6 (0.2)$$

$$y(3) = 0.2 y(2) + 0.6 (x(3) + x(1)) = 0.6 (0.2)^2$$

$$y(4) = 0.2 y(3) + 0.6 (x(4) + x(2)) = 0.6 (0.2)^3$$

$$y(5) = \dots$$

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## EXEMPLE D'ÉTUDE COMPLÈTE (4)

On peut trouver le dernier résultat par calcul

$$x(n) = \{0, 1, 0, -1, \dots, \}$$

$\Downarrow \mathcal{Z}$

$$X(z) = (0z^{-0} + 1z^{-1} + 0z^{-2} - 1z^{-3}) + (0z^{-4} + 1z^{-5} + 0z^{-6} - 1z^{-7}) + \dots$$

$$X(z) = \underbrace{(z^{-1} - z^{-3})}_{\text{Motif}} \left( \underbrace{1 + z^{-4} + z^{-8} + \dots}_{\text{Périodisation}} \right)$$

$$\frac{z^{-1} - z^{-3}}{1 - z^{-4}} = \frac{z^{-1}(1 - z^{-2})}{(1 + z^{-2})(1 - z^{-2})} = \frac{z^{-1}}{1 + z^{-2}}$$

Donc,  $X(z)$  à l'entrée de  $H(z)$ , on obtient

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z^{-1}}{1 + z^{-2}} \left\{ 0.6 \frac{1 + z^{-2}}{1 - 0.2z^{-1}} \right\} = \frac{0.6z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1}}$$

$\Downarrow \mathcal{Z}^{-1}$

$$y(n) = 0.6 \cdot 0.2^{n-1} \mathcal{U}(n-1)$$

**Nota :**

- Le terme en  $\frac{1}{1+z^2}$  caractéristique du mode sinusoïdal d'entrée a disparu  $\Leftrightarrow$  Il a été rejeté par ce filtre réjecteur de cette fréquence

- Pour un signal sinusoïdal de fréquence différente il en aurait été tout autrement !

# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## EXEMPLE D'ÉTUDE COMPLÈTE (5)

### 6 Réponse fréquentielle

On calcul la transmittance  $H(\nu)$  à partie de  $H(z)$  en faisant le chgt de variable  $H[z = \exp(2j\pi\nu)]$

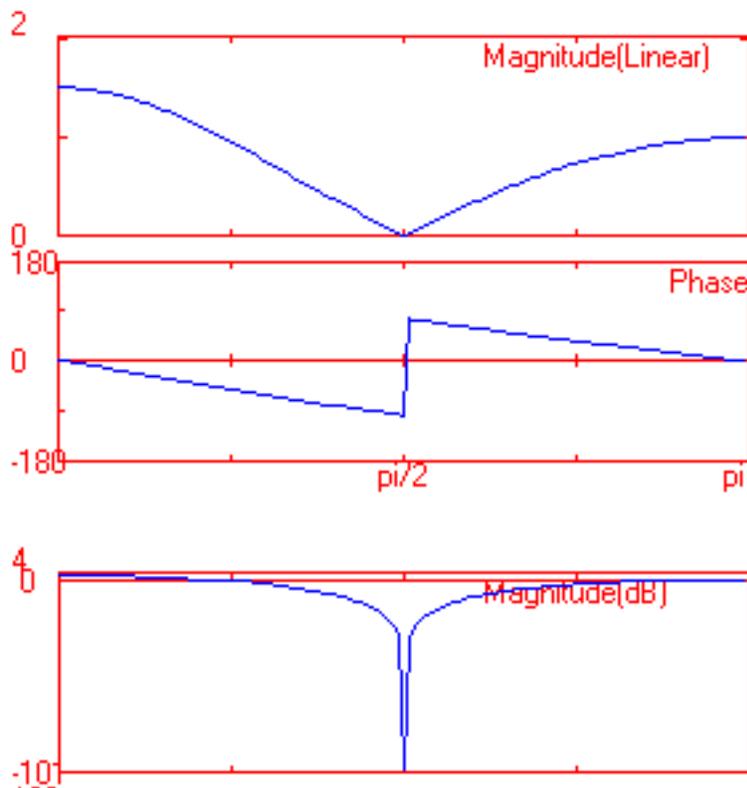
$$H(\nu) = 0.6 \frac{z + z^{-1}}{z - 0.2} \Big|_{z=e^{2j\pi\nu}} = 0.6 \frac{e^{2j\pi\nu} + e^{-2j\pi\nu}}{e^{2j\pi\nu} - 0.2}$$

$$= \frac{1.2 \cos(2\pi\nu)}{\cos(2\pi\nu) + j \sin(2\pi\nu) - 0.2}$$

Ce qui donne :

$$|H(\nu)| = \frac{1.2 |\cos(2\pi\nu)|}{\sqrt{1.04 - 0.4 \cos(2\pi\nu)}}$$

$$\Phi(\nu) = -\arctan\left(\frac{\sin(2\pi\nu)}{-0.2 + \cos(2\pi\nu)}\right)$$



# SYSTÈME LIT RATIONNEL

## EXEMPLE D'ÉTUDE COMPLÈTE (6)

### Un Autre Exemple

