



DIRO
IFT 3205

TRAITEMENT DU SIGNAL TRANSFORMÉE DE FOURIER

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

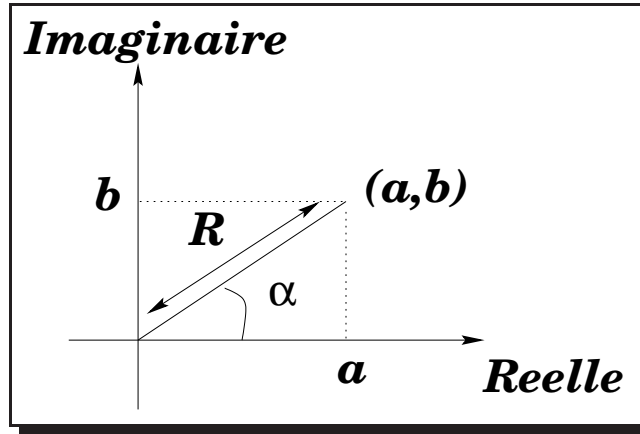
TRANSFORMÉE DE FOURIER

SOMMAIRE

Nombres Complexes (Rappel)	2
Convolution 1D	3
Notion de Spectre & Série de Fourier	4
Forme Complexe d'une Série de Fourier	11
Transformée de Fourier 1D	12
Périodicité et Échantillonnage	21
Théorème de Shannon	25
Transformée de Fourier 2D	26

TRANSFORMÉE DE FOURIER

NOMBRES COMPLEXES (RAPPEL)



$$(a, b) \leftrightarrow a + jb \leftrightarrow R \cos \alpha + jR \sin \alpha$$

Notation : $\exp(j\alpha) = \cos \alpha + j \sin \alpha$, $j^2 = -1$

$$a + jb = R \cos \alpha + jR \sin \alpha = R \exp(j\alpha)$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{Amplitude}$$

$$\alpha = \arctan(b/a) \quad \text{Phase}$$

Propriétés

$$a + jb = R \exp(j\alpha) \quad a - jb = R \exp(-j\alpha) \quad \text{Conjugué}$$

$$R_1 \exp(j\theta) * R_2 \exp(j\alpha) = R_1 R_2 \exp(j(\theta + \alpha)) \quad \text{Multiplication}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (R \exp(j\alpha)) = jR \exp(j\alpha) \quad \text{Dérivée}$$

Notations Complexes des Fonction sinus et cosinus

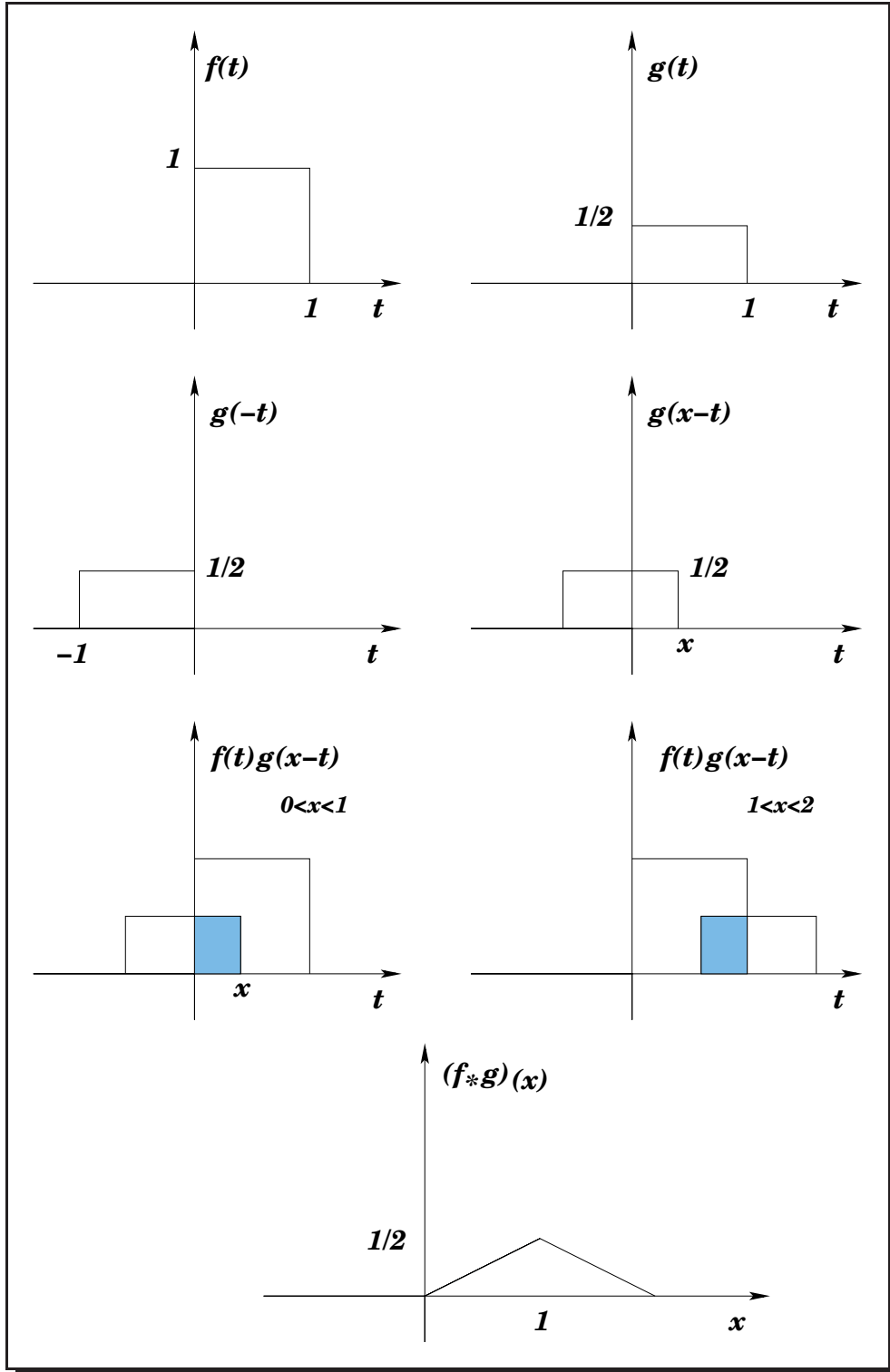
$$\cos x = \frac{1}{2} (\exp(jx) + \exp(-jx))$$

$$\sin x = \frac{-j}{2} (\exp(jx) - \exp(-jx))$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

CONVOLUTION 1D - FONCTIONS CONTINUES-

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$$



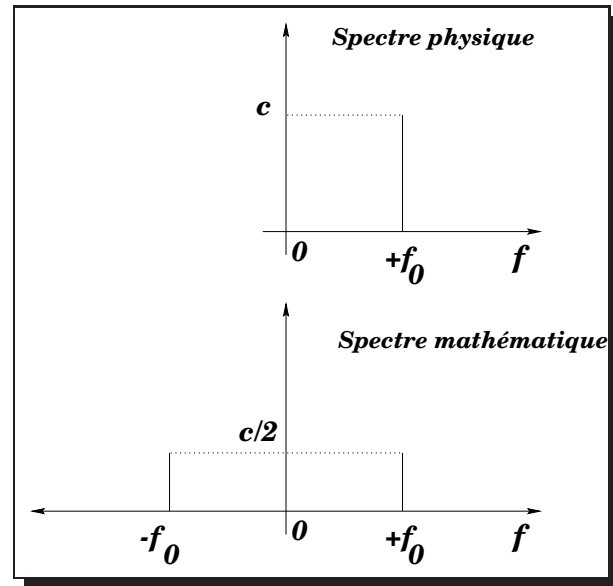
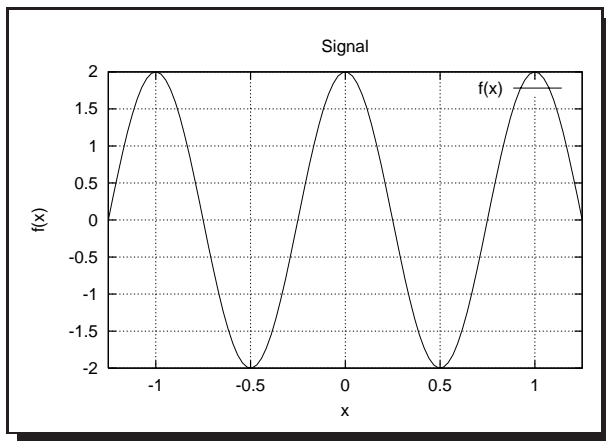
TRANSFORMÉE DE FOURIER

NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (1)

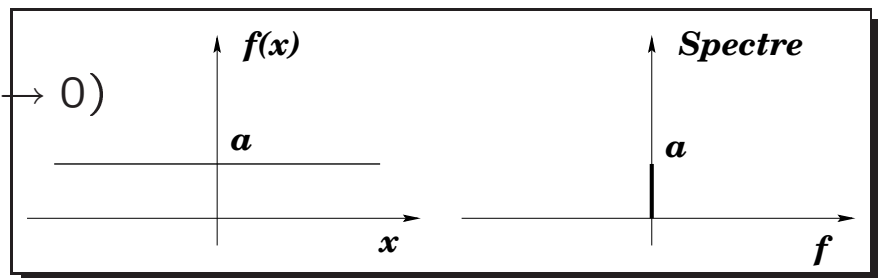
NOTION DE SPECTRE

- Signal sinusoïdal de fréquence f_0 ► $f(x) = c \cos(2\pi f_0 x)$
(c est l'amplitude du signal et $T = 1/f_0$, sa période)

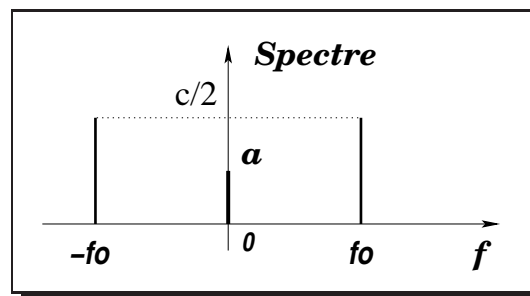
Notation complexe ► $f(x) = \frac{c}{2} (\exp(2\pi j f_0 x) + \exp(-2\pi j f_0 x))$



- Si $T \rightarrow \infty$, ($f_0 \rightarrow 0$)



- $f(x) = a + \frac{c}{2} (\exp(2\pi j f_0 x) + \exp(-2\pi j f_0 x))$



TRANSFORMÉE DE FOURIER

NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (2)

SÉRIE DE FOURIER

Soit f , signal périodique de période $T = 1/f_0 = 2\pi/\omega$
et de valeur moyenne $A_0/2$

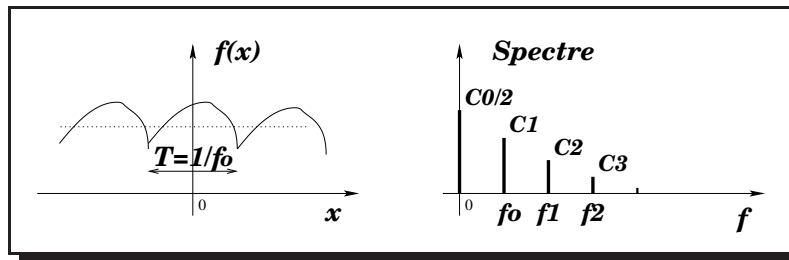
Principe de la décomposition d'un signal périodique sur une base de signaux élémentaires sinusoidales (et cosinus.) dont la fréquence est un multiple de f_0

Cette base de signaux élémentaires est

$$\left\{ 1, \cos(\omega x), \cos(2\omega x), \dots, \sin(\omega x), \sin(2\omega x), \dots \right\}$$

On rappelle que :

$$\int_0^T \cos(px) \cos(qx) dx = 0 \quad \text{si } p \neq q$$
$$\int_0^T \cos(px) \sin(qx) dx = 0 \quad \text{pour tous } p, q$$



$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n2\pi f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n2\pi f_0 x)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n2\pi f_0 x) dx \quad n > 0$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(n2\pi f_0 x) dx \quad n > 0$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \left(\text{et } \theta_n = \arctan(B_n/A_n) \right)$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (3)

Pourquoi existe t-il ce facteur $2/T$?

Pour retrouver ► Série Fourier $[\cos(wx)] = \cos(wx)$

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T \cos(wx) \cos(nwx) dx \\ &= 0 \quad \text{si } n \neq 1 \\ A_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T \cos^2(wx) dx = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos(2wx)) dx = 1\end{aligned}$$

Convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nwx) + B_n \sin(nwx)$$

On a : $|A_n \cos(nwx) + B_n \sin(nwx)| \leq |A_n| + |B_n|$

► Si les séries $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ sont convergente
Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ sera convergente

Propriété de Bessel-Parseval

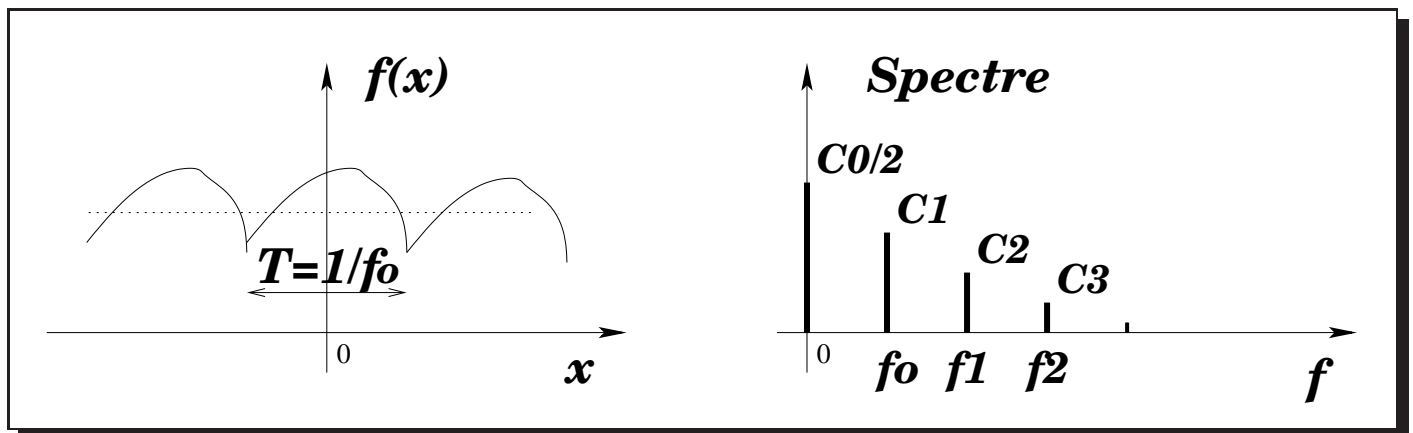
$$\frac{2}{T} \int_{x=0}^T f^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (4)

Propriétés des coefficients de Fourier

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0$
2. $\int_0^T \dots \rightarrow \int_\alpha^{\alpha+T} \dots$
3. Fonction f paire $\rightarrow B_n = 0$
4. Fonction f impaire $\rightarrow A_n = 0$
5. Conservation NRJ $\rightarrow \frac{2}{T} \int_{x=0}^T f^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2$



Spectre de raies

- $A_0/2$ \leftrightarrow Niveau moyen du signal
- f_0 \leftrightarrow Le fondamental
- nf_0 \leftrightarrow Les harmoniques
- C_n \leftrightarrow Amplitude (Module) de la n -ième harmonique
- C_n^2 \leftrightarrow Énergie de l'harmonique de rang n

TRANSFORMÉE DE FOURIER

NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (5)

Représentation concise de la série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n2\pi f_0 x + \theta_n) + C_0/2$$

avec $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ et $\theta_n = \arctan(B_n/A_n)$

Preuve de : $A \sin(kx) + B \cos(kx) = C \sin(kx + \theta)$

$$A \sin(kx) + B \cos(kx) = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(kx) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(kx) \right) \quad (1)$$

Puisque $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = 1$

Il existe un θ tel que $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \theta$ et $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \theta$

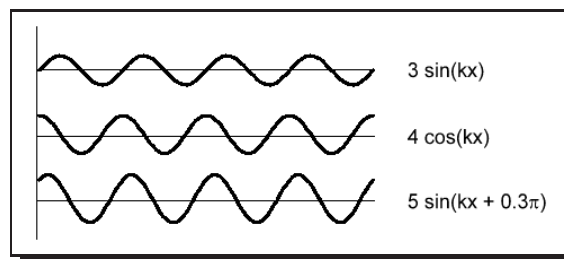
Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \theta \sin(kx) + \sin \theta \cos(kx)) \\ &\Leftrightarrow C \sin(kx + \theta) \end{aligned}$$

avec $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ Amplitude

et $\theta = \arctan(B/A)$ Phase

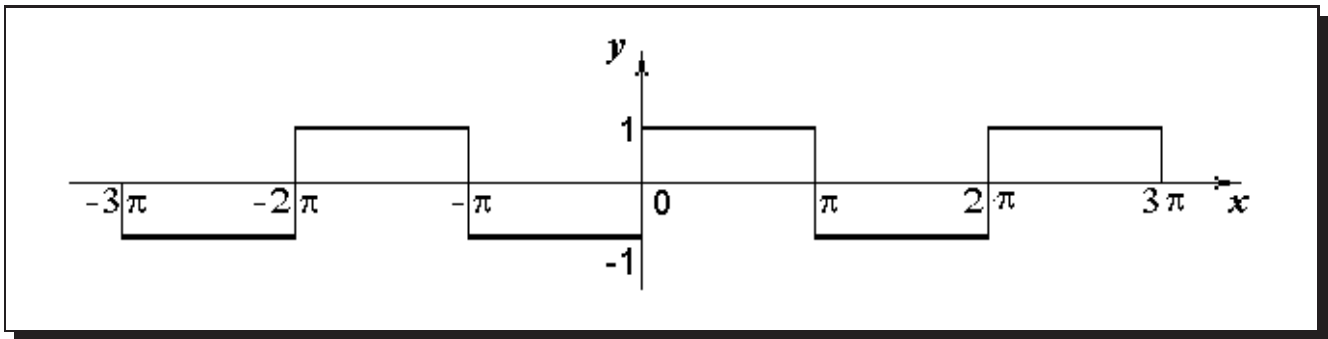
Exemple



TRANSFORMÉE DE FOURIER

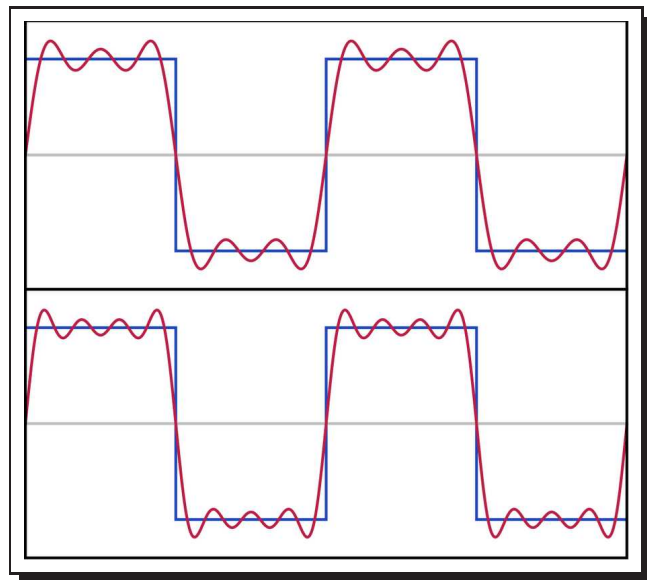
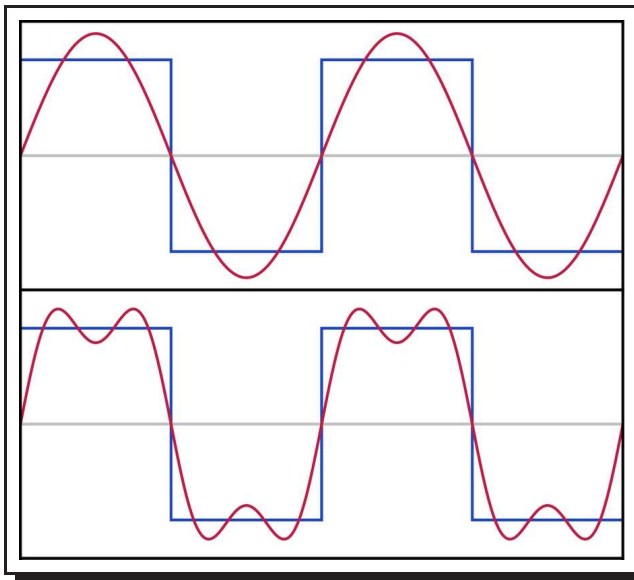
NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (6)

Série de Fourier de l'onde carrée 1D



$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n2\pi f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n2\pi f_0 x)$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1} + \dots \right)$$



–Note–

Signal impair ◀▶ constitué de fonctions sinus

Signal discontinu ◀▶ demande une infinité d'harmoniques pour une bonne reconstruction

Signal à moyenne nulle ◀▶ $A_0 = 0$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

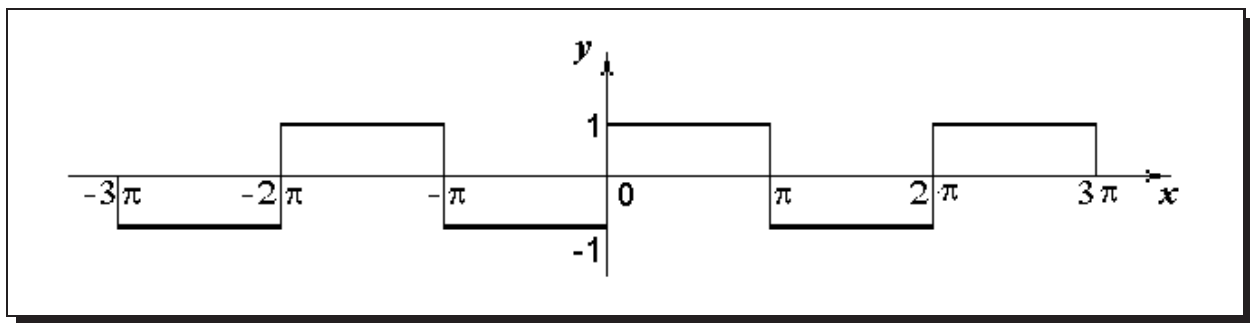
NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (7)

Théorème de convergence

- En tout point où f (périodique de période $T = 1/f_0$ et de valeur moyenne $A_0/2$) est continu

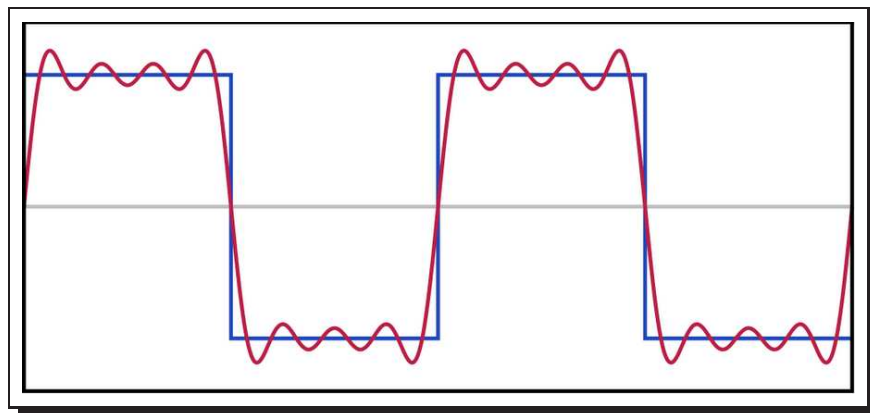
$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n2\pi f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n2\pi f_0 x)$$

- En un point de discontinuité de la fonction f par exemple, pour la fonction ci-dessous, en $x_c = \pi$



Alors la série de Fourier converge vers la somme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[f(x_c + 0) + f(x_c - 0) \right] \\ & = \\ & \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n2\pi f_0 x_c) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n2\pi f_0 x_c) \end{aligned}$$



TRANSFORMÉE DE FOURIER

FORME COMPLEXE D'UNE SÉRIE DE FOURIER

FORME COMPLEXE D'UNE SÉRIE DE FOURIER

- ▶ Spectre mathématique plus informatif
- ▶ Plus facile de manipuler des exponentielles complexes que des fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 x + \theta_n) + C_0/2 \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_n}{2} \left(\exp(2\pi j n f_0 x) \exp(j\theta_n) + \exp(-2\pi j n f_0 x) \exp(-j\theta_n) \right) \right) + \frac{C_0}{2} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_n \exp(2\pi j n f_0 x) + D_n^* \exp(-2\pi j n f_0 x) \right) + \frac{C_0}{2}
 \end{aligned}$$

avec $D_n = \frac{C_n}{2} \exp(j\theta_n) = \frac{1}{2}(A_n - jB_n)$, $\forall n > 0$ et $D_0 = \frac{C_0}{2}$.

D_n ◀▶ Coefficients de Fourier, généralement complexes.
 Pour les signaux réels, on montre que ◀▶ $D_n^* = D_{-n}$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} D_n \exp(2\pi j n f_0 x)$$

$$\begin{aligned}
 D_n &= \frac{1}{2}(A_n - jB_n) \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cos(2\pi n f_0 x) dx - j \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \sin(2\pi n f_0 x) dx \\
 &\propto \int_0^T f(x) \exp(-2\pi j n f_0 x) dx
 \end{aligned}$$

Représentation des D_n

Parties réelles et parties imaginaires ◀▶ (a_n, b_n)
 Modules et arguments ◀▶ (c_n, θ_n)

TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER 1D (1)

Un signal non périodique ► lim_{T→∞} signal ► spectre continu

$$\mathcal{F}[f(x)] = F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x) dx \quad \nu \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\nu)] = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \exp(2\pi j\nu x) d\nu$$

où x coordonnée spatiale
et ν coordonnée spectrale

► Continuum de fréquences harmoniques

$$F(\nu) = \mathcal{R}[F(\nu)] + j\mathcal{I}[F(\nu)] = R(\nu) + jI(\nu)$$

$$F(\nu) = |F(\nu)| \exp[j\Phi(\nu)]$$

Spectre d'amplitude :

$$|F(\nu)| = \sqrt{R(\nu)^2 + I(\nu)^2}$$

Phase :

$$\Phi(\nu) = \arctan\left(\frac{I(\nu)}{R(\nu)}\right)$$

– Principe du filtrage –

► Modification de la phase et du spectre d'amplitude d'un signal

TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER -CAS PARTICULIER- (2)

a f est paire $\blacktriangleright F(\nu)$ est réel

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos 2\pi\nu x - j \sin 2\pi\nu x) dx$$

Or les fonctions $x \rightarrow f(x) \cos 2\pi\nu x$ et $x \rightarrow f(x) \sin 2\pi\nu x$ sont respectivement paire et impaire. Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x dx$$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin 2\pi\nu x dx = 0$

b f est impaire $\blacktriangleright F(\nu)$ est imaginaire pure

Cette fois, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x dx = 0$

c f est réelle \blacktriangleright symétrie hermitienne

$\mathcal{R}[F(\nu)]$ est paire et $\mathcal{I}[F(\nu)]$ est impaire

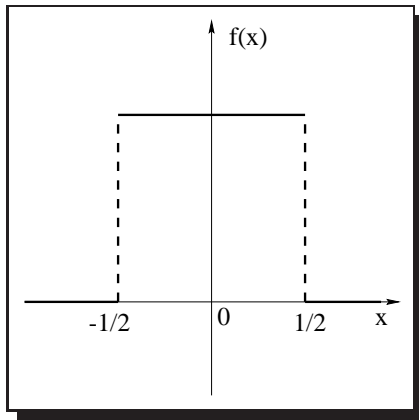
d f est paire $\blacktriangleright \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightleftharpoons{\mathcal{F}=\mathcal{F}^{-1}} & F(\nu) \\ F(\nu) & \xrightleftharpoons{\mathcal{F}=\mathcal{F}^{-1}} & f(x) \end{array}$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

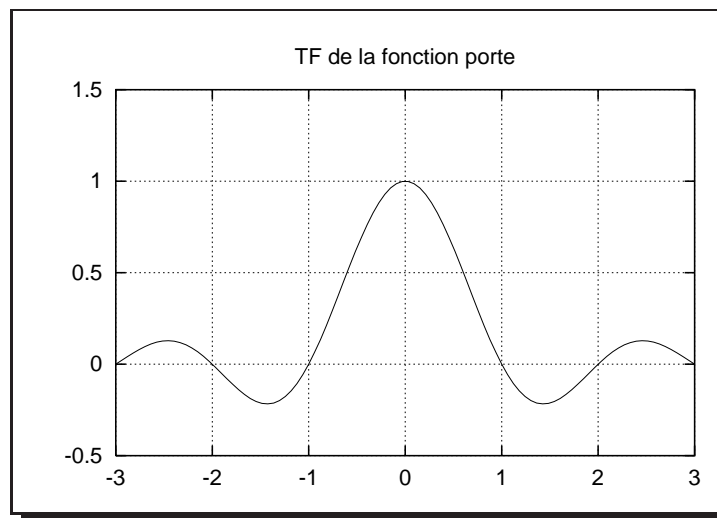
TRANSFORMÉE DE FOURIER -EXEMPLE- (3)

Fonction "Porte"



$$\begin{cases} \Pi(x) = 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ \Pi(x) = 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x) dx = \int_{-1/2}^{1/2} \exp(-2\pi j\nu x) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi j\nu} [\exp(-2\pi j\nu x)]_{-1/2}^{1/2} \\ &= -\frac{1}{2\pi j\nu} [\exp(-\pi j\nu) - \exp(\pi j\nu)] \\ &= -\frac{1}{2\pi j\nu} [\cos(\pi\nu) - j \sin(\pi\nu) - \cos(\pi\nu) - j \sin(\pi\nu)] \\ F(\nu) &= \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} = \text{sinc}(\nu) \end{aligned}$$



TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER -EXEMPLE- (4)

Fonction impulsion

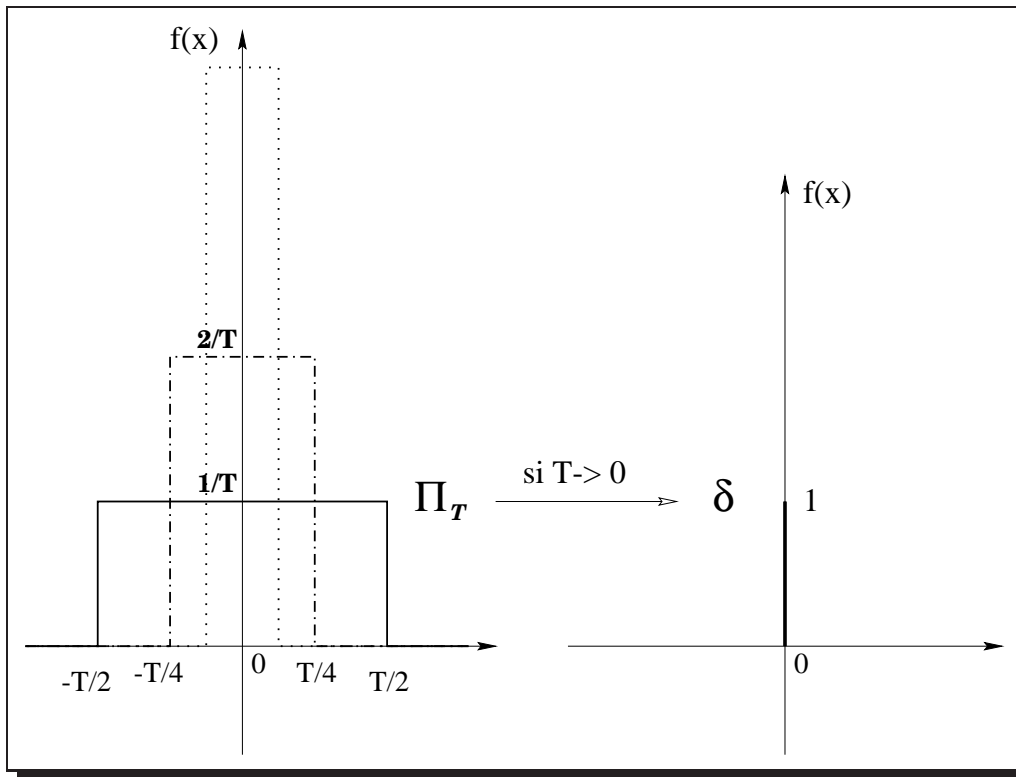
Soit la fonction $\Pi_T(x)$, définie par,

$$\Pi_T(x) = \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } |x| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{T} \Pi\left(\frac{x}{T}\right)\right) = \frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu T}$$

Lorsque $T \rightarrow 0$, la limite obtenue, qui n'est pas une fonction, est appelée *distribution de Dirac* et noté δ

$$\mathcal{F}(\delta) = 1$$



TRANSFORMÉE DE FOURIER

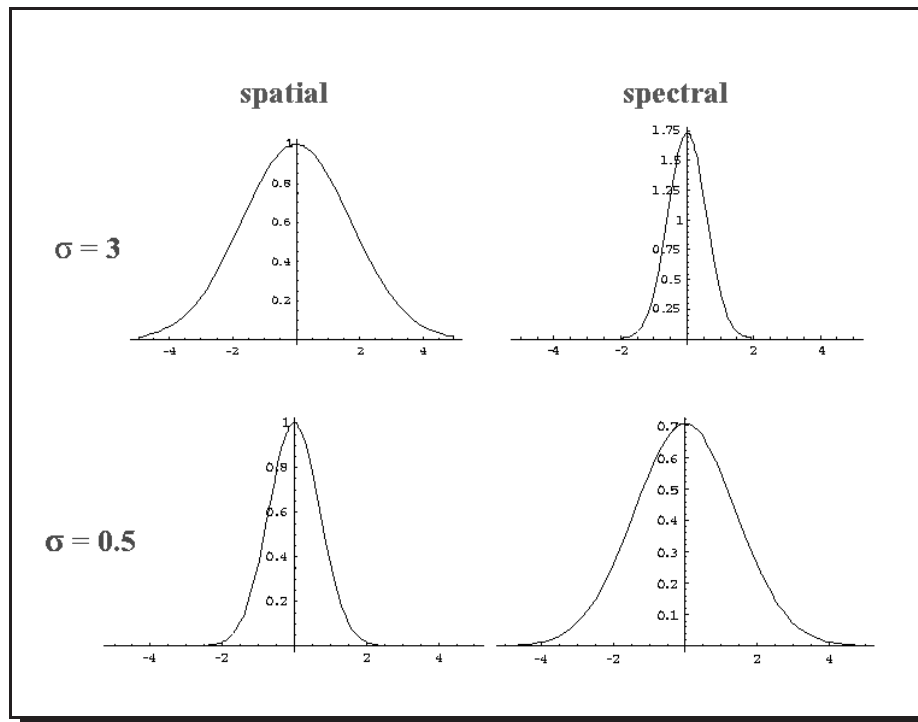
TRANSFORMÉE DE FOURIER -EXEMPLE- (5)

Fonction Gaussienne

Soit $f(x) = \exp(-\pi x^2)$

$$\begin{aligned}
 F(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2) \exp(-2\pi j\nu x) dx \\
 &= \exp(-\pi\nu^2) \exp(\pi\nu^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2) \exp(-2\pi j\nu x) dx \\
 &= \exp(-\pi\nu^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi(x + j\nu)^2) dx \\
 &= \exp(-\pi\nu^2) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi w^2) dw}_1 \quad (w = x + j\nu)
 \end{aligned}$$

$$F(\nu) = \exp(-\pi\nu^2)$$



$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right] = \exp\left(-2\pi^2\sigma^2\nu^2\right)$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER -PROPRIÉTÉS- (6)

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x) dx \Leftrightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \exp(2\pi j\nu x) d\nu$$

$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{-1}$ en échangeant

$$\begin{array}{l} f \text{ en } F \\ x \text{ en } \nu \\ j \text{ en } -j \end{array}$$

► Toute propriété de \mathcal{F} est donc vraie pour \mathcal{F}^{-1} en tenant compte de cette transposition

1. Linéarité

Si $\mathcal{F}(f) = F$ et $\mathcal{F}(g) = G$,

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda F + \mu G$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\lambda F + \mu G) = \lambda f + \mu g$$

2. Transformée de $f(ax)$

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

3. Transformée de $f(x-x_0)$

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)] = \exp(-2j\pi\nu x_0) F(\nu)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\nu - \nu_0)] = \exp(2\pi j\nu_0 x) f(x)$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER -PROPRIÉTÉS- (7)

La transformée d'une porte décalée est

$$\mathcal{F}[\Pi(x - x_0)] = \exp(-2j\pi\nu x_0) \times \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$$

Plus généralement, on a

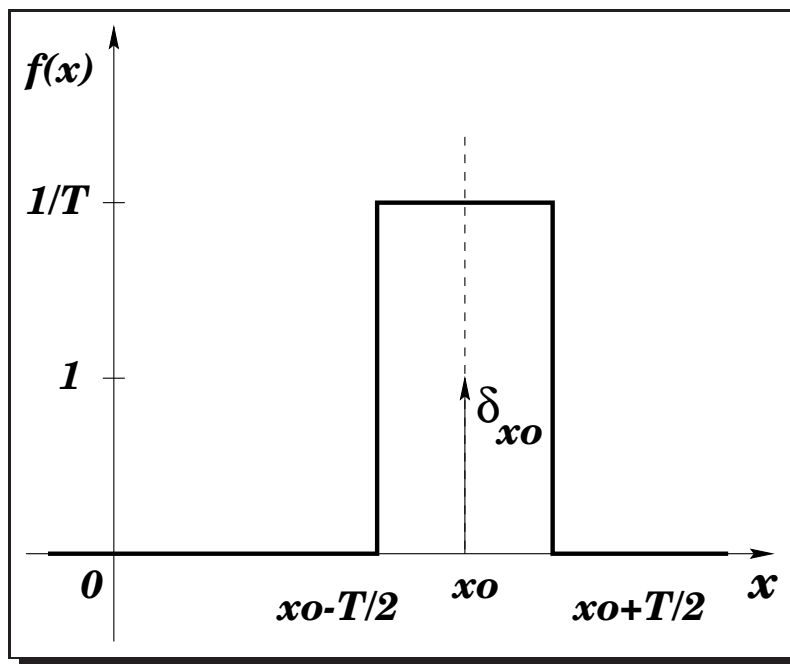
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{T}\Pi\left(\frac{x - x_0}{T}\right)\right] = \exp(-2\pi j\nu x_0) \times \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T}$$

Si $T \rightarrow 0$, on en déduit, en posant

$$\delta_{x_0} = \delta(x - x_0) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T}\Pi\left(\frac{x - x_0}{T}\right)$$

i.e., la distribution de Dirac translatée en x_0 . On obtient

$$\mathcal{F}(\delta_{x_0}) = \exp(-2\pi j\nu x_0)$$



TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER -PROPRIÉTÉS- (8)

4. Transformée de $f'(x)$

$$\mathcal{F}[f'(x)] = 2j\pi\nu F(\nu)$$

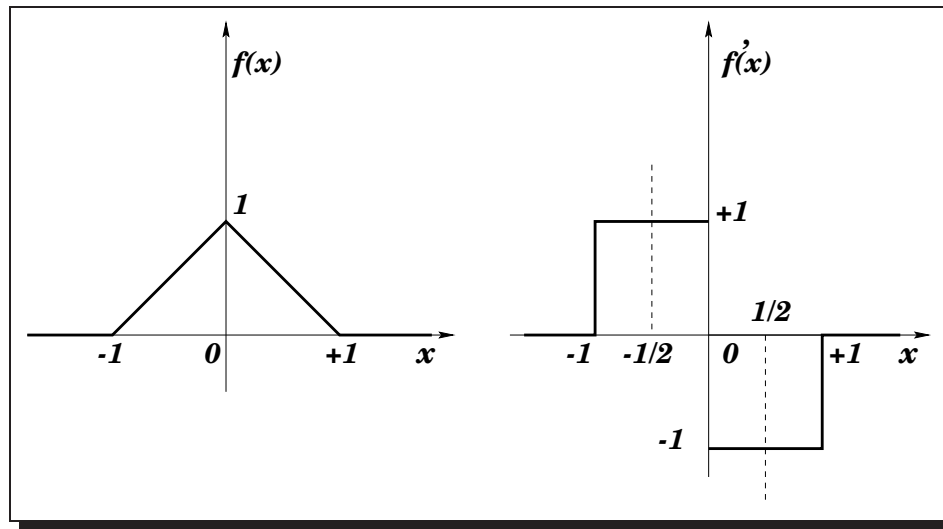
De même, pour \mathcal{F}^{-1} $\mathcal{F}^{-1}[F'(\nu)] = -2j\pi x f(x)$

Plus généralement, si $f^{(n)}(x)$ existe et possède une TF

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (2j\pi\nu)^n F(\nu) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\nu)] = (-2j\pi x)^n f(x)$$

-TF de la fonction triangle $\Lambda(x)$ -

$$\Lambda'(x) = \Pi\left(x + \frac{1}{2}\right) - \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$$



$$2j\pi\nu F(\nu) = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \left[\exp\left(-2\pi j\nu\left(-\frac{1}{2}\right)\right) - \exp\left(-2\pi j\nu\left(\frac{1}{2}\right)\right) \right]$$

$$2j\pi\nu F(\nu) = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \times 2j \sin \pi\nu$$

$$F(\nu) = \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \right)^2$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER -PROPRIÉTÉS- (9)

5. Transformée du produit de convolution

Produit de convolution

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t) dt$$

On démontre que si $\mathcal{F}(f) = F$ et $\mathcal{F}(g) = G$ alors

$$\mathcal{F}(f * g) = F \times G$$

De la même façon pour \mathcal{F}^{-1} , on a

$$\mathcal{F}^{-1}(F * G) = f \times g$$

*	\mathcal{F} \rightleftarrows	×
×	\mathcal{F}^{-1} \rightleftarrows	*

Exemple

$$\mathcal{F}[\Lambda(x)] = \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \right)^2$$

$$\mathcal{F}[\Lambda(x)] = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \times \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$$

or $\mathcal{F}[\Pi(x)] = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$

donc $\Lambda = \Pi * \Pi$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

PÉRIODICITÉ ET ÉCHANTILLONNAGE (1)

Note sur la distribution de Dirac

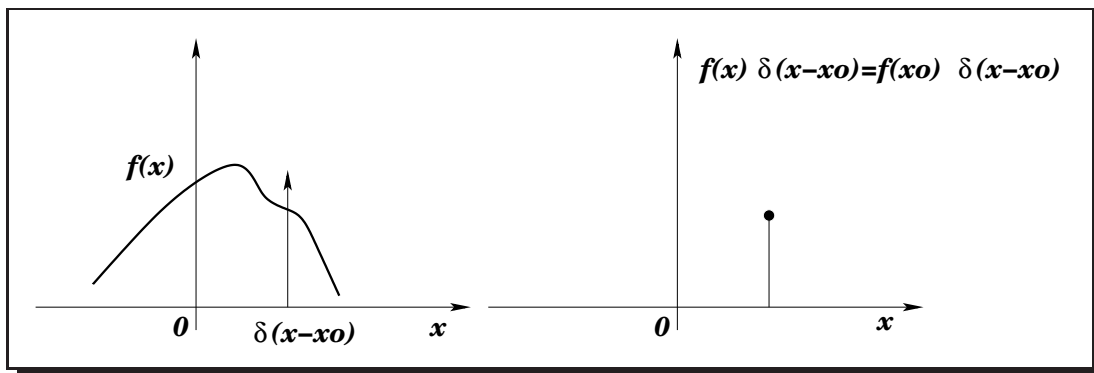
$$\delta(x) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{x}{T}\right) = \lim_{T \rightarrow 0} \Pi_T(x)$$

On définit de la même façon

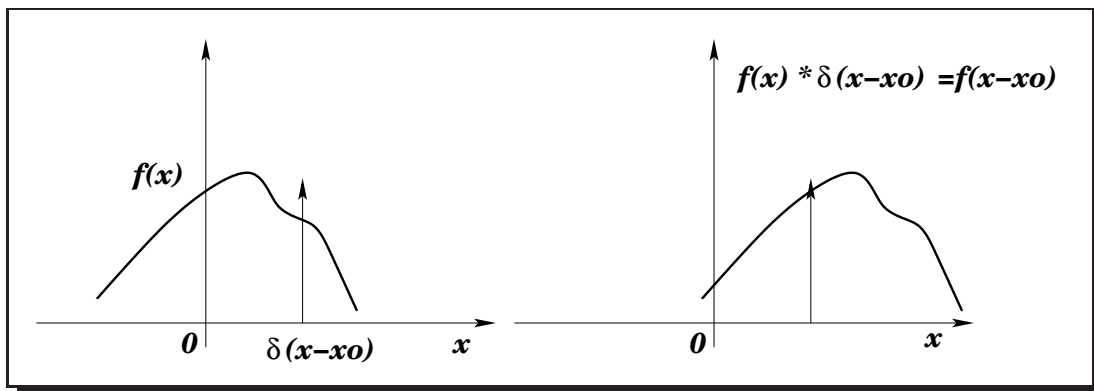
$$\delta(x - x_0) = \delta_{x_0} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{x - x_0}{T}\right)$$

Propriétés

$$\begin{aligned} f(x)\delta(x) &= f(0)\delta(x) \\ f(x)\delta(x - x_0) &= f(x_0)\delta(x - x_0) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f(x) * \delta &= f(x) \\ f(x) * \delta_{x_0} &= f(x - x_0) \\ \mathcal{F}[f(x) \exp(2j\pi\nu_0 x)] &= F(\nu - \nu_0) \end{aligned}$$



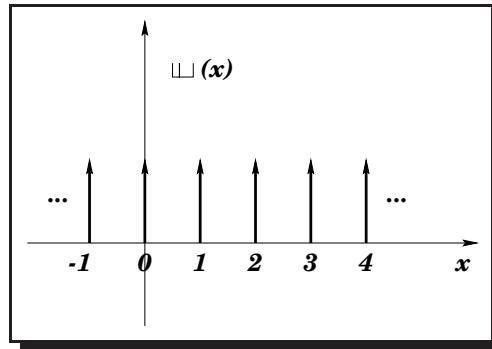
TRANSFORMÉE DE FOURIER

PÉRIODICITÉ ET ÉCHANTILLONNAGE (2)

Peigne de Dirac

On appelle "peigne de Dirac", la distribution noté $\text{III}(x)$, définie par

$$\text{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - n)$$

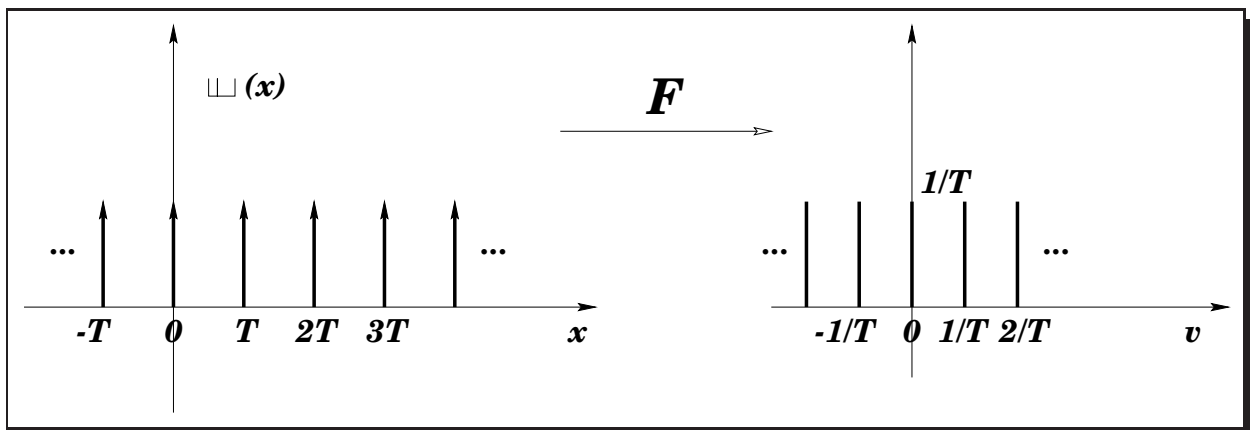


Le peigne de Dirac est invariant dans la TF

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - n)\right) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\nu - n)$$

Dans le cas d'un peigne de période T

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - nT)\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\nu - \frac{n}{T})$$



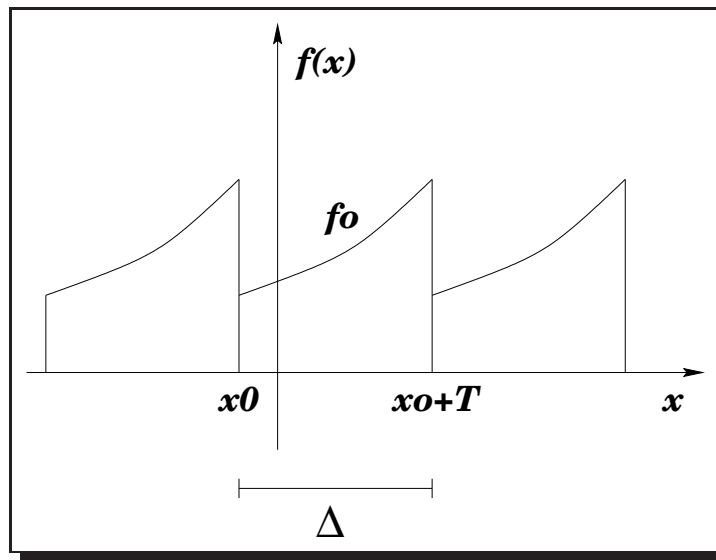
TRANSFORMÉE DE FOURIER

PÉRIODICITÉ ET ÉCHANTILLONNAGE (3)

Transformée de Fourier d'une fonction périodique

Soit $f(x)$ une fonction périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ définie par la fonction "motif" $f_0(x)$

$$\begin{cases} f_0(x) = f(x) & \text{si } x \in \Delta \\ f_0(x) = 0 & \text{si } x \notin \Delta \end{cases}$$



$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_0(x - nT) = f_0(x) * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - nT)$$

En appliquant la TF

$$F(\nu) = F_0(\nu) \times \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{T} F_0\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

soit,
$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right) \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{T} F_0\left(\frac{n}{T}\right)$$

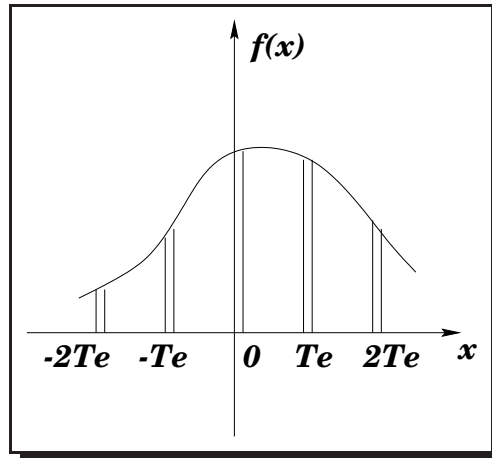
► Spectre de raies

TRANSFORMÉE DE FOURIER PÉRIODICITÉ ET ÉCHANTILLONNAGE (4)

Transformée de Fourier d'une fonction échantillonnée

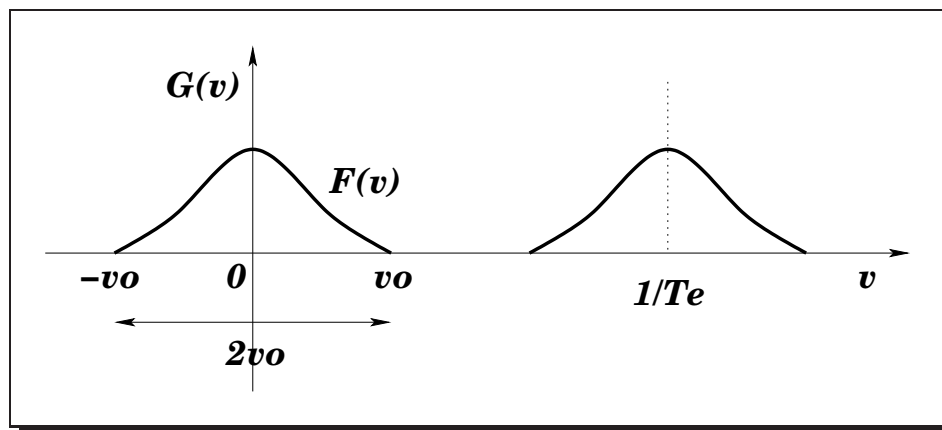
On peut représenter une fonction f échantillonnée avec la période d'échantillonnage T_e

$$f(x) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e \delta(x - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e f(nT_e) \delta(x - nT_e)$$



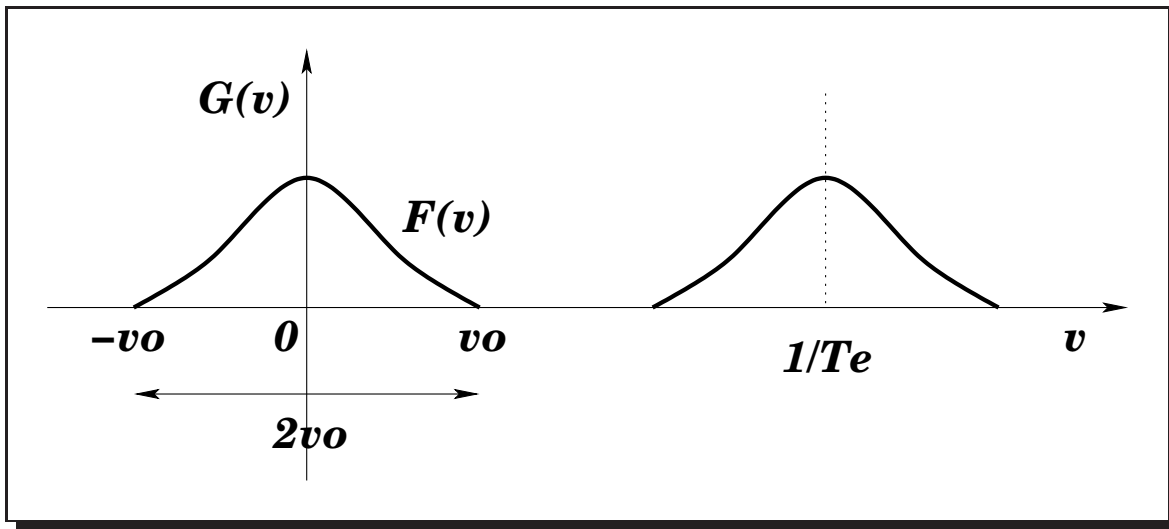
En appliquant la TF on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(f(x) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e \delta(x - nT_e)\right) &= F(\nu) * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{T_e}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F\left(\nu - \frac{n}{T_e}\right) \\ &= G(\nu) \end{aligned}$$



TRANSFORMÉE DE FOURIER

THÉORÈME DE SHANNON



On peut "isoler" $F(\nu)$ en multipliant par

$$F(\nu) = G(\nu) \times \Pi\left(\frac{\nu}{2\nu_0}\right)$$

d'où en appliquant \mathcal{F}^{-1}

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e f(nT_e) \delta(x - nT_e) * \frac{\sin 2\pi\nu_0 x}{\pi x}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e f(nT_e) \frac{\sin 2\pi\nu_0(x - nT_e)}{\pi(x - nT_e)}$$

Ainsi la fonction f dont la TF a pour support $[-\nu_0, \nu_0]$ est parfaitement déterminée par $\{f(nT_e)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dès que

$$T_e \leq \frac{1}{2\nu_0}$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER 2D (1)

$$\mathcal{F}[f(x, y)] = F(u, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp(-2\pi j(ux + \nu y)) dx dy$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(u, \nu)] = f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, \nu) \exp(2\pi j(ux + \nu y)) dud\nu$$

où x, y sont les coordonnées spatiales
et u, ν sont les coordonnées spectrales

$$F(u, \nu) = \mathcal{R}[F(u, \nu)] + j\mathcal{I}[F(u, \nu)] = R(u, \nu) + jI(u, \nu)$$

$$F(u, \nu) = |F(u, \nu)| \exp[j\Phi(u, \nu)]$$

Phase : $\Phi(u, \nu) = \arctan\left(\frac{I(u, \nu)}{R(u, \nu)}\right)$

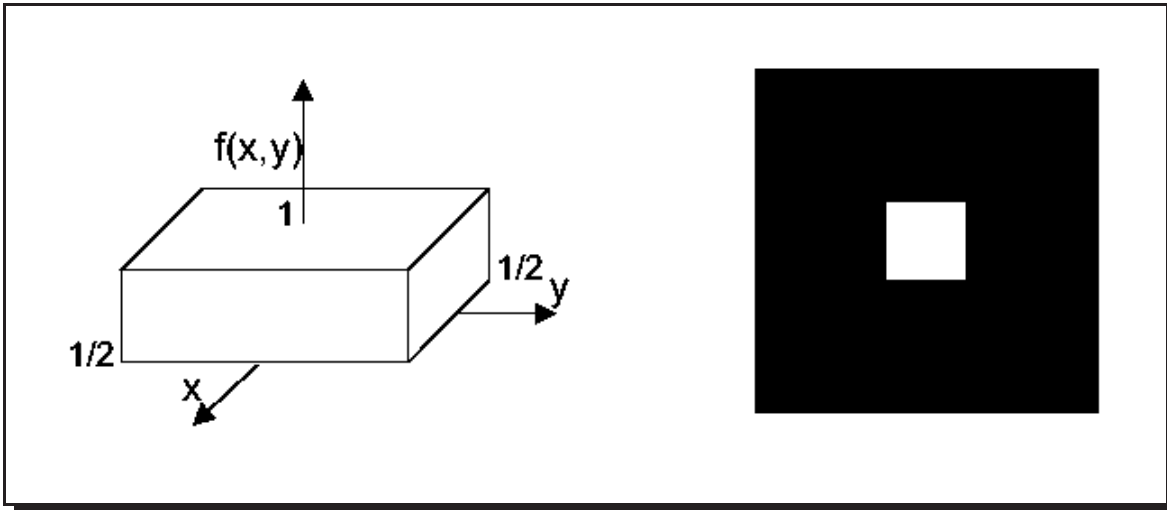
Spectre d'amplitude : $|F(u, \nu)| = \sqrt{R(u, \nu)^2 + I(u, \nu)^2}$

Spectre de puissance : $|F(u, \nu)|^2 = R(u, \nu)^2 + I(u, \nu)^2$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER 2D -EXEMPLE- (2)

Fonction "Rectangle"



$$\begin{cases} f(x, y) = \Pi(x, y) = 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}, \quad |y| \leq \frac{1}{2} \\ f(x, y) = \Pi(x, y) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(u, \nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp(-2\pi j(ux + \nu y)) \, dx dy \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \exp(-2\pi jux) \, dx \int_{-1/2}^{1/2} \exp(-2\pi j\nu y) \, dy \\ &= \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} \\ &= \text{sinc}(u, \nu) \end{aligned}$$

