



DIRO
IFT 3205

DÉMONSTRATION N° 1

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384.

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Séries de Fourier

Rappel

Soit f une fonction périodique de période $T = 2\pi/w = 1/f_0$, intégrable, on appelle série de Fourier de f , la série trigonométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nwx) + b_n \sin(nwx)$$

Dont les coefficients sont donnés par les formules (Δ étant un intervalle dans lequel il y a une période du signal)

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{\Delta} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\Delta} f(x) \cos(nwx) dx$$

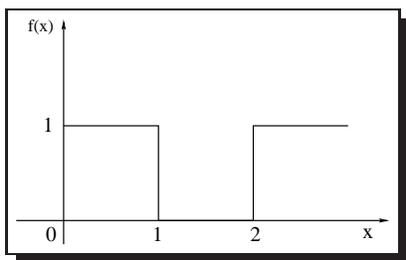
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\Delta} f(x) \sin(nwx) dx$$

I.

Donner le développement en série de Fourier de $f_1 = \cos^3(x)$ et montrer qu'il ne comporte qu'un nombre fini de termes. Aurait on pu prévoir le fait que cette décomposition comportait un nombre fini de terme à l'avance?

II.

Soit la fonction f_2 , de période $T = 2$ définie sur $]0, 2[$ par :



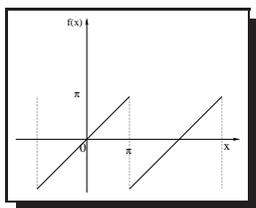
$$\begin{aligned} f_2(x) &= 1 & \text{si } x \in]0; 1] \\ f_2(x) &= 0 & \text{si } x \in]1; 2] \end{aligned}$$

1. Trouvez son développement en série de Fourier.
2. Quel est la valeur de cette série de Fourier en $x = 0.5$ et $x = 1$?
3. En déduire que

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$$

III.

Soit la fonction f_3 , de période $T = 2\pi$ définie par :

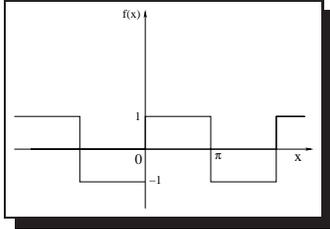


$$f_3(x) = x \quad \text{si } x \in]-\pi; +\pi]$$

1. Trouvez son développement en série de Fourier.
 2. Comparer l'amplitude de l'harmonique de rang $n = 11$ pour ce signal et le précédent.
-

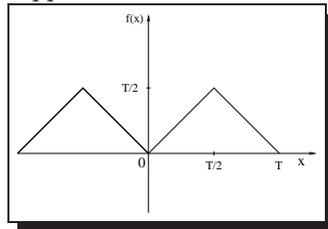
IV.

On a vu en cours que la fonction “onde carré” (que l’on appellera mathématiquement dans cette question f_4) de période 2π avait pour développement en série de Fourier



$$f_4(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1}$$

1. Tracer la représentation spectrale de la fonction f_4 .
2. Sans regarder le résultat de l'exercice 2 et sans rien calculer, tracer la représentation fréquentielle du signal représenté par la fonction f_2 .
3. Sans calculer d'intégrales, trouver le spectre de raies associé au signal représenté par la fonction f_5 donné par la figure suivante et son développement en série de Fourier.



Présentation de quelques applets

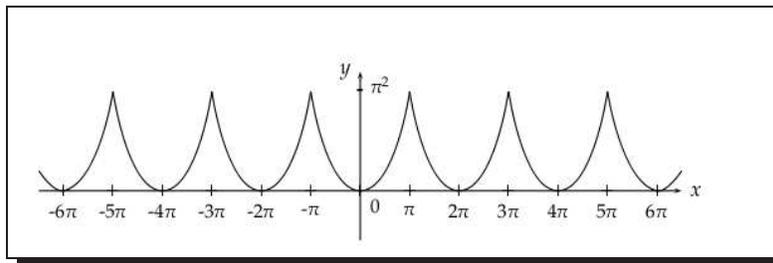
Nota :

Faites les deux exercices suivants si vous avez fait, avec facilité, les exercices précédents. Ces deux derniers exercices sont donc donnés à titre indicatif mais seront considérés comme hors programme.

V.

Soit la fonction 2π -périodique f_6 telle que :

$$f(x) = x^2 \quad \text{si } x \in]-\pi, \pi]$$



1. Trouvez $S(x)$, son développement en série de Fourier
2. A t-on en tout point $f_6(x) = S(x)$? justifier.
3. Comparer l'amplitude de l'harmonique de rang $n = 11$ pour ce signal et celui de f_2 .
4. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

5. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

6. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

VI.

Soit la fonction 2π -périodique f_7 telle que :

$$f(x) = |\sin x|$$

1. Trouvez $S(x)$ son développement en série de Fourier
2. En déduire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$
