DIRO
IFT 3205

TRAITEMENT DU SIGNAL

SYSTÈME LIT RATIONNEL

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

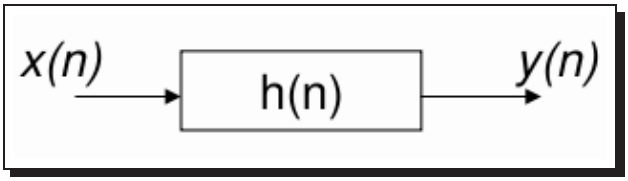
SYSTÈME LIT RATIONNEL

SOMMAIRE

Exemple de fonctions de transfert 3
Propriétés 8
Stabilité 11
Analyse fréquentielle 16
Filtres RIF et RII 23
Exemple de filtre 25
Exemple d'étude complète 27

SYSTÈME LIT RATIONNEL
EX. DE FONCTIONS TRANSFERT (1)

Prenons le cas d'un **système** ou un filtre définie par son **équation aux différences**



$$\sum_{m=0}^{N} a_m\, y(n-m) \;=\; \sum_{m=0}^{M} b_m\, x(n-m)$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m\, z^{-m}}{\sum_{m=0}^{N} a_m\, z^{-m}} = H(z)$$

La fonction de transfert $H(z)$ de ces systèmes est définie par une fraction **rationnelle**

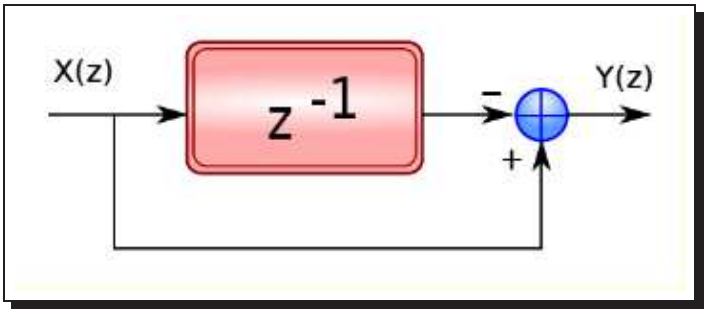
Système Délai

$$y(n) = x(n-1) \quad \overset{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} \quad Y(z) = z^{-1}X(z) \;\Leftrightarrow\; H(z) = z^{-1}$$

Système Dérivateur

$$y(n) = x(n) - x(n-1) \quad \overset{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} \quad Y(z) = X(z)\left(1 - z^{-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad H(z) = 1 - z^{-1}$$



SYSTÈME LIT RATIONNEL
EX. DE FONCTIONS TRANSFERT (2)

Système Moyenneur

Soit le filtre moyenneur des M échantillons précédents

$$y(n) = \frac{1}{M}\sum_{m=n-M+1}^{n} x(m) = \frac{1}{M}\Big\{x(n) + x(n-1) + \ldots + x(n-M+1)\Big\}$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{M}\Big\{1 + z^{-1} + \ldots z^{-M+1}\Big\}$$

——— Non-récursif ———

$$y(n) = \frac{1}{M}x(n) + \ldots + \frac{1}{M}x(n-M+2) + \frac{1}{M}x(n-M+1)$$

$$y(n-1) = \frac{1}{M}x(n-1) + \ldots + \frac{1}{M}x(n-M+1) + \frac{1}{M}x(n-M)$$

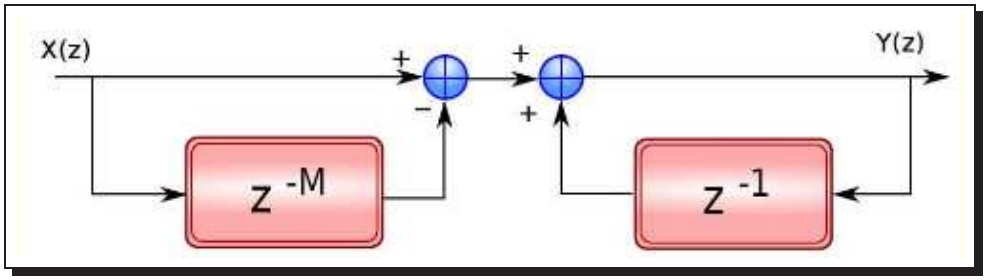
———- Récursif ———

$$y(n) = \frac{1}{M}x(n) + y(n-1) - \frac{1}{M}x(n-M)$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}$$

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + \frac{1}{M}X(z) - \frac{1}{M}z^{-M}X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1}{M}\cdot\frac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}}$$



- Recalculer $h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\big[H(z)\big]$

SYSTÈME LIT RATIONNEL
EX. DE FONCTIONS TRANSFERT (3)

Système Accumulateur

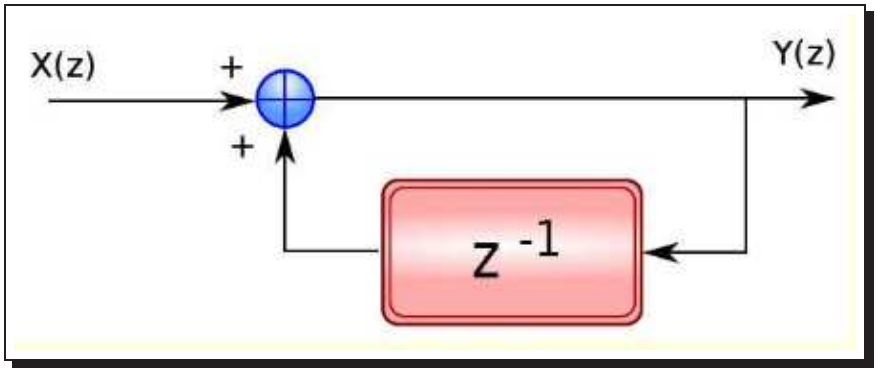
Soit le filtre ou système intégrateur suivant fait sur tous les échantillons passés

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + z^{-1} + \ldots + z^{-n} + z^{-\infty} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$\text{i.e. ;} \qquad Y(z) = X(z) + z^{-1}Y(z)$$



Réponse Impulsionnelle $h(n)$

- Par inversion : $H(z) \overset{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightleftharpoons} h(n) = \mathcal{U}(n)$
- Par réponse du système à une impulsion du dirac

$$H(z) = Y(z)\Big|_{\text{si } X(z)=1} \overset{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightleftharpoons} h(n) = y(n)\Big|_{\text{si } x(n)=\delta(n)}$$

SYSTÈME LIT RATIONNEL
EX. DE FONCTIONS TRANSFERT (4)

Système Défini Par une Equation Différentielle

On désire réaliser un filtre numérique qui se comporterait comme un syst. analogique du 1er ordre défini par

$$y + \tau \frac{\partial y}{\partial t} = x$$

On utilise l'approx. de la dérivée, $\frac{\partial y(t)}{\partial t} \approx y(n) - y(n-1)$

$$y + \tau \frac{\partial y}{\partial t} = x \overset{discret}{\rightleftharpoons} (1+\tau)\, y(n) - \tau\, y(n-1) = x(n)$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}$$

$$Y(z)\Big[(1+\tau) - \tau z^{-1}\Big] = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{(1+\tau) - \tau z^{-1}}$$

Réponse Impulsionnelle $h(n)$

- Par inversion : $H(z) \overset{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightleftharpoons} h(n) = \frac{1}{1+\tau}\left[\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^n \mathcal{U}(n)\right]$

  Si $\tau = 1 \Leftrightarrow h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \mathcal{U}(n)$

- Par réponse du système à $x(n) = \delta(n)$

  Si $\tau = 1 \Leftrightarrow y(n) = \frac{1}{2}\Big[y(n-1) + x(n)\Big]$

  $y(0) = \frac{1}{2}$

  $y(1) =$

  $y(2) =$

SYSTÈME LIT RATIONNEL
EX. DE FONCTIONS TRANSFERT (5)

Réponse Indicielle

> On appelle réponse indicielle d'un système, sa réponse à une suite échelon unité, i.e., pour $x(n) = \mathcal{U}(n)$

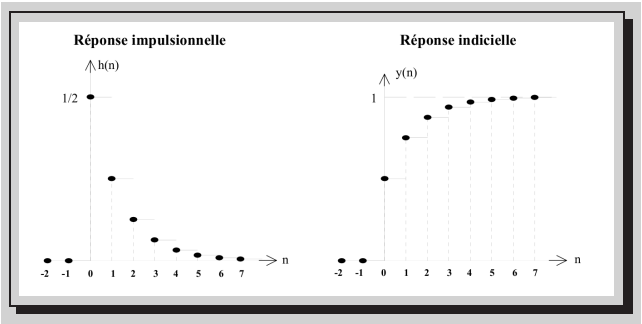
▶ Par inversion

$$\underbrace{Y(z)}_{\text{si } X(z)=\mathcal{Z}\left[\mathcal{U}(n)\right]} = H_u(z) = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{-1/2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{1}{(1-z^{-1})}$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$h_u(n) = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \mathcal{U}(n) + \mathcal{U}(n)$$

$$h_u(n) = \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\mathcal{U}(n)$$



▶ en utilisant l'équation récurrente et $x(n) = \mathcal{U}(n)$

$$\text{Si } \tau = 1 \Leftrightarrow y(n) = \tfrac{1}{2}\left[y(n-1) + \mathcal{U}(n)\right]$$

$$y(0) = \tfrac{1}{2}$$

$$y(1) = \tfrac{3}{4}$$

$$y(2) =$$

Réponse fréquentielle ou transmittance

On étudie ▶ $H\left[z = \exp(2j\pi\nu)\right]$

SYSTÈME LIT RATIONNEL
EX. DE FONCTIONS TRANSFERT (6)

Système ou Filtre RIF

Le filtre à **Réponse Impulsionnelle Finie** à une réponse uniquement basée sur les valeurs du signal d'entrée

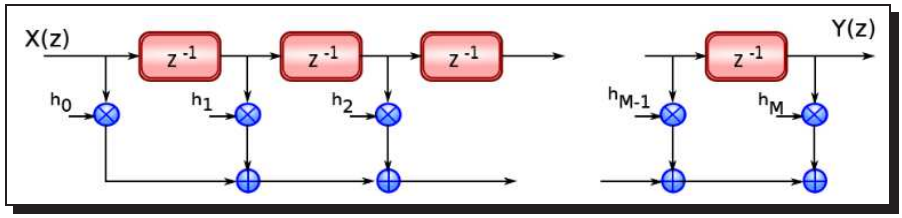
$\Leftrightarrow$

- $h(n)$ est de **durée finie**
- **non récursif**
- **à moyenne mobile**

Contrairement au filtre RII (Réponse Impuls. Infinie)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)\, h(m)$$

$$y(n) = h(0)\, x(n) + h(1)\, x(n-1) + \ldots + h(M)\, x(n-M)$$



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = h(0) + h(1)\, z^{-1} + h(2)\, z^{-2} + \ldots + h(M)\, z^{-M}$$

SYSTÈME LIT RATIONNEL
PROPRIÉTÉS (1)

Système Sans Mémoire : La sortie à l'instant n est une fonction de l'entrée uniquement à l'instant n

- **Exemple :** $y(n) = 2\,x(n)$ ou $y(n) = x^2(n) + 3x(n)$
- **Contre-Exemple :** $y(n) = x(n-1)$

Système Linéaire :

Modèle mathémat. régi par le principe de superposition :

$$y(n) = T\Big\{a\,x_1(n) + b\,x_2(n)\Big\} = a\,T\Big\{x_1(n)\Big\} + b\,T\Big\{x_2(n)\Big\}$$

Système Causal : La sortie à n'importe quel instant ne dépend que des valeurs de l'entrée aux instant présent et passés : syst. causal ▶ tps réel

- **Exemple :** $y(n) = x(n) - x(n-1)$
- **Contre-ex. :** $y(n) = x(n+1) - x(n)$ ou $y(n) = x(-n)$

Système Inversible : La sortie de la mise en série du système et du système inverse donnera la même entrée :

$$x(n) * h(n) * h_{\text{inv}}(n) = x(n)$$

Système Stable : Si n'importe quelle entrée bornée donne une sortie bornée

- **Contre-ex. :** Intégrateur ou accumulateur

Système Temporellement Invariant Dans Le Temps :

Un décalage temporel sur le signal d'entré entraîne le même décalage sur le signal de sortie

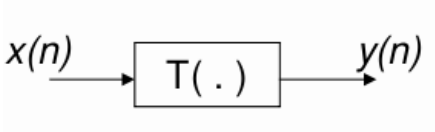
- **Contre-ex. :** $y(n) = n\,x(n)$

Un système LTI initialement au repos est un système convolutif

SYSTÈME LIT RATIONNEL
PROPRIÉTÉS (2)

Un système LTI (initialement au repos) est convolutif

$$y(n) = T\{x(n)\}$$



Par définition ou modèlisation :

1. $h(n)$ est la réponse de T pour $\delta(n)$: $\quad h(n) = T[\delta(n)]$
2. Un signal discret s'écrit : $\quad x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k)$

• En utilisant la linéarité de T :

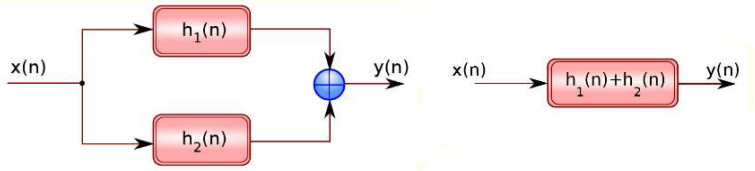
$$y(n) = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T\{\delta(n-k)\}$$

• En utilisant l'invariance dans le temps et 1. :

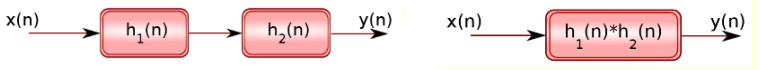
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad \Leftrightarrow \quad y(n) = x(n) * h(n)$$

Propriétés : connexion

Parallèle : $x(n) * \big[\, h_1(n) + h_2(n)\big] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$



Série : $x_n * h_1(n) * h_2(n) = x_n * (h_1(n) * h_2(n))$



SYSTÈME LIT RATIONNEL
PÔLES & ZÉROS D'UNE FONCTION DE TRANSFERT

La formulation de $H(z)$ sous la forme

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1\, z^{-1} + \ \ldots}{1 + a_1\, z^{-1} + a_2\, z^{-2} + \ \ldots}$$

offre l'avantage de passer à l'équation aux différences

Pour se donner une idée -*rapidemment*- de la
[**stabilité**] [**réponse temporelle**] [**réponse fréquencielle**]
de ce filtre, il faut faire apparaître ses pôles et ses zéros

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = K\, \frac{(z - z_1)(z - z_2)\ \ldots}{(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3)\ \ldots}$$

- L'ordre du filtre est le nombre de pôle qu'il possède

  - Les pôles régissent sa stabilité
    et sa réponse temporelle
  - Les pôles et les zéros régissent sa
    réponse fréquencielle

- Ils permettent de caractériser deux type de filtres numériques

  - Les filtres non récursifs ou RIF si
    si tous les pôles sont au centre du plan $\mathbb{C}$
  - Les filtres récursifs ou RII si
    les pôles ne sont pas au centre du plan $\mathbb{C}$

SYSTÈME LIT RATIONNEL
STABILITÉ (1)

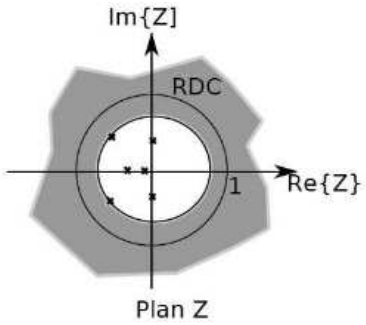
• La connaissance de $H(z)$ n'est pas suffisant pour déterminer de façon unique un système : on a besoin de son domaine de convergence (DOC)

• Pour un **système causal**, son DOC est à l'exterieur du pôle le plus exterieur

• Pour qu'un système LIT causal soit stable, il faut que :

ces pôles $\in$ du disque unité
$\Leftrightarrow$
cercle unité $(\mathcal{C}_{|z|=1}) \in$ DOC
$\Leftrightarrow$
TFD$[h(n)]$ existe

$$H(z) = \frac{b_0+...+b_q z^{-q}}{1+a_1 z^{-1}+...+a_n z^{-n}}$$



Nota

► Si les coefs de $H(z)$ sont réels :

• La réponse impulsionnelle est réelle

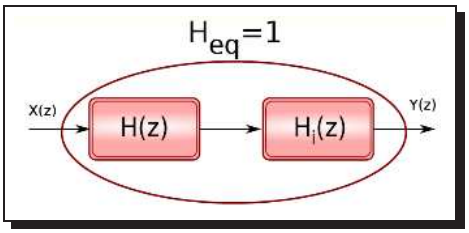
• Les numérateurs et dénominateurs de $H(z)$ sont des polynômes à coefs réels (i.e., ses pôles sont soient réels, soit vont par pair de complexes conjugués)

► Un filtre RIF qui a tous ses pôles à l'origine sera donc forcément toujours stable

SYSTÈME LIT RATIONNEL
STABILITÉ (2)

Exemple : Système Inverse

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)}$$
$$g(n) = h(n) * h_i(n) = \delta(n)$$



Exemple 1

$$H(z) = \frac{1 - 0.5\,z^{-1}}{1 - 0.9\,z^{-1}} \quad \text{DOC} : |z| > 0.9 \quad H_i(z) = \frac{1 - 0.9\,z^{-1}}{1 - 0.5\,z^{-1}}$$

• Le DOC de $H_i(z)$ causal est $|z| > 0.5$, pôle à l'intérieur du cercle unité donc stable

Exemple 2

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 0.5}{1 - 0.9\,z^{-1}} \quad \text{DOC} : |z| > 0.9 \quad H_i(z) = \frac{1 - 0.9\,z^{-1}}{z^{-1} - 0.5}$$

• Le DOC de $H_i(z)$ causal est $|z| > 2$, pôle à l'extérieur du cercle unité donc instable

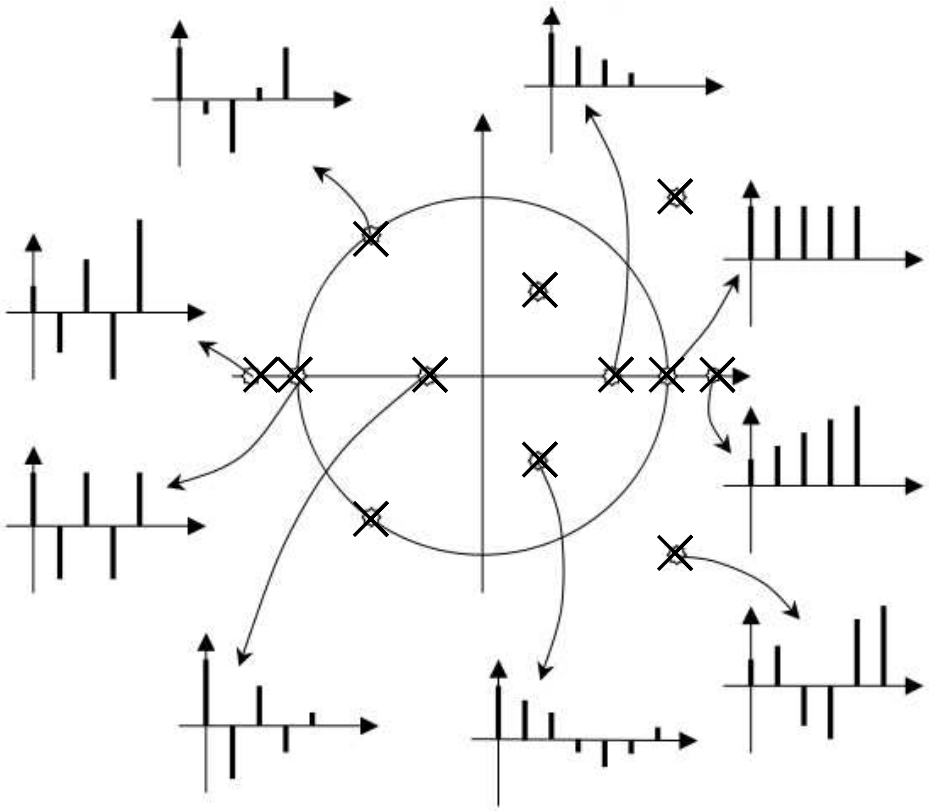
• $y(n) = -0.9\delta(n) - 1.1\ (2)^n \mathcal{U}(n)$

On peut définir un filtre inverse causal de $H(z)$ si ces pôles et zéros sont à l'intérieur du cercle unité

SYSTÈME LIT RATIONNEL
STABILITÉ (3)

Position des Pôles : Réponse Impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système dépend de la **position des pôles** de la fonction de transfert $H(z)$



PS : les croix ($\times$) désignent les **pôles**

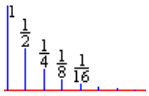
SYSTÈME LIT RATIONNEL
STABILITÉ (4)

La réponse impulsionnelle d'un système dépend **du degré des pôles** de la fonction de transfert $H(z)$

Pôle d'ordre 1

$$H(z) = K\,\frac{N(z)}{z-p} \quad \overset{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightleftharpoons} \quad h(n) = A\,p^n$$

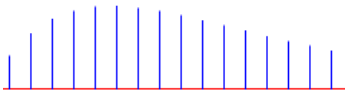
▶ Échelon amorti



Pôle d'ordre 2

$$H(z) = K\,\frac{N(z)}{(z-p)^2} \quad \overset{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightleftharpoons} \quad h(n) = (Bn + A)\,p^n$$

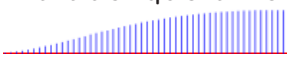
▶ Linéaire amorti



Pôle d'ordre 3

$$H(z) = K\,\frac{N(z)}{(z-p)^3} \quad \overset{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightleftharpoons} \quad h(n) = (Cn^2 + Bn + A)\,p^n$$

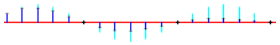
▶ Parabolique amorti



2 Pôles complexes conjugués

$$H(z) = K\,\frac{N(z)}{(z-p)(z-p^\star)} \quad \overset{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightleftharpoons} \quad h(n) = (A\,p^n)\sin(n\theta + \Phi)$$

▶ Sinusoidal amorti



SYSTÈME LIT RATIONNEL
STABILITÉ (5)

D'une manière générale, tout $H(z)$ se

Décompose en éléments simples et par TZ^{-1} donne :
$h(n) = \sum$réponses$\{$échelon, linéaire, ... amorti$\}$

Exemple

$$H(z) = K\,\frac{N(z)}{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)^2(z-p_4)^3(z-p_5)(z-p_5^\star)}$$

Somme des **modes** vus précedemment

En fonction de la position des pôles

1. **Stabilité asymptotique** : tous les pôles $\in \mathcal{C}_{|z|=1}$
2. **Stabilité marginale** : plusieurs pôles sur $\mathcal{C}_{|z|=1}$

   mais les autres pôles étant dans $\mathcal{C}_{|z|=1}$
   Exemple : Intégrateur (pôle en 1) & oscillateurs
3. **Instabilité**

SYSTÈME LIT RATIONNEL
ANALYSE FRÉQUENTIELLE (1)

Méthode Graphique

Utilise les pôles et zéros du système pour une analyse rapide des caractéristiques du système

$$H(e^{2\pi\nu j}) = A\,\frac{\prod_{m=1}^{M}(e^{2\pi\nu j} - z_m)}{\prod_{n=1}^{N}(e^{2\pi\nu j} - p_n)}$$

$$|H(e^{2\pi\nu j})| = A\,\frac{\prod_{i=1}^{M} Z_i M}{\prod_{j=1}^{N} P_j M} \qquad \phi(f) = \sum_i (\vec{Ox}, \vec{Z_i M}) - \sum_j (\vec{Ox}, \vec{P_j M})$$

Dans le plan $\mathbb{C}$:

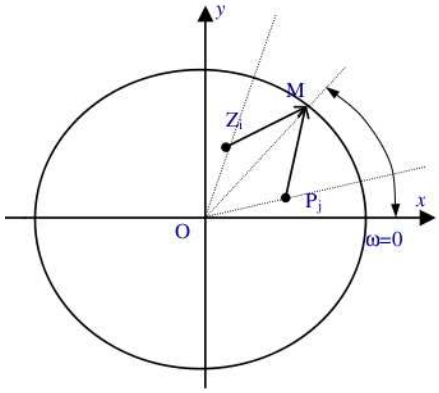
M sur le cercle unité $\mathcal{C}_{|z|=1}$

zéro $z_m \rightleftharpoons \vec{OZ_i}$

pôle $p_n \rightleftharpoons \vec{OP_j}$

$(z - z_m) \rightleftharpoons$ vecteur $\vec{Z_i M}$

$(z - p_n) \rightleftharpoons$ vecteur $\vec{P_j M}$



Pratiquement, pour un pts $M(f)$ circulant sur $\mathcal{C}_{|z|=1}$

1. Passer au voisinage d'un pôle $\Leftrightarrow$ croissance de $|H(f)|$ (résonance) et croissance rapide de $\phi(f)$
2. Passer au voisinage d'un zéro $\Leftrightarrow$ chute du gain de $|H(f)|$ et décroissance rapide de $\phi(f)$
3. Passer sur un zéro $\Leftrightarrow$ rejet de la fréquence f (correspondante à ce zéro), i.e., $|H(f)| = 0$ et discontinuité de phase de 180^0

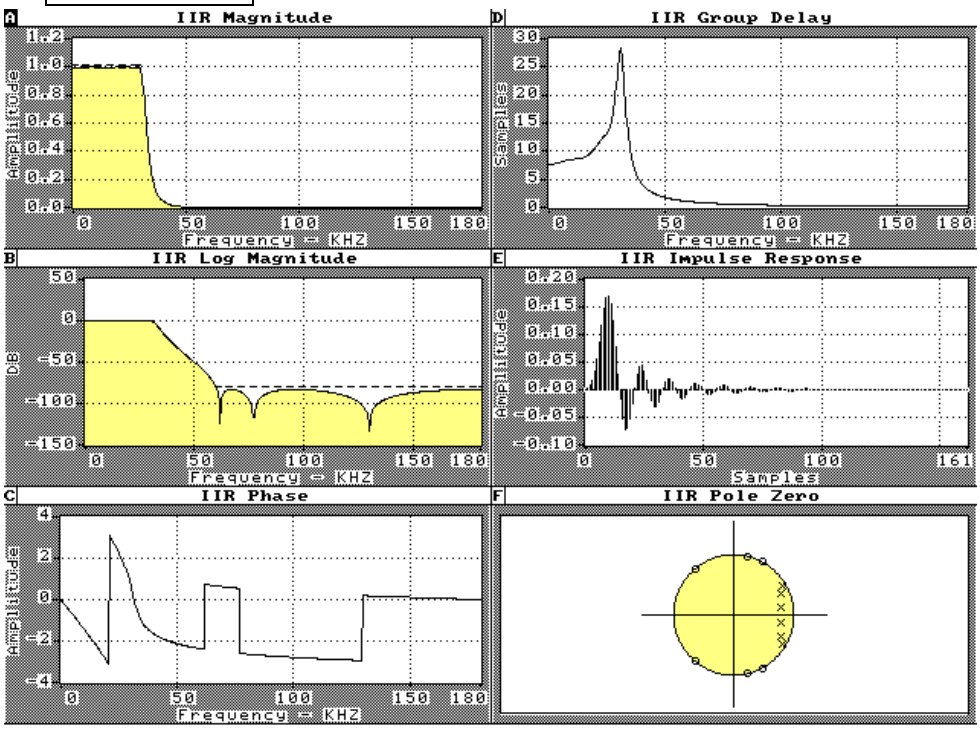
Idée du comportement du syst. (passe-bas/haut/bande) et des atténuations ou résonnance introduites dans le système

SYSTÈME LIT RATIONNEL
ANALYSE FRÉQUENTIELLE (2)

La lecture de la position des pôles et zéros dans le plan $\mathbb{C}$ permet

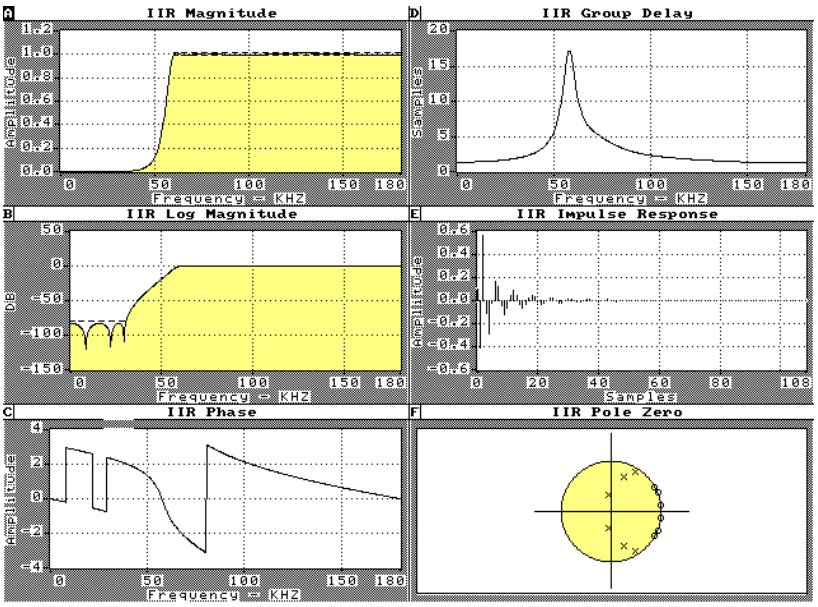
- d'avoir une idée sur la bande passante d'un filtre
- de réaliser la synthèse de filtres simples
Ex : filtres réjecteurs de fréquence ou *notch filter*
- de retoucher ou d'ajouter une caractéristique supplémentaire à un filtre existant (ou obtenu par une méthode de synthèse)

Un exemple

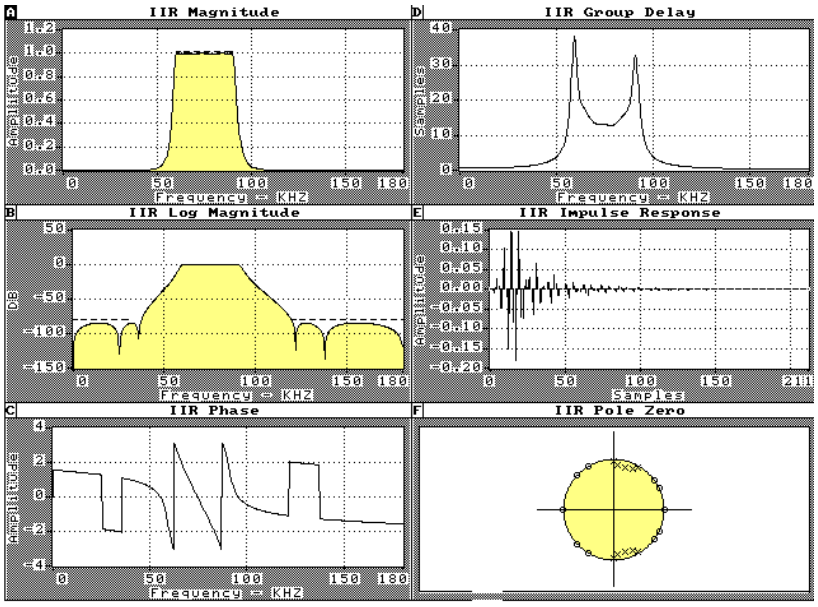


IIR, Passe bas, elliptique ordre 6, quantification 16 bits

SYSTÈME LIT RATIONNEL
ANALYSE FRÉQUENTIELLE (3)

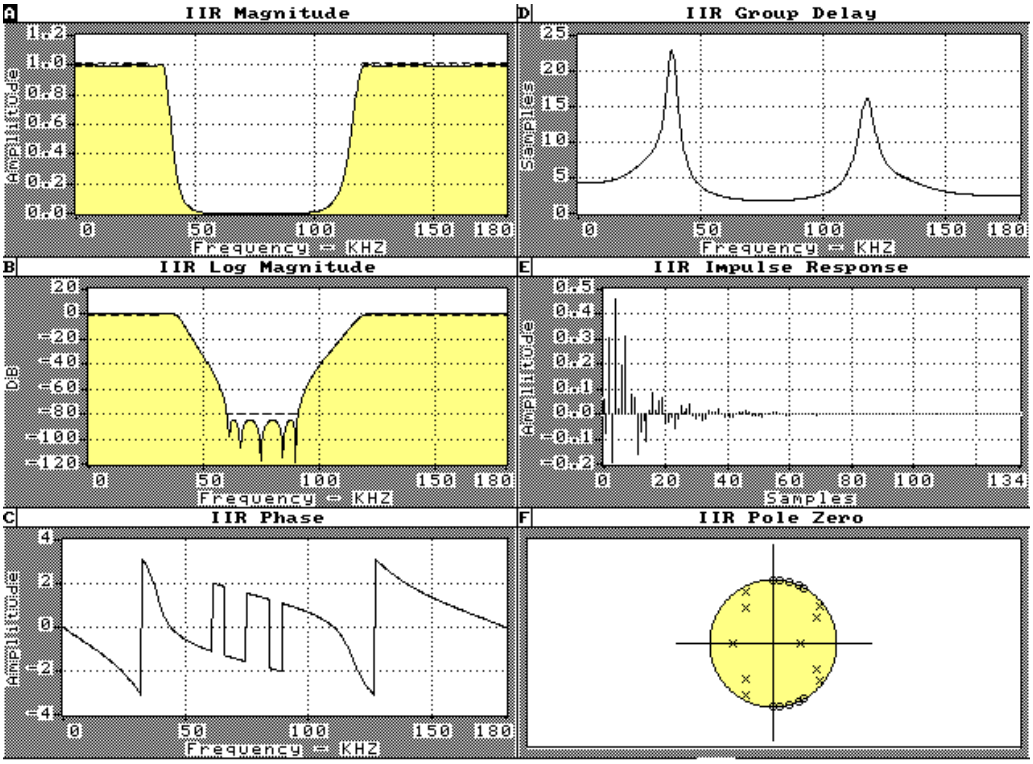


IIR, passe haut, elliptique ordre 6, quantification 16 bits



IIR, passe bande, elliptique ordre 10, quantification 16 bits

SYSTÈME LIT RATIONNEL
ANALYSE FRÉQUENTIELLE (4)



IIR, coupe bande, elliptique ordre 10, quantification 16 bits

SYSTÈME LIT RATIONNEL
ANALYSE FRÉQUENTIELLE (5)

Méthode Calculatoire

Soit le moyenneur RIF (d'ordre 1) des 2 échant. préc.

$$y(n) = \frac{1}{2}\sum_{m=n-1}^{n} x(m) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

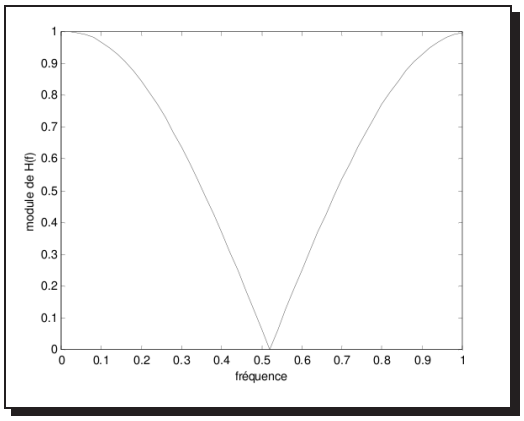
$$\Downarrow \mathcal{Z}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2}\left\{1 + z^{-1}\right\} = \frac{z+1}{2\,z}$$

Passage de l'espace Z à l'espace des fréquences

$$H(z = e^{2\pi j\nu}) = H(\nu) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\pi j\nu}\right) = e^{-\pi j\nu}\,\cos(\pi\nu)$$

$$H_{(\nu=0)} = H_{(z)}\big|_{z=1}$$
$$H_{(\nu=0.5)} = H_{(z)}\big|_{z=-1}$$



Méthode graphique : Un zéro $z = -1$ sur $\mathcal{C}_{|z|=1}$
$\Leftrightarrow |H(f = \vec{OZ_i})| = 0$ en $f = 0.5 = \|OZ_i\|$

Nota : Déphasage linéaire en fonction de ν $(\phi(\nu) = \pi\nu)$

SYSTÈME LIT RATIONNEL
ANALYSE FRÉQUENTIELLE (6)

Attention aux pôle et zéro identiques !

1 Un filtre moyenneur peut se réaliser sous forme **RIF** i.e., un filtre **non récursif** d'ordre $M-1$

$$H(z) = \frac{1}{M}\left\{1 + z^{-1} + \ldots + z^{-(M-1)}\right\}$$

avec $\left\| \begin{array}{l} M-1 \text{ zéros (sur } \mathcal{C}_{|z|=1}) \\ M-1 \text{ pôles à l'origine} \end{array} \right.$

2 Un filtre moyenneur peut se réaliser sous forme **RII** i.e., un filtre **récursif** (d'ordre 1)

$$H(z) = \frac{1}{M}\,\frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}}$$

avec $\left\| \begin{array}{ll} ? & \text{zéros} \\ ? & \text{pôles à l'origine} \end{array} \right.$

Ce serait une erreur de penser que $H(z)$ possède M zéros et un pôle !, car un pôle, identique à un zéro, s'annule

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{M}\,\frac{z^M - 1}{z^M - z^{M-1}} = \frac{z^M - 1}{z^{M-1}(z-1)} \\ &= \frac{(z-1)\left(\text{poly. de deg.}_{[M-1]} \text{avec zéros sur } \mathcal{C}_{|z|=1}\right)}{z^{M-1}\,(z-1)} \\ &= \frac{\text{poly. de deg.}_{[M-1]} \text{avec zéros sur } \mathcal{C}_{|z|=1}}{z^{M-1}} \end{aligned}$$

avec $\left\| \begin{array}{l} M-1 \text{ zéros sur } \mathcal{C}_{|z|=1} \\ M-1 \text{ pôles à l'origine} \end{array} \right.$

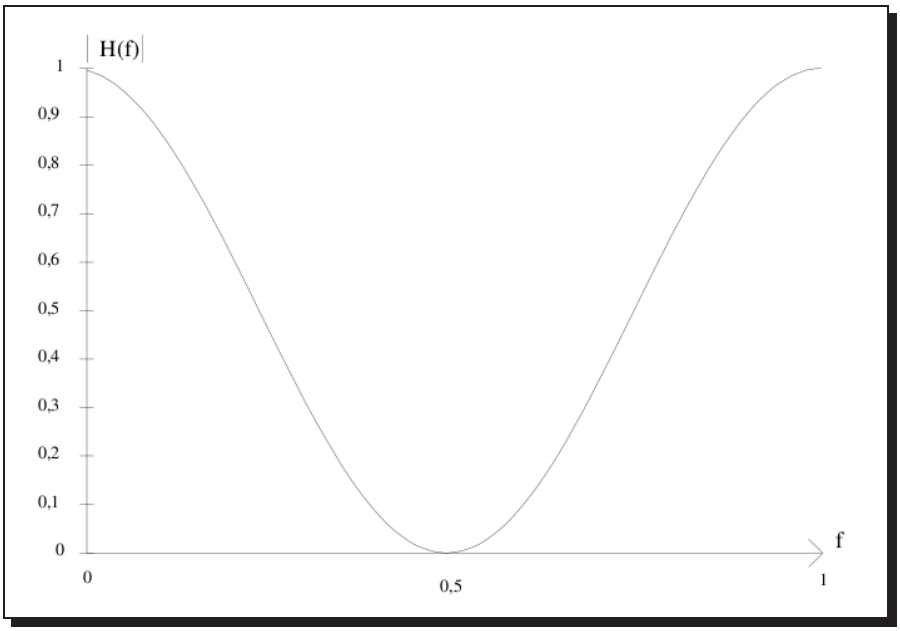
SYSTÈME LIT RATIONNEL
ANALYSE FRÉQUENTIELLE (7)

Soit le RIF suivant

$$y(n) = \frac{1}{4}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2)$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 + 2z + 1}{4\,z^2}$$



Comportement fréquentiel

$$H(\nu) = \frac{1}{2}e^{-2\pi j\nu}\Big(1 + \cos(2\pi\nu)\Big)$$

SYSTÈME LIT RATIONNEL
FILTRES RIF ET FILTRE RII (1)

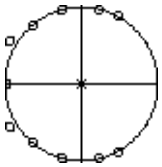
——— FILTRE RIF ———

Fonction de Transfert

$H(z)$ est un polynôme de degré N en z^{-1}

$$H(z) = b_0 + b_1\, z^{-1} + b_2\, z^{-2} + \ldots + b_N\, z^{-N}$$

Pôles et Zéros



- Les N pôles sont tous à l'origine du plan $\mathbb{C}$
  Ils sont **neutres**
- Les N zéros peuvent être en tout lieu du plan $\mathbb{C}$
  Ils ont une **action** sur la bande passante

Réponse Impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est finie (pôles en $z = 0$)

Qualités & Défauts

- **Stabilité assurée** (Pôles non actifs, en $z = 0$)
- **Peu sensibles aux bruits de quantification**
  & Incidence faible de la structure sur la propagation des erreurs de quantification

- Les filtres analogiques ne peuvent pas servir de modèle
- Une bonne précision nécessite bcp de coefs
  - Beaucoup d'opérations arithmétiques
  - Beaucoup de mémoire
  - Fort retard entrée-sortie

Exemple

RIF d'ordre 300, calcul sur 16 bits fixe
300 coefs ▶ 300 add. + 300 mult. & 300 mémorisations

SYSTÈME LIT RATIONNEL
FILTRES RIF ET FILTRE RII (2)

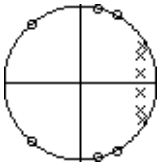
——— FILTRE RII ———

Fonction de Transfert

$H(z)$ est une fraction en z^{-1}

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1\, z^{-1} + \ldots + b_M\, z^{-M}}{1 + a_1\, z^{-1} + \ldots + a_N\, z^{-N}}$$

Pôles et Zéros



- Les N pôles sont à l'intérieur du $\mathcal{C}_{|z|=1}$
  Ils ont une **action** sur la bande passante
- Les M zéros peuvent être en tout lieu du plan $\mathbb{C}$
  Ils ont une **action** sur la bande passante

Réponse Impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est infinie (pôles en $z \neq 0$)

Qualités & Défauts

- Les filtres analogiques peuvent servir de modèle
- Nécessite peu de coefs
  - Peu d'ops arithmétiques
  - Peu de mémoire
  - Faible retard entrée-sortie

- S'assurer de la **stabilité** (pôles "actifs" en $z \neq 0$)
- Très sensibles aux bruits de quantification
  & aux structures propageant les erreurs numériques
- Requiert un grand nb de bits

Exemple

RII d'ordre 11, calcul sur 32 bits fixe
22 coefs ▶ 22 add. + 22 mult. & 22 mémorisations

SYSTÈME LIT RATIONNEL
EXEMPLE DE FILTRE (1)

Système À Phase Minimale

Ces systèmes ont une $H(z) = \frac{z^{-1}-g}{1-g\,z^{-1}}$, sont appelés système passe-tout/déphaseurs/correcteur de phase, et

1. $H(\nu)$ (transmittance) de module égal à 1
2. Phase variant de $\pm\pi$
3. Il y en a une infinité mais un seul pour lequel la phase est minimal (pôle et zéro à l'intérieur de $\mathcal{C}_{|z|=1}$: son inverse est aussi stable)

Transmittance (Fonction de transfert en $z = e^{2\pi j\nu}$)

$$H(z = e^{2\pi j\nu}) = \frac{e^{-2\pi j\nu} - g}{1 - g\,e^{-2\pi j\nu}} = e^{-2\pi j\nu}\,\frac{1 - g\,e^{2\pi j\nu}}{1 - g\,e^{-2\pi j\nu}}$$

$$|H(\nu)| = 1 \quad \forall f$$

Utilité

1. Ligne à retard $\frac{\text{retard}}{360^0}\times$ Longueur d'onde
   - recul mécanique
   - mise en phase des haut-parleurs
   - ...
2. Déphasage variable selon la fréquence
3. simuler la réverbération (écho, table de réverbération, réverbération stéréo)
4. déconvolution
5. ...

SYSTÈME LIT RATIONNEL
EXEMPLE DE FILTRE (2)

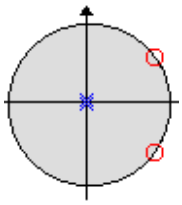
Rejecteur de Fréquence

Soit le filtre FIR suivant défini par son équation aux différences

$$y(n) = x(n) - 2\cos(\theta)\, x(n-1) + x(n-2)$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - 2\,z^{-1}\cos(\theta) + z^{-2}$$



$$H(z) = \frac{z^2 - 2z\cos\theta + 1}{z^2} = \frac{(z - e^{-j\,\theta})(z - e^{j\,\theta})}{z^2}$$

Rejecteur de la fréquence $\theta/2\pi$

Nota

• Comment modifier ce filtre pour avoir une rejection de fréquence plus étroite ?

Analyse d'un Filtre

Soit le filtre défini par sa fonction de transfert suivante

$$H(z) = \frac{1}{(z - e^{-j\,\theta})(z - e^{j\,\theta})}$$

–Caractériser ce filtre–

SYSTÈME LIT RATIONNEL
EXEMPLE D'ÉTUDE COMPLÈTE (1)

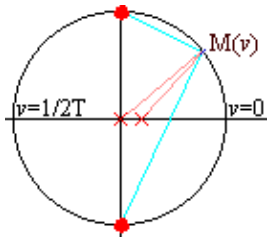
Soit un filtre numérique défini par $H(z) = 0.6\,\frac{z+z^{-1}}{z-0.2}$

Étude Complète

1 Poles/Zéros et Éq. aux Différences

$$H(z) = \underbrace{0.6\,\frac{(z-j)(z+j)}{z\,(z-0.2)}}_{\text{Pour : pôles \& zéros}} = \underbrace{0.6\,\frac{1+z^{-2}}{1-0.2\,z^{-1}}}_{\text{l'éq. aux différences}}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(n) = 0.2\,y(n-1) + 0.6\,\Big(x(n) + x(n-2)\Big)$$



—— Déduction ——

- Filtre récursif à RII
- 2 pôles donc d'ordre 2
- $H(z=1) = 1.5$ donc gain statique $= 1.5$
- $H(z=-1) = 1$ donc gain à la fréq. de Shannon $= 1$
- Position des pôles $\Leftrightarrow$
  - réponse impulsionnelle de type échelon amorti (du type 0.2^n)
  - stable
  - Gain nul à la fréquence $f = 0.25$

SYSTÈME LIT RATIONNEL
EXEMPLE D'ÉTUDE COMPLÈTE (2)

2 Réponse Impulsionnelle

$\Leftrightarrow$ Réponse du système pour $x(n) = \delta(n) \overset{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} X(z) = 1$

▶ En utilisant l'Eq. aux différences

$$y(n) = 0.2\,y(n-1) + 0.6\left(x(n) + x(n-2)\right)$$

$$\begin{aligned}
y(0) &= 0.2\,y(-1) + 0.6\left(x(0) + x(-2)\right) = 0.6 \\
y(1) &= 0.2\,y(0) + 0.6\left(x(1) + x(-1)\right) = 0.120 \\
y(2) &= 0.2\,y(1) + 0.6\left(x(2) + x(0)\right) = 0.624 \\
y(3) &= 0.2\,y(2) + 0.6\left(x(3) + x(1)\right) = 0.1248 \\
y(4) &= \ldots
\end{aligned}$$

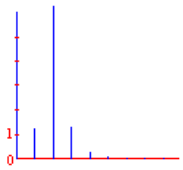
▶ En utilisant $H(z)$

$$H(z) = 0.6\,\frac{z^2+1}{z(z-0.2)} = 0.6 + 0.6\left\{\frac{0.2\,z+1}{z(z-0.2)}\right\}$$

$$H(z) = 0.6 + 0.12\,z^{-1} + 0.624\,z^{-2}\,\frac{1}{1-0.2\,z^{-1}}$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$h(n) = 0.6\,\delta(n) + 0.12\delta(n-1) + 0.624 \cdot \underbrace{0.2^{n-2}\mathcal{U}(n-2)}_{\text{mode}}$$

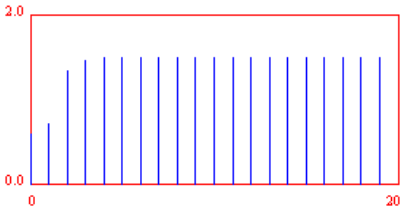


Réponse impulsionnelle $h(n)$

SYSTÈME LIT RATIONNEL
EXEMPLE D'ÉTUDE COMPLÈTE (3)

3 Réponse Indicielle

$\Leftrightarrow$ Réponse du syst. pour $x(n) = \mathcal{U}(n) \overset{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} X(z) = \frac{z}{z-1}$

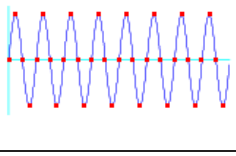


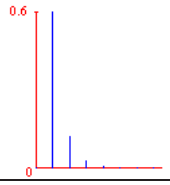
4 Réponse à une Rampe

$\Leftrightarrow$ Réponse pour $x(n) = n\mathcal{U}(n) \overset{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$

5 Réponse à un signal sinusoìdal (bien choisi)

Réponse à un signal d'entré sinusoidal (amplitude 1 et 4 échant. par période) $\Leftrightarrow \{0, 1, 0, -1, \ldots, 0, 1, 0, -1, \ldots\}$





$$
\begin{aligned}
y(0) &= 0.2\,y(-1) + 0.6\left(x(0) + x(-2)\right) = 0.0 \\
y(1) &= 0.2\,y(0) + 0.6\left(x(1) + x(-1)\right) = 0.6 \\
y(2) &= 0.2\,y(1) + 0.6\left(x(2) + x(0)\right) = 0.6\,(0.2) \\
y(3) &= 0.2\,y(2) + 0.6\left(x(3) + x(1)\right) = 0.6\,(0.2)^2 \\
y(4) &= 0.2\,y(3) + 0.6\left(x(4) + x(2)\right) = 0.6\,(0.2)^3 \\
y(5) &= \ldots
\end{aligned}
$$

SYSTÈME LIT RATIONNEL
EXEMPLE D'ÉTUDE COMPLÈTE (4)

On peut trouver le dernier résultat par calcul

$$\begin{array}{rcl} x(n) & = & \{0,1,0,-1,\ldots,\} \\ & \Downarrow \mathcal{Z} & \\ X(z) & = & (0\,z^{-0}+1\,z^{-1}+0\,z^{-2}-1\,z^{-3})\ + \\ & & \quad (0\,z^{-4}+1\,z^{-5}+0\,z^{-6}-1\,z^{-7})\ + \\ & & \quad\quad \ldots \end{array}$$

$$X(z) = \underbrace{(z^{-1}-z^{-3})}_{\text{Motif}}\Big(\underbrace{1+z^{-4}+z^{-8}+\ldots}_{\text{Périodisation}}\Big)$$

$$\frac{z^{-1}-z^{-3}}{1-z^{-4}} = \frac{z^{-1}(1-z^{-2})}{(1+z^{-2})(1-z^{-2})} = \frac{z^{-1}}{1+z^{-2}}$$

Donc, $X(z)$ à l'entré de $H(z)$, on obtient

$$Y(z) = X(z)\,H(z) = \frac{z^{-1}}{1+z^{-2}}\left\{0.6\,\frac{1+z^{-2}}{1-0.2\,z^{-1}}\right\} = \frac{0.6\,z^{-1}}{1-0.2\,z^{-1}}$$

$$\begin{array}{rcl} & \Downarrow \mathcal{Z}^{-1} & \\ y(n) & = & 0.6\cdot 0.2^{n-1}\mathcal{U}(n-1) \end{array}$$

Nota :

• Le terme en $\frac{1}{1+z^2}$ caractéristique du mode sinusoïdal d'entrée a disparu $\Leftrightarrow$ Il a été rejeté par ce filtre réjecteur de cette fréquence

• Pour un signal sinusoïdal de fréquence différente il en aurait été tout autrement !

SYSTÈME LIT RATIONNEL
EXEMPLE D'ÉTUDE COMPLÈTE (5)

6 Réponse fréquentielle

On calcul la transmittance $H(\nu)$ à partie de $H(z)$ en faisant le chgt de variable $H\left[z = \exp(2j\pi\nu)\right]$

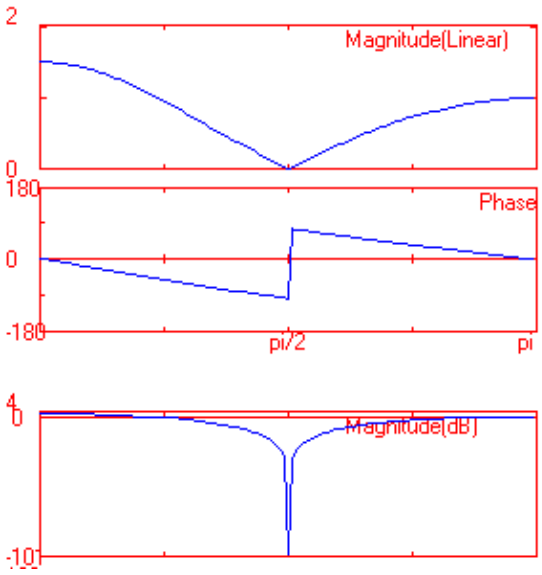
$$H(\nu) = 0.6\,\frac{z+z^{-1}}{z-0.2}\bigg|_{z=e^{2\pi j\nu}} = 0.6\,\frac{e^{2\pi j\nu}+e^{-2\pi j\nu}}{e^{2\pi j\nu}-0.2}$$

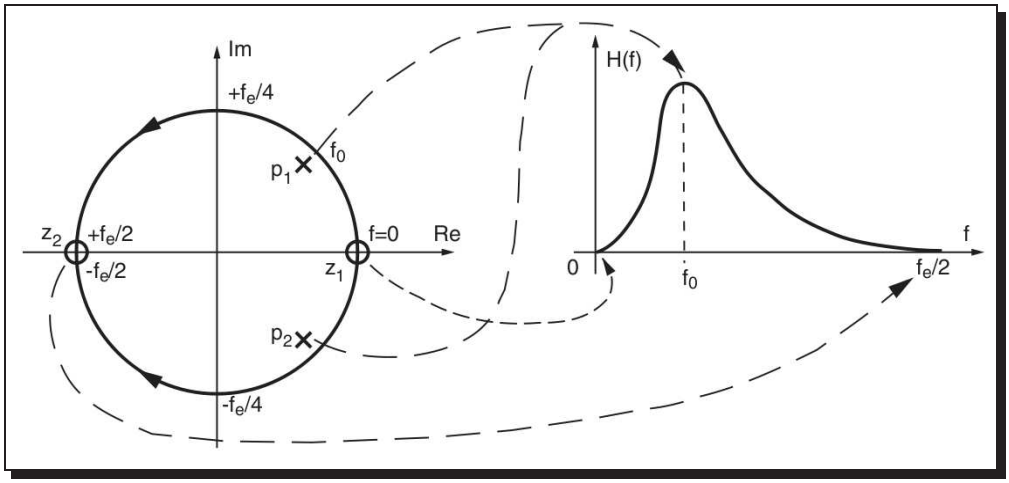
$$= \frac{1.2\,\cos(2\pi\nu)}{\cos(2\pi\nu)+j\,\sin(2\pi\nu)-0.2}$$

Ce qui donne :

$$|H(\nu)| = \frac{1.2\,|\cos(2\pi\,\nu)|}{\sqrt{1.04-0.4\cos(2\pi\nu)}}$$

$$\Phi(\nu) = -\arctan\left(\frac{\sin(2\pi\nu)}{-0.2+\cos(2\pi\nu)}\right)$$



SYSTÈME LIT RATIONNEL
EXEMPLE D'ÉTUDE COMPLÈTE (6)

Un Autre Exemple