



DIRO  
IFT 3205

# TRAITEMENT DU SIGNAL TRANSFORMÉE DE FOURIER

*Max Mignotte*

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

E-mail : [mignotte@iro.umontreal.ca](mailto:mignotte@iro.umontreal.ca)

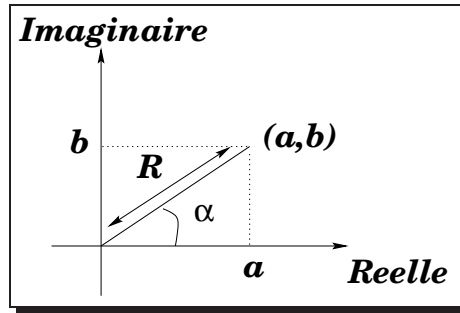
# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## SOMMAIRE

|                                             |    |
|---------------------------------------------|----|
| Nombres Complexes (Rappel) .....            | 2  |
| Convolution 1D .....                        | 3  |
| Notion de Spectre & Série de Fourier .....  | 4  |
| Forme Complexe d'une Série de Fourier ..... | 11 |
| Transformée de Fourier 1D .....             | 12 |
| Périodicité et Échantillonnage .....        | 21 |
| Théorème de Shannon .....                   | 25 |
| Transformée de Fourier 2D .....             | 26 |

# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## NOMBRES COMPLEXES (RAPPEL)



$$(a, b) \longleftrightarrow a + jb \longleftrightarrow R \cos \alpha + j R \sin \alpha$$

**Notation :**  $\exp(j\alpha) = \cos \alpha + j \sin \alpha, \quad j^2 = -1$

$$a + jb = R \cos \alpha + j R \sin \alpha = R \exp(j\alpha)$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{Amplitude}$$

$$\alpha = \arctan(b/a) \quad \text{Phase}$$

### Propriétés

$$a + jb = R \exp(j\alpha) \quad a - jb = R \exp(-j\alpha) \quad \text{Conjugué}$$

$$R_1 \exp(j\theta) * R_2 \exp(j\alpha) = R_1 R_2 \exp(j(\theta + \alpha)) \quad \text{Multiplication}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (R \exp(j\alpha)) = j R \exp(j\alpha) \quad \text{Dérivée}$$

### Notations Complexes des Fonction sinus et cosinus

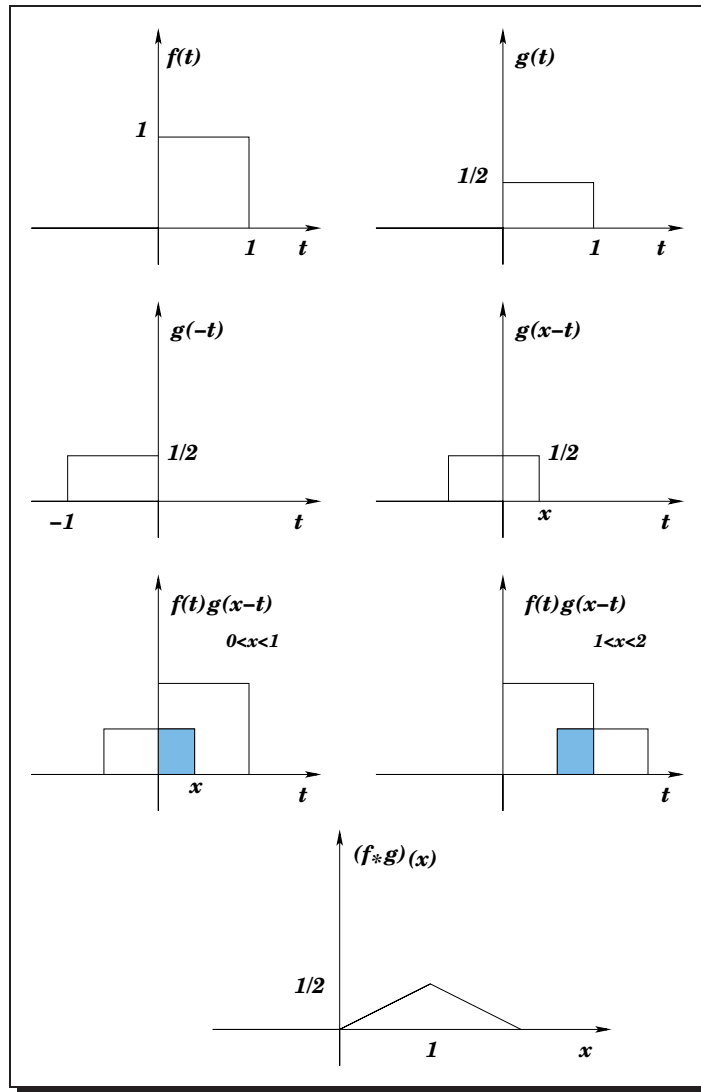
$$\cos x = \frac{1}{2} (\exp(jx) + \exp(-jx))$$

$$\sin x = \frac{-j}{2} (\exp(jx) - \exp(-jx))$$

# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## CONVOLUTION 1D - FONCTIONS CONTINUES-

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$$



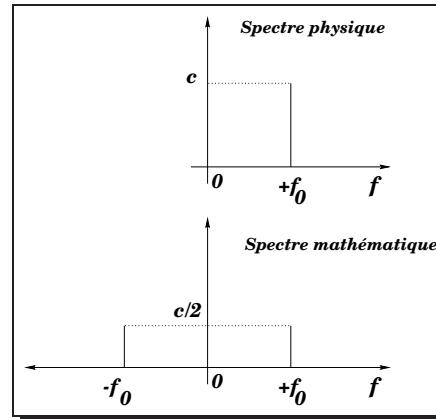
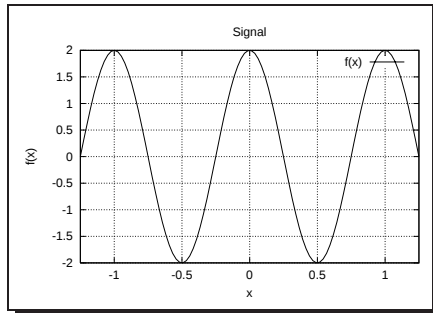
# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (1)

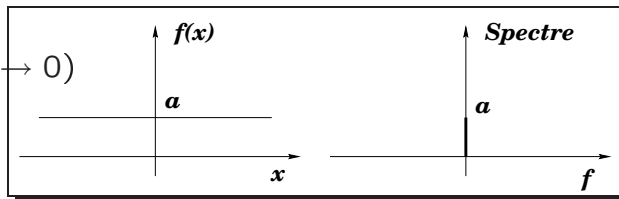
### NOTION DE SPECTRE

- Signal sinusoïdal de fréquence  $f_0 \rightarrow f(x) = c \cos(2\pi f_0 x)$   
( $c$  est l'amplitude du signal et  $T = 1/f_0$ , sa période)

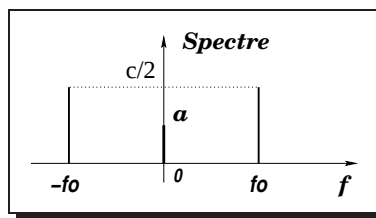
Notation complexe  $\rightarrow f(x) = \frac{c}{2} (\exp(2\pi j f_0 x) + \exp(-2\pi j f_0 x))$



- Si  $T \rightarrow \infty$ , ( $f_0 \rightarrow 0$ )



- $f(x) = a + \frac{c}{2} (\exp(2\pi j f_0 x) + \exp(-2\pi j f_0 x))$



# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (2)

### SÉRIE DE FOURIER

Soit  $f$ , signal périodique de période  $T = 1/f_0 = 2\pi/\omega$   
et de valeur moyenne  $A_0/2$

Principe de la décomposition d'un signal périodique sur une base de signaux élémentaires sinusoidales (et cosinus.) dont la fréquence est un multiple de  $f_0$

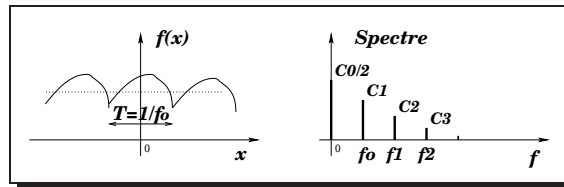
Cette base de signaux élémentaires est

$$\left\{ 1, \cos(\omega x), \cos(2\omega x), \dots, \sin(\omega x), \sin(2\omega x), \dots \right\}$$

On rappelle que :

$$\int_0^T \cos(px) \cos(qx) dx = 0 \quad \text{si } p \neq q$$

$$\int_0^T \cos(px) \sin(qx) dx = 0 \quad \text{pour tous } p, q$$



$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n2\pi f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n2\pi f_0 x)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n2\pi f_0 x) dx \quad n > 0$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(n2\pi f_0 x) dx \quad n > 0$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \left( \text{et } \theta_n = \arctan(B_n/A_n) \right)$$

# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (3)

### Pourquoi existe t-il ce facteur $2/T$ ?

Pour retrouver ►  $\text{SérieFourier}[\cos(wx)] = \cos(wx)$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T \cos(wx) \cos(nwx) dx \\ &= 0 \quad \text{si } n \neq 1 \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{2}{T} \int_0^T \cos^2(wx) dx = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos(2wx)) dx = 1$$

### Convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nwx) + B_n \sin(nwx)$$

$$\text{On a : } |A_n \cos(nwx) + B_n \sin(nwx)| \leq |A_n| + |B_n|$$

► Si les séries  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$  sont convergente

Alors la série  $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$  sera convergente

### Propriété de Bessel-Parseval

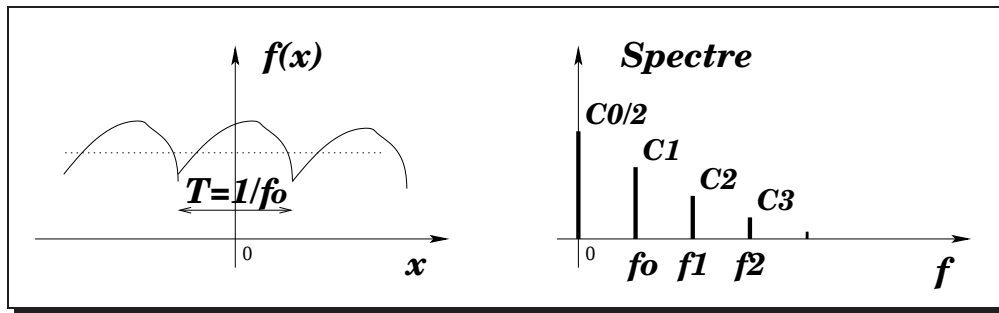
$$\frac{2}{T} \int_{x=0}^T f^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2$$

# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (4)

### Propriétés des coefficients de Fourier

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0$
2.  $\int_0^T \rightarrow \int_\alpha^{\alpha+T}$
3. Fonction  $f$  paire  $\rightarrow B_n = 0$
4. Fonction  $f$  impaire  $\rightarrow A_n = 0$
5. Conservation NRJ  $\rightarrow \frac{2}{T} \int_{x=0}^T f^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2$



### Spectre de raies

- $A_0/2$   $\leftrightarrow$  Niveau moyen du signal
- $f_0$   $\leftrightarrow$  Le fondamental
- $nf_0$   $\leftrightarrow$  Les harmoniques
- $C_n$   $\leftrightarrow$  Amplitude (Module) de la n-ième harmonique
- $C_n^2$   $\leftrightarrow$  Énergie de l'harmonique de rang  $n$

# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (5)

### Représentation concise de la série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n2\pi f_0 x + \theta_n) + C_0/2$$

avec  $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$  et  $\theta_n = \arctan(B_n/A_n)$

### Preuve de : $A \sin(kx) + B \cos(kx) = C \sin(kx + \theta)$

$$A \sin(kx) + B \cos(kx) = \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(kx) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(kx) \right) \quad (1)$$

Puisque  $\left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 + \left( \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = 1$

Il existe un  $\theta$  tel que  $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \theta$  et  $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \theta$

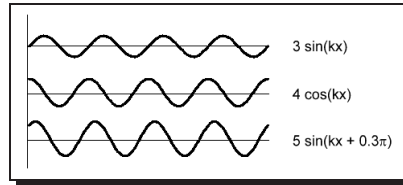
Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \theta \sin(kx) + \sin \theta \cos(kx)) \\ &\Leftrightarrow C \sin(kx + \theta) \end{aligned}$$

avec  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$  Amplitude

et  $\theta = \arctan(B/A)$  Phase

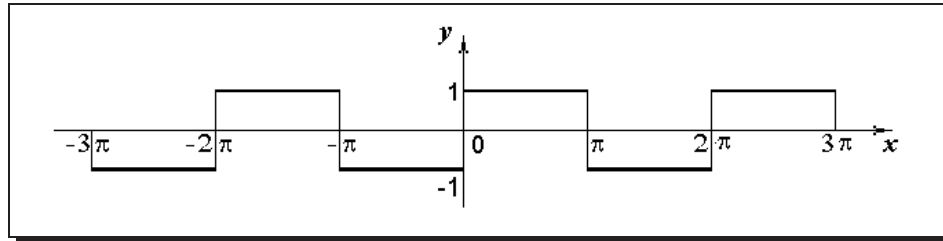
### Exemple



# TRANSFORMÉE DE FOURIER

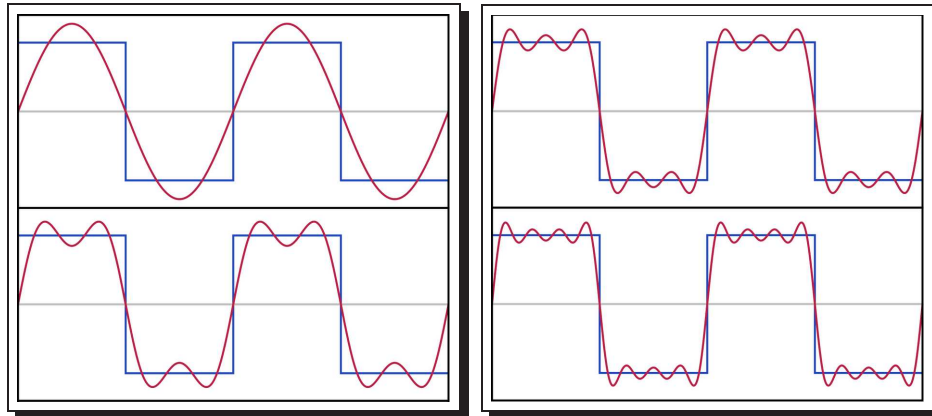
## NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (6)

### Série de Fourier de l'onde carrée 1D



$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n2\pi f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n2\pi f_0 x)$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1} + \dots \right)$$



### —Note—

**Signal impair** ◀▶ constitué de fonctions sinus

**Signal discontinu** ◀▶ demande une infinité d'harmoniques pour une bonne reconstruction

**Signal à moyenne nulle** ◀▶  $A_0 = 0$

# TRANSFORMÉE DE FOURIER

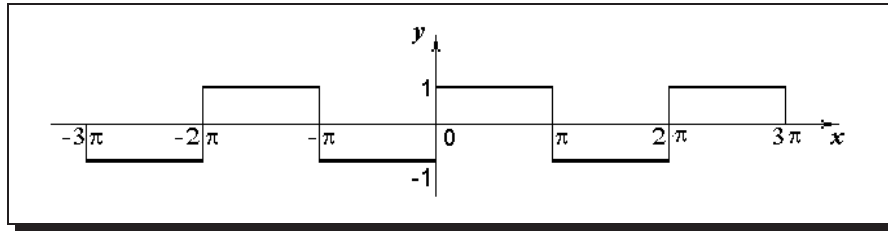
## NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (7)

### Théorème de convergence

- En tout point où  $f$  (périodique de période  $T = 1/f_0$  et de valeur moyenne  $A_0/2$ ) est continu

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n2\pi f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n2\pi f_0 x)$$

- En un point de discontinuité de la fonction  $f$  par exemple, pour la fonction ci dessous, en  $x_c = \pi$



Alors la série de Fourier converge vers la somme

$$\frac{1}{2} \left[ f(x_c + 0) + f(x_c - 0) \right]$$
$$=$$
$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n2\pi f_0 x_c) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n2\pi f_0 x_c)$$



# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## FORME COMPLEXE D'UNE SÉRIE DE FOURIER

### FORME COMPLEXE D'UNE SÉRIE DE FOURIER

- ▶ Spectre mathématique plus informatif
- ▶ Plus facile de manipuler des exponentielles complexes que des fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 x + \theta_n) + C_0/2 \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{C_n}{2} \left( \exp(2\pi j n f_0 x) \exp(j\theta_n) + \exp(-2\pi j n f_0 x) \exp(-j\theta_n) \right) \right) + \frac{C_0}{2} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( D_n \exp(2\pi j n f_0 x) + D_n^* \exp(-2\pi j n f_0 x) \right) + \frac{C_0}{2}
 \end{aligned}$$

avec  $D_n = \frac{C_n}{2} \exp(j\theta_n) = \frac{1}{2}(A_n - jB_n), \forall n > 0$  et  $D_0 = \frac{C_0}{2}$ .

$D_n$  ◀▶ Coefficients de Fourier, généralement complexes.  
 Pour les signaux réels, on montre que ◀▶  $D_n^* = D_{-n}$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} D_n \exp(2\pi j n f_0 x)$$

$$\begin{aligned}
 D_n &= \frac{1}{2}(A_n - jB_n) \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cos(2\pi n f_0 x) dx - j \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \sin(2\pi n f_0 x) dx \\
 &\propto \int_0^T f(x) \exp(-2\pi j n f_0 x) dx
 \end{aligned}$$

#### Représentation des $D_n$

Parties réelles et parties imaginaires ◀▶  $(a_n, b_n)$

Modules et arguments ◀▶  $(c_n, \theta_n)$

# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## TRANSFORMÉE DE FOURIER 1D (1)

Un signal non périodique ►  $\lim_{T \rightarrow \infty}$  signal ► spectre continu

$$\mathcal{F}[f(x)] = F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x) dx \quad \nu \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\nu)] = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \exp(2\pi j\nu x) d\nu$$

où  $x$  coordonnée spatiale  
et  $\nu$  coordonnée spectrale

► Continuum de fréquences harmoniques

$$F(\nu) = \mathcal{R}[F(\nu)] + j\mathcal{I}[F(\nu)] = R(\nu) + jI(\nu)$$

$$F(\nu) = |F(\nu)| \exp[j\Phi(\nu)]$$

Spectre d'amplitude :

$$|F(\nu)| = \sqrt{R(\nu)^2 + I(\nu)^2}$$

Phase :

$$\Phi(\nu) = \arctan\left(\frac{I(\nu)}{R(\nu)}\right)$$

### – Principe du filtrage –

► Modification de la phase et du spectre d'amplitude d'un signal

# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## TRANSFORMÉE DE FOURIER -CAS PARTICULIER- (2)

**a** f est paire ►  $F(\nu)$  est réel

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos 2\pi\nu x - j \sin 2\pi\nu x) dx$$

Or les fonctions  $x \rightarrow f(x) \cos 2\pi\nu x$  et  $x \rightarrow f(x) \sin 2\pi\nu x$  sont respectivement paire et impaire. Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x dx$$

et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin 2\pi\nu x dx = 0$

**b** f est impaire ►  $F(\nu)$  est imaginaire pure

Cette fois, on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x dx = 0$

**c** f est réelle ► symétrie hermitienne

$\mathcal{R}[F(\nu)]$  est paire et  $\mathcal{I}[F(\nu)]$  est impaire

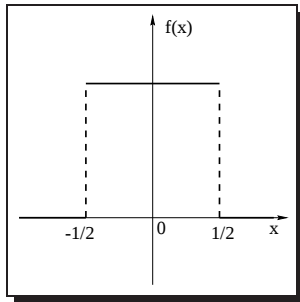
**d** f est paire ►  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xLeftrightarrow{\mathcal{F}=\mathcal{F}^{-1}} & F(\nu) \\ F(\nu) & \xLeftrightarrow{\mathcal{F}=\mathcal{F}^{-1}} & f(x) \end{array}$$

# TRANSFORMÉE DE FOURIER

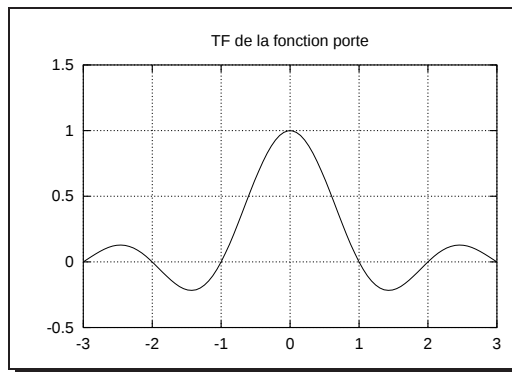
## TRANSFORMÉE DE FOURIER -EXEMPLE- (3)

### Fonction "Porte"



$$\begin{cases} \Pi(x) = 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ \Pi(x) = 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x) dx = \int_{-1/2}^{1/2} \exp(-2\pi j\nu x) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi j\nu} [\exp(-2\pi j\nu x)]_{-1/2}^{1/2} \\ &= -\frac{1}{2\pi j\nu} [\exp(-\pi j\nu) - \exp(\pi j\nu)] \\ &= -\frac{1}{2\pi j\nu} [\cos(\pi\nu) - j \sin(\pi\nu) - \cos(\pi\nu) - j \sin(\pi\nu)] \\ F(\nu) &= \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} = \text{sinc}(\nu) \end{aligned}$$



# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## TRANSFORMÉE DE FOURIER -EXEMPLE- (4)

### Fonction impulsion

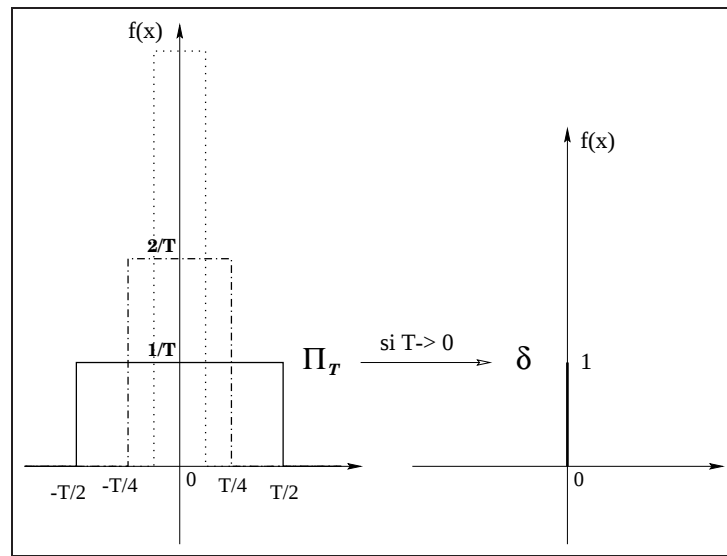
Soit la fonction  $\Pi_T(x)$ , définie par,

$$\Pi_T(x) = \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } |x| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{T} \Pi\left(\frac{x}{T}\right)\right) = \frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu T}$$

Lorsque  $T \rightarrow 0$ , la limite obtenue, qui n'est pas une fonction, est appelée *distribution de Dirac* et noté  $\delta$

$$\mathcal{F}(\delta) = 1$$



# TRANSFORMÉE DE FOURIER

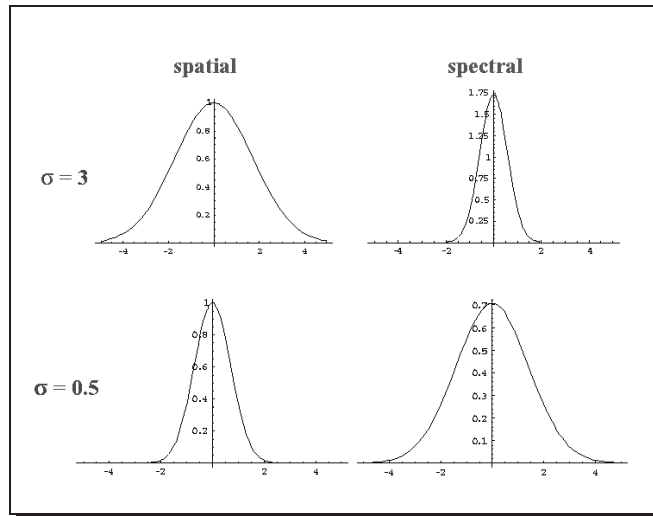
## TRANSFORMÉE DE FOURIER -EXEMPLE- (5)

### Fonction Gaussienne

Soit  $f(x) = \exp(-\pi x^2)$

$$\begin{aligned}
 F(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2) \exp(-2\pi j\nu x) dx \\
 &= \exp(-\pi\nu^2) \exp(\pi\nu^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2) \exp(-2\pi j\nu x) dx \\
 &= \exp(-\pi\nu^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi(x + j\nu)^2) dx \\
 &= \exp(-\pi\nu^2) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi w^2) dw}_1 \quad (w = x + j\nu)
 \end{aligned}$$

$$F(\nu) = \exp(-\pi\nu^2)$$



$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right] = \exp\left(-2\pi^2\sigma^2\nu^2\right)$$

# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## TRANSFORMÉE DE FOURIER -PROPRIÉTÉS- (6)

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j \nu x) dx \Leftrightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \exp(2\pi j \nu x) d\nu$$

$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{-1}$  en échangeant

$$\begin{array}{ccc} f & \text{en} & F \\ x & \text{en} & \nu \\ j & \text{en} & -j \end{array}$$

► Toute propriété de  $\mathcal{F}$  est donc vraie pour  $\mathcal{F}^{-1}$  en tenant compte de cette transposition

### 1. Linéarité

Si  $\mathcal{F}(f) = F$  et  $\mathcal{F}(g) = G$ ,

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda F + \mu G$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\lambda F + \mu G) = \lambda f + \mu g$$

### 2. Transformée de f(ax)

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

### 3. Transformée de f(x-x<sub>0</sub>)

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)] = \exp(-2\pi j \nu x_0) F(\nu)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\nu - \nu_0)] = \exp(2\pi j \nu_0 x) f(x)$$

# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## TRANSFORMÉE DE FOURIER -PROPRIÉTÉS- (7)

La transformée d'une porte décalée est

$$\mathcal{F}[\Pi(x - x_0)] = \exp(-2j\pi\nu x_0) \times \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$$

Plus généralement, on a

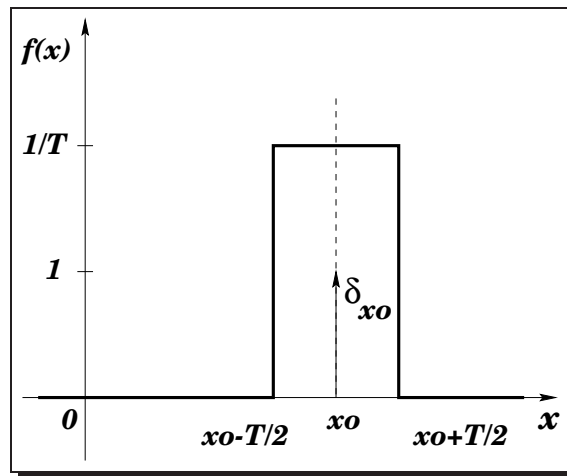
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{T}\Pi\left(\frac{x - x_0}{T}\right)\right] = \exp(-2\pi j\nu x_0) \times \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T}$$

Si  $T \rightarrow 0$ , on en déduit, en posant

$$\delta_{x_0} = \delta(x - x_0) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T}\Pi\left(\frac{x - x_0}{T}\right)$$

i.e., la distribution de Dirac translatée en  $x_0$ . On obtient

$$\mathcal{F}(\delta_{x_0}) = \exp(-2\pi j\nu x_0)$$



# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## TRANSFORMÉE DE FOURIER -PROPRIÉTÉS- (8)

### 4. Transformée de $f'(x)$

$$\mathcal{F}[f'(x)] = 2j\pi\nu F(\nu)$$

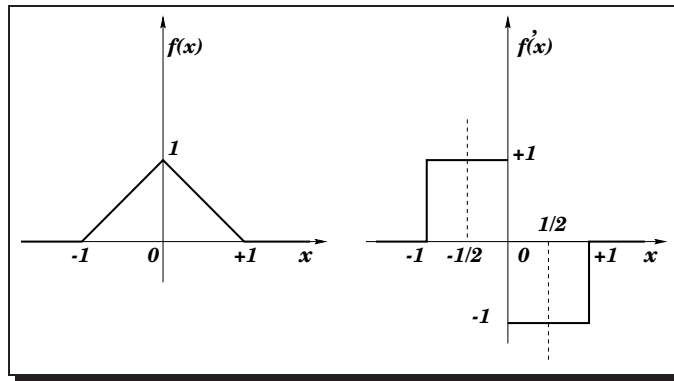
De même, pour  $\mathcal{F}^{-1}$   $\mathcal{F}^{-1}[F'(\nu)] = -2j\pi x f(x)$

Plus généralement, si  $f^{(n)}(x)$  existe et possède une TF

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (2j\pi\nu)^n F(\nu) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\nu)] = (-2j\pi x)^n f(x)$$

–TF de la fonction triangle  $\Lambda(x)$ –

$$\Lambda'(x) = \Pi\left(x + \frac{1}{2}\right) - \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$$



$$2j\pi\nu F(\nu) = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \left[ \exp\left(-2\pi j\nu\left(-\frac{1}{2}\right)\right) - \exp\left(-2\pi j\nu\left(\frac{1}{2}\right)\right) \right]$$

$$2j\pi\nu F(\nu) = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \times 2j \sin \pi\nu$$

$$F(\nu) = \left( \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \right)^2$$

# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## TRANSFORMÉE DE FOURIER -PROPRIÉTÉS- (9)

### 5. Transformée du produit de convolution

Produit de convolution

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$$

On démontre que si  $\mathcal{F}(f) = F$  et  $\mathcal{F}(g) = G$  alors

$$\mathcal{F}(f * g) = F \times G$$

De la même façon pour  $\mathcal{F}^{-1}$ , on a

$$\mathcal{F}^{-1}(F * G) = f \times g$$

|          |                                      |          |
|----------|--------------------------------------|----------|
| $*$      | $\xLeftrightarrow{\mathcal{F}}$      | $\times$ |
| $\times$ | $\xLeftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$ | $*$      |

#### —Exemple—

$$\mathcal{F}[\Lambda(x)] = \left( \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu} \right)^2$$

$$\mathcal{F}[\Lambda(x)] = \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu} \times \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu}$$

$$\text{or} \quad \mathcal{F}[\Pi(x)] = \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu}$$

$$\text{donc} \quad \Lambda = \Pi * \Pi$$

# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## PÉRIODICITÉ ET ÉCHANTILLONNAGE (1)

### Note sur la distribution de Dirac

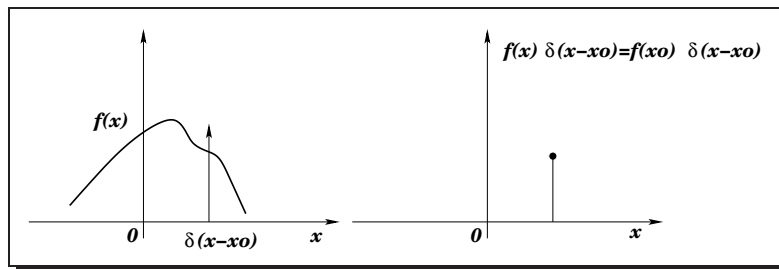
$$\delta(x) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{x}{T}\right) = \lim_{T \rightarrow 0} \Pi_T(x)$$

On définit de la même façon

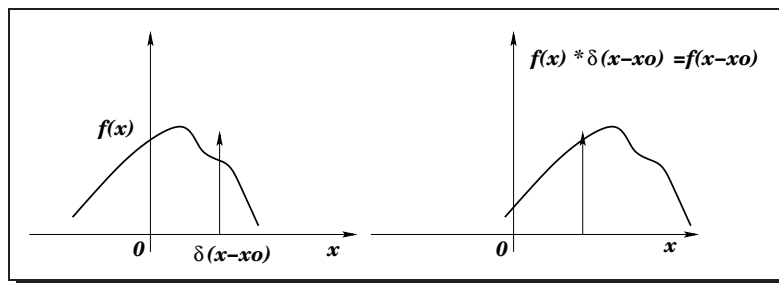
$$\delta(x - x_0) = \delta_{x_0} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{x - x_0}{T}\right)$$

### Propriétés

$$\begin{aligned} f(x) \delta(x) &= f(0) \delta(x) \\ f(x) \delta(x - x_0) &= f(x_0) \delta(x - x_0) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f(x) * \delta &= f(x) \\ f(x) * \delta_{x_0} &= f(x - x_0) \\ \mathcal{F}[f(x) \exp(2j\pi\nu_0 x)] &= F(\nu - \nu_0) \end{aligned}$$



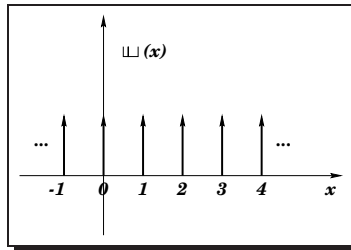
# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## PÉRIODICITÉ ET ÉCHANTILLONNAGE (2)

### Peigne de Dirac

On appelle "peigne de Dirac", la distribution noté  $\text{III}(x)$ , définie par

$$\text{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - n)$$

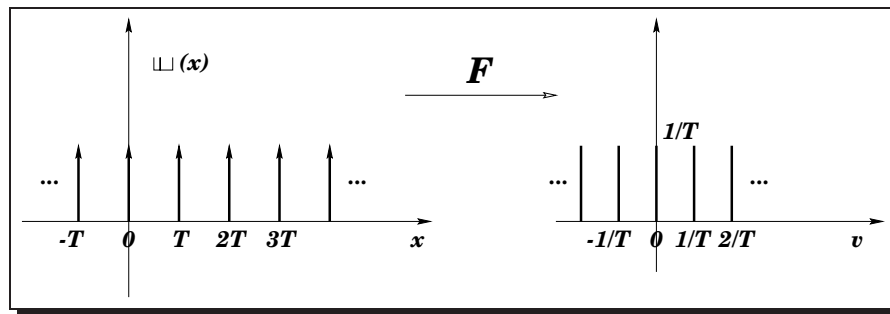


Le peigne de Dirac est invariant dans la TF

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - n)\right) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\nu - n)$$

Dans le cas d'un peigne de période T

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - nT)\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\nu - \frac{n}{T})$$



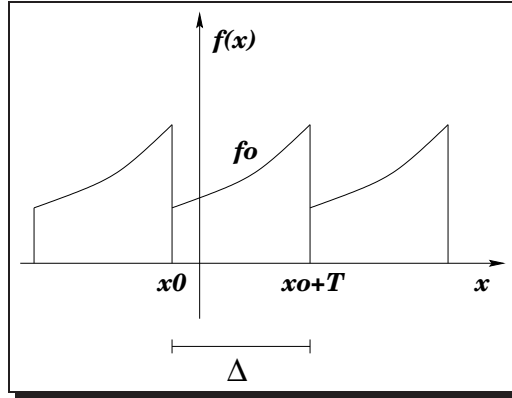
# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## PÉRIODICITÉ ET ÉCHANTILLONNAGE (3)

### Transformée de Fourier d'une fonction périodique

Soit  $f(x)$  une fonction périodique, de période  $T = \frac{2\pi}{w}$  définie par la fonction "motif"  $f_0(x)$

$$\begin{cases} f_0(x) = f(x) & \text{si } x \in \Delta \\ f_0(x) = 0 & \text{si } x \notin \Delta \end{cases}$$



$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_0(x - nT) = f_0(x) * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - nT)$$

En appliquant la TF

$$F(\nu) = F_0(\nu) \times \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{T} F_0\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

soit, 
$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right) \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{T} F_0\left(\frac{n}{T}\right)$$

► Spectre de raies

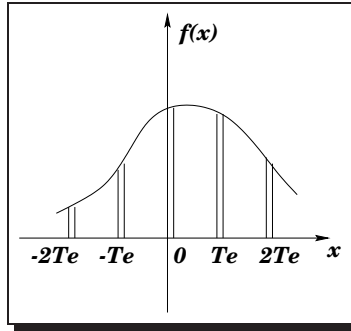
# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## PÉRIODICITÉ ET ÉCHANTILLONNAGE (4)

### Transformée de Fourier d'une fonction échantillonnée

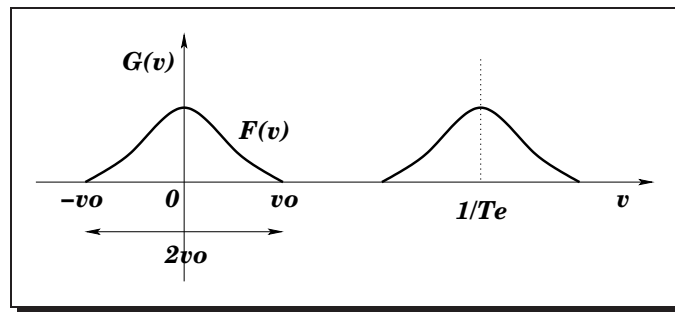
On peut représenter une fonction  $f$  échantillonnée avec la période d'échantillonnage  $T_e$

$$f(x) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e \delta(x - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e f(nT_e) \delta(x - nT_e)$$



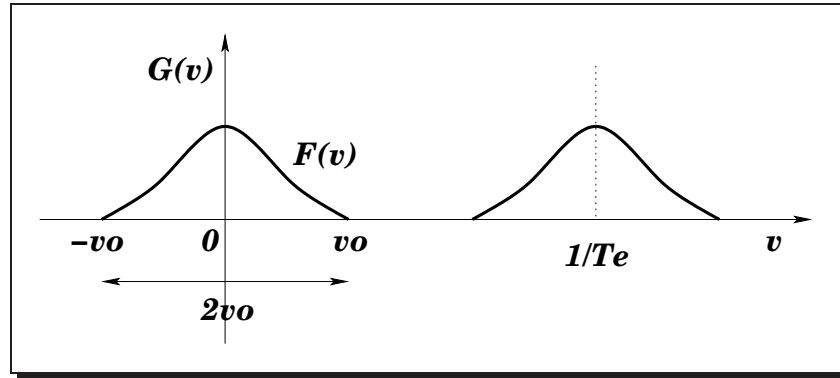
En appliquant la TF on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(f(x) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e \delta(x - nT_e)\right) &= F(\nu) * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{T_e}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F\left(\nu - \frac{n}{T_e}\right) \\ &= G(\nu) \end{aligned}$$



# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## THÉORÈME DE SHANNON



On peut “isoler”  $F(\nu)$  en multipliant par

$$F(\nu) = G(\nu) \times \Pi\left(\frac{\nu}{2\nu_0}\right)$$

d'où en appliquant  $\mathcal{F}^{-1}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e f(nT_e) \delta(x - nT_e) * \frac{\sin 2\pi\nu_0 x}{\pi x} \\ f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e f(nT_e) \frac{\sin 2\pi\nu_0(x - nT_e)}{\pi(x - nT_e)} \end{aligned}$$

Ainsi la fonction  $f$  dont la TF a pour support  $[-\nu_0, \nu_0]$  est parfaitement déterminée par  $\{f(nT_e)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  dès que

$$T_e \leq \frac{1}{2\nu_0}$$

# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## TRANSFORMÉE DE FOURIER 2D (1)

$$\mathcal{F}[f(x, y)] = F(u, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp(-2\pi j(ux + \nu y)) dx dy$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(u, \nu)] = f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, \nu) \exp(2\pi j(ux + \nu y)) dud\nu$$

où  $x, y$  sont les coordonnées spatiales  
et  $u, \nu$  sont les coordonnées spectrales

$$F(u, \nu) = \mathcal{R}[F(u, \nu)] + j\mathcal{I}[F(u, \nu)] = R(u, \nu) + jI(u, \nu)$$

$$F(u, \nu) = |F(u, \nu)| \exp[j\Phi(u, \nu)]$$

Phase :  $\Phi(u, \nu) = \arctan\left(\frac{I(u, \nu)}{R(u, \nu)}\right)$

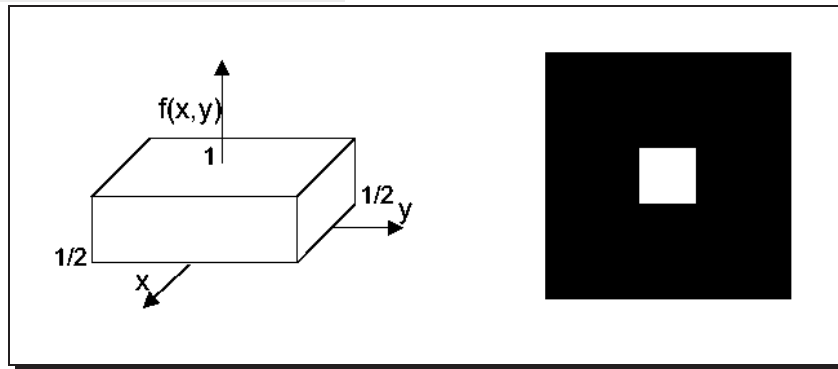
Spectre d'amplitude :  $|F(u, \nu)| = \sqrt{R(u, \nu)^2 + I(u, \nu)^2}$

Spectre de puissance :  $|F(u, \nu)|^2 = R(u, \nu)^2 + I(u, \nu)^2$

# TRANSFORMÉE DE FOURIER

## TRANSFORMÉE DE FOURIER 2D -EXEMPLE- (2)

### Fonction "Rectangle"



$$\begin{cases} f(x, y) = \Pi(x, y) = 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}, \quad |y| \leq \frac{1}{2} \\ f(x, y) = \Pi(x, y) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(u, \nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp(-2\pi j(ux + \nu y)) dx dy \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \exp(-2\pi jux) dx \int_{-1/2}^{1/2} \exp(-2\pi j\nu y) dy \\ &= \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} \\ &= \text{sinc}(u, \nu) \end{aligned}$$

