



TRAITEMENT DU SIGNAL TRANSFORMÉE EN Z

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

TRANSFORMÉE EN Z

SOMMAIRE

Définition	2
Domaine de Convergence	3
Exemple de Transformée en Z	5
Propriétés de la TZ	7
Transformée en Z Inverse	9
Application de la TZ	13
Représentation par Pôles et Zéros	16
Table	17

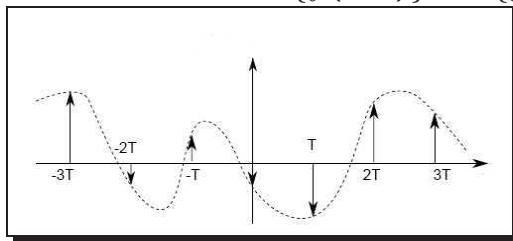
TRANSFORMÉE EN Z

DÉFINITION

INTÉRÊT DE LA TZ

- Généralisation de la TF (plus simple à inverser)
- Pratique pour résoudre des équations récurrentes utilisées dans le filtrage **temps-réel** des signaux **numériques** (**nombre infini** d'échantillons possibles)
- Interprétation du comportement de ces filtres en termes de **pôles & zéros**

Soit f une fonction numérique définie par sa *séquence numérique* : $\{f(nT_e)\}$ ou $\{f(n)\}$



DÉFINITION

$$F(z) = \mathcal{Z}(f(n)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) z^{-n}$$

- Convergence pour $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) z^{-n} \text{ converge}\}$
- Si $\{f(n)\}$ est de durée finie ; convergence pour le plan entier sauf en $z = 0$ et $z = \infty$
- Si $\{f(n)\}$ causal ($f(n) = 0 \forall n < 0$) $f(0) = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} F(z)$
- La variable n est généralement le *temps* discrétilisé (domaine temporel), la variable z est une création purement abstraite (domaine fréquentiel par analogie avec la TF)

TRANSFORMÉE EN Z

DOMAINE DE CONVERGENCE (1)

GÉNÉRALISATION DE LA TF

Pour $\{f(n)\}$ signal numérique causal et de durée finie

$$F(\nu) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp\left(-\frac{2\pi j n \nu}{N}\right)$$

La TFD est un **cas particulier de la TZ** et peut être trouvé en évaluant $F(z)$, en $z = \exp(2\pi j \nu / N) = \exp(jw)$ cad en l'évaluant sur le cercle unité, donc

$$F(\nu) = F(z) \Big|_{z=\exp(jw)}$$

DOMAINE DE CONVERGENCE

La TZ n'a de sens que si l'on précise le domaine des valeurs de z pour lesquelles cette série existe

► Region de convergence

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \dots$

Une série de ce type converge si $\lim_{n \rightarrow \infty} (|u_n|^{1/n}) < 1$

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) z^{-n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} f(n) z^{-n}}_{F(z_1)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}}_{F(z_2)}$$

- $F(z_2)$ converge si $\lim_{n \rightarrow \infty} (|f(n) z^{-n}|^{1/n}) < 1$
si $|z| > \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (|f(n)|^{1/n})}_{R-}$

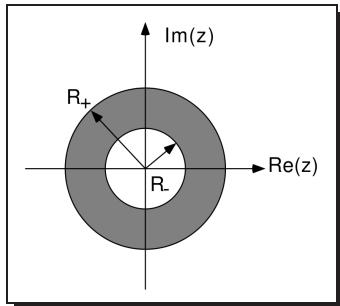
TRANSFORMÉE EN Z DOMAINE DE CONVERGENCE (2)

- $F(z_1) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f(n) z^{-n} = \sum_{m=1}^{\infty} f(-m) z^m$

$$F(z_1) \text{ converge si } |z| < \underbrace{\left(\frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} |f(-m)^{1/m}|} \right)}_{R_+}$$

Dans le cas général, le domaine de convergence de $F(z)$ est un anneau (ou couronne) de \mathbb{C} (espérant que $\neq \emptyset$)

$$R_- < |z| < R_+$$



REMARQUES

- Si le cercle unité \in domaine de convergence \Leftrightarrow TFD existe. Le passage TZ \triangleright TFD n'est possible que si le cercle unité \in domaine de convergence
- Les points du domaine de convergence où $F(z) = 0$ s'appellent les **zéros** (racines du numérateur)
- Les points du domaine de convergence où $F(z) = \infty$ s'appellent les **pôles** (racine du dénominateur)
- Si la TZ est définie pour $|z| > R$ avec $R < 1$, la TZ en $z = 1$ pourra aussi servir au calcul de la somme d'une série car

$$F(z = 1) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

TRANSFORMÉE EN Z

EXEMPLE DE TRANSFORMÉE en Z (1)

Fonction Dirac

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(z) = \mathcal{Z}[\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1 \quad (z \in \mathbb{C})$$

Fonction Dirac Retardé

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(z) = \mathcal{Z}[\delta_k(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = z^{-k} \quad (z \in \mathbb{C}^*)$$

Fonction Echelon-Unité

$$\mathcal{U}(n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad (n \geq 0)$$

$$F(z) = \mathcal{Z}[\mathcal{U}(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1 - (\frac{1}{z})^n}{1 - \frac{1}{z}}$$

$$F(z) = \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1)$$

Nota :

$|z| = 1$ est l'unique pôle de $F(z)$
(racine du dénominateur)

TRANSFORMÉE EN Z

EXEMPLE DE TRANSFORMÉE en Z (2)

Fonction Exponentielle

Soit la fonction $f(t) = a^t \mathcal{U}(t)$ et sa séquence numérique associée $\{a^n \mathcal{U}(n)\}$

$$F(z) = \mathcal{Z}[a^n \mathcal{U}(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \mathcal{U}(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1 - (\frac{a}{z})^n}{1 - \frac{a}{z}}$$

$$F(z) = \frac{z}{z - a} \quad (|z| > a)$$

Nota :

- Si $a < 1$ la TF existe $F(z = \exp(2j\pi\nu)) = \frac{\exp(2j\pi\nu)}{\exp(2j\pi\nu) - a}$
- La séquence numérique $\{a^n\}$ ne converge pas car on doit aussi considérer $\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = \sum_{m=1}^{\infty} a^{-m} z^m$ qui converge seulement pour $|z| < a$ ($R_+ = |a|$ et $R_- = |a|$)
- De même avec le même raisonnement, on a

$$\mathcal{Z}[\exp(\alpha n) \mathcal{U}(n)] = \frac{z}{z - \exp(\alpha)} \quad (|z| > \exp(\alpha))$$

Fonction Échelon Tronquée

Soit la TZ de $\{f(n) = 1_{\{0, \dots, N-1\}}(n)\}$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = 1 + z^{-1} + \dots + z^{-(N-1)}$$

qui converge $\forall z \neq 0$

TRANSFORMÉE EN Z

PROPRIÉTÉS DE LA TZ (1)

1. Linéarité

$$\mathcal{Z}[\lambda f(n) + \mu g(n)] = \lambda \mathcal{Z}[f(n)] + \mu \mathcal{Z}[g(n)]$$

- Rayon de Convergence (RDC) = $\text{RDC}_f \cap \text{RDC}_g$
- Montrer : $\mathcal{Z}[\{\cos(wn) \mathcal{U}(n)\}] = \frac{z^2 - z \cos w}{z^2 - 2z \cos w + 1}$ ($|z| > 1$)

2. Décalage dans le temps

$$\mathcal{Z}[f(n - m)] = \frac{1}{z^m} \mathcal{Z}[f(n)]$$

$$\mathcal{Z}[f(n + m)] = z^m \left[\mathcal{Z}[f(n)] - \sum_{p=0}^{m-1} f(p) z^{-p} \right]$$

$$\bullet \text{ Si } \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z - \frac{1}{4}}\right] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \mathcal{U}(n) \blacktriangleright \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z - \frac{1}{4}}\right] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \mathcal{U}(n-1)$$

$$\bullet \text{ On retiendra } \begin{cases} \mathcal{Z}[f(n+1)] = z(F(z) - f(0)) \\ \mathcal{Z}[f(n+2)] = z^2(F(z) - f(0) - \frac{1}{z}f(1)) \\ \mathcal{Z}[f(n-1)] = \frac{1}{z}F(z) \end{cases}$$

- **L'avance** se traduit par la multiplication par z
- **Le retard** se traduit par la division par z

TRANSFORMÉE EN Z PROPRIÉTÉS DE LA TZ (2)

3. Transformée de $\{a^n f(n)\}$

$$\mathcal{Z}\left[a^n f(n)\right] = F\left(\frac{z}{a}\right)$$

- On sait que $\mathcal{Z}\left[\{\cos(wn) \mathcal{U}(n)\}\right] = \frac{z^2 - z \cos w}{z^2 - 2z \cos w + 1}$ ($|z| > 1$)

Donc $\mathcal{Z}\left[\{a^n \cos(wn) \mathcal{U}(n)\}\right] = \frac{z^2 - a z \cos w}{z^2 - 2 a z \cos w + a^2}$ ($|z| > a$)

4. Transformée de $\{n f(n)\}$

$$\mathcal{Z}\left[n f(n)\right] = -z F'(z)$$

- On sait que $\mathcal{Z}\left[\{\mathcal{U}(n)\}\right] = \frac{z}{z-1}$ ($|z| > 1$)
d'où $\mathcal{Z}\left[\{n \mathcal{U}(n)\}\right] = -z \left(\frac{z}{z-1}\right)' = \frac{z}{(z-1)^2}$
- Plus généralement $\mathcal{Z}\left[n^k f(n)\right] = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^k F(z)$

5. Transformée du produit de convolution

$$f(n) * g(n) \quad \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} \quad F(z) \cdot G(z)$$

6. Théorème de la valeur initiale & finale

signal causal $\blacktriangleright \lim_{|z| \rightarrow \infty} F(z) = f(0)$
 $\lim_{|z| \rightarrow 1} (z-1) F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$

TRANSFORMÉE EN Z TRANSFORMÉE EN Z INVERSE (1)

La transformée en Z inverse est donnée par

$$\begin{aligned}
 f(n) &= \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz \\
 &= \sum_{z_i = \text{pôles de } z^{n-1} F(z)} \text{Res}\{z^{n-1} F(z)\}_{z=z_i}
 \end{aligned}$$

où C est un chemin fermé parcouru dans le sens anti-horaire et $\in \text{RDC}$. Dans le cas d'un signal causal, elle s'effectue à l'aide des résidus ou à l'aide de trois méthodes simples

1. Utilisation des Tables et des Propriétés

$$F(z) = \frac{0.5 z^{-1}}{(1 - 0.5 z^{-1})^2} \quad \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] ?$$

On utilise ce que l'on sait déjà à savoir

$$a^n \mathcal{U}(n) \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{1 - a z^{-1}} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}[n f(n)] = -z F'(z)$$

$$\text{donc} \quad n a^n \mathcal{U}(n) \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} \frac{a z^{-1}}{(1 - a z^{-1})^2}$$

$$\text{et} \quad \frac{0.5 z^{-1}}{(1 - 0.5 z^{-1})^2} \stackrel{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightleftharpoons} n (0.5)^n \mathcal{U}(n)$$

TRANSFORMÉE EN Z

TRANSFORMÉE EN Z INVERSE (2)

2. Décomposition en Fractions Simples

Principe : on décompose $F(z)$ en somme de fonctions simples et on prend la TZ inverse de chacun des éléments (propriété de linéarité de la TZ)

$F(z)$ peut tjs s'écrire avec $\deg[P_0(z)] < \deg[Q(z)]$

$$F(z) = S(z) + \frac{P_0(z)}{Q(z)}$$

- Lorsque les racines de $Q(z)$ (pôles) sont simples

$$\frac{P_0(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{z - p_i}$$

$$\text{avec } \alpha_i = (z - p_i) \left. \frac{P_0(z)}{Q(z)} \right|_{z=p_i}$$

- Lorsque un pôle p_n de $Q(z)$ est d'ordre $q > 1$

$$\frac{P_0(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{z - p_i} + \sum_{j=1}^q \frac{\beta_j}{(z - p_n)^j}$$

$$\text{avec } \beta_j = \frac{1}{(q-j)!} \left. \frac{d^{q-j}}{dz^{q-j}} \left[(z - p_n)^q \frac{P_0(z)}{Q(z)} \right] \right|_{z=p_n}$$

TRANSFORMÉE EN Z

TRANSFORMÉE EN Z INVERSE (3)

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} \\
 &= \frac{0.5}{(z^{-1} - 1)(z^{-1} - 0.5)} \\
 &= \frac{\alpha_1}{z^{-1} - 1} + \frac{\alpha_2}{z^{-1} - 0.5} \\
 &= \frac{1}{z^{-1} - 1} + \frac{-1}{z^{-1} - 0.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X(z) = \frac{-1}{1 - z^{-1}} + \frac{2}{1 - 2z^{-1}} &\stackrel{z^{-1}}{\rightleftharpoons} -\mathcal{U}(n) + 2 \times 2^n \mathcal{U}(n) \\
 &= (2^{n+1} - 1) \mathcal{U}(n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} \\
 &= 1 + \frac{3z - 2}{z^2 - 3z + 2} = 1 + \frac{3z - 2}{(z - 2)(z - 1)} \\
 &= 1 + \frac{\alpha_1}{z - 2} + \frac{\alpha_2}{z - 1} \\
 &= 1 + \frac{4}{z - 2} + \frac{-1}{z - 1} = 1 + \frac{4z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} + \frac{-z^{-1}}{1 - z^{-1}}
 \end{aligned}$$

$$X(z) \stackrel{z^{-1}}{\rightleftharpoons} \delta(n) + 4 \times 2^{n-1} \mathcal{U}(n-1) - \mathcal{U}(n-1)$$

TRANSFORMÉE EN Z

TRANSFORMÉE EN Z INVERSE (4)

3. Développement en série

[1]

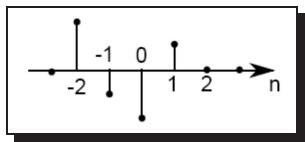
$$F(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \mathcal{Z}^{-1}[F(z)]?$$

En faisant une division longue, on obtient :

$$F(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots \stackrel{\mathcal{Z}^{-1}}{\Rightarrow} f(n) = a^n \mathcal{U}(n)$$

[2]

$$\begin{aligned} F(z) &= z^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) (1 + z^{-1}) (1 - z^{-1}) = z^2 - \frac{1}{2}z^1 - 1 + \frac{1}{2}z^{-1} \\ &\stackrel{\mathcal{Z}^{-1}}{\Rightarrow} \delta(n+2) - \frac{1}{2}\delta(n+1) - \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1) \end{aligned}$$



[3]

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z}{z^2 - 3z + 2} \\ &= z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + 31z^{-5} + \dots \end{aligned}$$

Dans ce cas où le quotient est une somme infinie de termes, on peut reconnaître que le terme général est

$$f(n) = (2^n - 1) \mathcal{U}(n)$$

mais pas toujours aussi évident !

[4]

$$\begin{aligned} F(z) &= \exp(z^{-1}) (1 + z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} z^{-n} \\ &\stackrel{\mathcal{Z}^{-1}}{\Rightarrow} f(n) = \frac{n+1}{n!} \mathcal{U}(n) \end{aligned}$$

TRANSFORMÉE EN Z

APPLICATION DE LA TZ (1)

Équations aux différences

On appelle équation aux différences linéaire, du N -ième ordre, une équation de la forme

$$y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n+k) = x(n) + \sum_{k=1}^M b_k x(n+k)$$

Dans laquelle $x = \{x(n)\}$ est donnée et $y = \{y(n)\}$ est inconnu. Les N premiers termes de la suite sont données

Exemple -1-

$$\begin{cases} 2y(n+1) + y(n) = n & n \in \mathbb{N}^+ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$2y(n+1) + y(n) = n \stackrel{z}{\Leftrightarrow} (2z+1)Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{(2z+1)(z-1)^2} \\ &= \frac{z}{2} \left[\frac{1}{(z+0.5)(z-1)^2} \right] \\ &= \frac{z}{2} \left[\frac{\frac{4}{9}}{(z+0.5)} + \frac{\frac{2}{3}}{(z-1)^2} + \frac{-\frac{4}{9}}{(z-1)} \right] \\ &= \frac{\frac{2}{9}z}{(z+0.5)} + \frac{\frac{1}{3}z}{(z-1)^2} + \frac{-\frac{2}{9}z}{(z-1)} \end{aligned}$$

$$Y(z) \stackrel{z^{-1}}{\Leftrightarrow} y(n) = \frac{1}{9} \left[3n - 2 + 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right] \mathcal{U}(n)$$

TRANSFORMÉE EN Z

APPLICATION DE LA TZ (2)

Exemple -2-

Soit l'équation récurrente, du 2nd ordre, suivante

$$\begin{cases} f(n+2) = f(n+1) + f(n) & n \in \mathbb{N}^+ \\ f(0) = f(1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(n+2) &= f(n+1) + f(n) \\ &\Downarrow \mathcal{Z} \\ z^2(F(z) - 1 - z^{-1}) &= z(F(z) - 1) + F(z) \\ F(z) &= \frac{z^2}{z^2 - z - 1} \\ &= 1 + \left[\frac{z+1}{(z-z_0)(z-z_1)} \right] \\ &= 1 + \left[\frac{1}{(z-z_0)} + \frac{1}{(z-z_1)} \right] \\ &= \end{aligned}$$

$$z_{0,1}^* = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad z_0 - z_1 = \sqrt{5} \quad z_1 - z_0 = -\sqrt{5}$$

TRANSFORMÉE EN Z APPLICATION DE LA TZ (3)

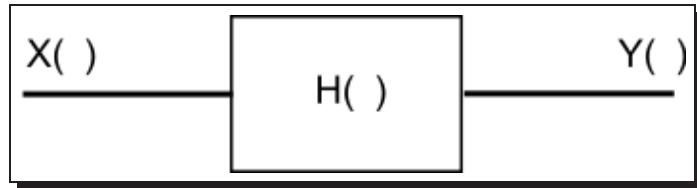
Fonction de transfert

Un cas particulier des équations aux différences est

$$y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = x(n)$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}$$

$$Y(z) \left[1 + \sum_{k=1}^N a^k z^{-k} \right] = X(z)$$



La fraction rationnelle $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ est la fonction de transfert, qui dans le domaine fréquentiel, réalise l'opération de filtrage fréquentiel

$$Y(z) = H(z) X(z)$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

- **Un filtrage temps-réel peut donc se définir par une équation récurrente (ou récursive)**
- **La valeur des coefficients de ce filtre fixera le type de filtre, passe-bas, passe-haut, passe-bande, rejecteur de fréquence, etc.**

TRANSFORMÉE EN Z REPRÉSENTATION PAR PÔLES ET ZÉROS

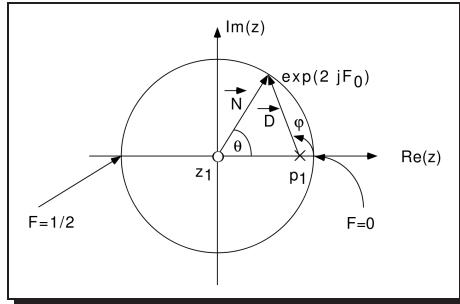
Une fonction de transfert (FT) peut se noter

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = A \frac{\prod_{m=1}^M (z - z_m)}{\prod_{n=1}^N (z - p_n)}$$

Exemple :

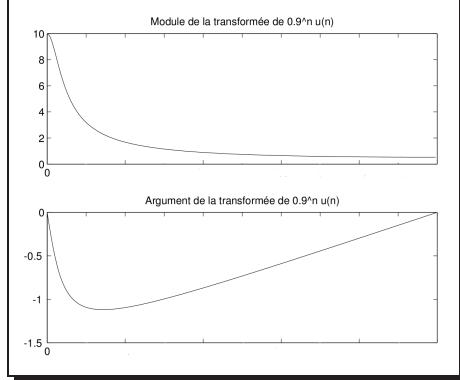
$$H(z) \text{ définie par } \{z_1 = 0 ; p_1 = a\} \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z - a}$$

Rappelons qu'une TFD requiert d'évaluer la TZ sur $|z| = 1$ en une fréquence F_0 , i.e., en $z = \exp(2\pi jF_0)$



- **Le module de la TF est donné par $\|\vec{N}\|/\|\vec{D}\|$**
où \vec{N} et \vec{D} sont 2 vecteurs représentant le numérateur et le dénominateur de cette FT

- **L'argument est la différence entre les θ et Φ**



TRANSFORMÉE EN Z

TABLE

	$x(n)$	$X(z)$
	Impulsion $x(n) = \delta(n)$	1
	Echelon unité $x(n) = u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$
	Rampe $x(n) = n.u(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{z}{(z - 1)^2}$
	« Exponentielle » $x(n) = a^n.u(n)$	$\frac{1}{1 - a.z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$
	$(1 - a^n).u(n)$	$\frac{(1 - a).z^{-1}}{(1 - z^{-1}).(1 - a.z^{-1})} \\ = \frac{(1 - a).z}{(z - 1).(z - a)}$
	$n.a^n.u(n)$	$\frac{a.z^{-1}}{(1 - a.z^{-1})^2} = \frac{a.z}{(z - a)^2}$
	Sinus $[\sin(n.\omega_0.T_E)].u(n)$	$\frac{\sin(\omega_0.T_E).z^{-1}}{1 - 2.\cos(\omega_0.T_E).z^{-1} + z^{-2}} \\ = \frac{\sin(\omega_0.T_E).z}{z^2 - 2.\cos(\omega_0.T_E).z + 1}$
	Cosinus $[\cos(n.\omega_0.T_E)].u(n)$	$\frac{1 - \cos(\omega_0.T_E).z^{-1}}{1 - 2.\cos(\omega_0.T_E).z^{-1} + z^{-2}} \\ = \frac{z^2 - \cos(\omega_0.T_E).z}{z^2 - 2.\cos(\omega_0.T_E).z + 1}$
	Oscillations amorties $a^n.[\sin(n.\omega_0.T_E)].u(n)$	$\frac{a.\sin(\omega_0.T_E).z^{-1}}{1 - 2.a.\cos(\omega_0.T_E).z^{-1} + a^2.z^{-2}} \\ = \frac{a.\sin(\omega_0.T_E).z}{z^2 - 2.a.\cos(\omega_0.T_E).z + a^2}$
	$a^n.[\cos(n.\omega_0.T_E)].u(n)$	$\frac{1 - a.\cos(\omega_0.T_E).z^{-1}}{1 - 2.a.\cos(\omega_0.T_E).z^{-1} + a^2.z^{-2}} \\ = \frac{z^2 - a.\cos(\omega_0.T_E).z}{z^2 - 2.a.\cos(\omega_0.T_E).z + a^2}$