DIRO
IFT 3205

APPLET DÉMO N° 1

Max Mignotte

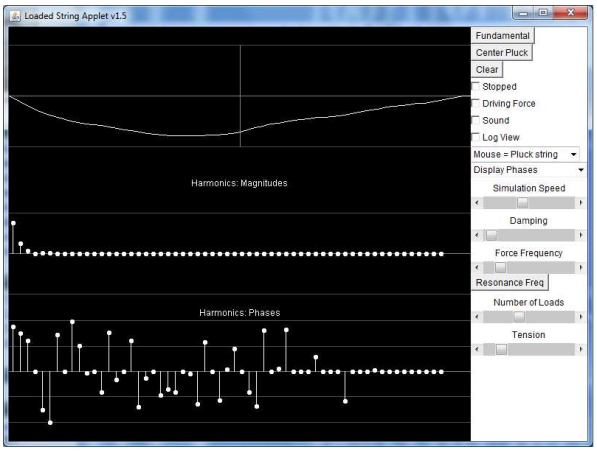
DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift3205
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

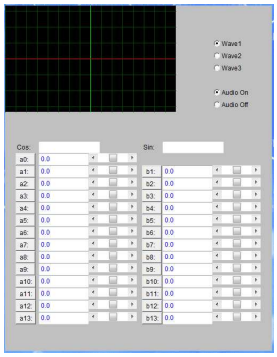
Applets : Séries de $\mathcal{F}$ourier

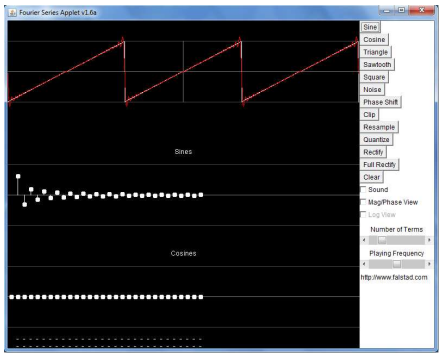
Quel est l'intérêt de la série de Fourier ?

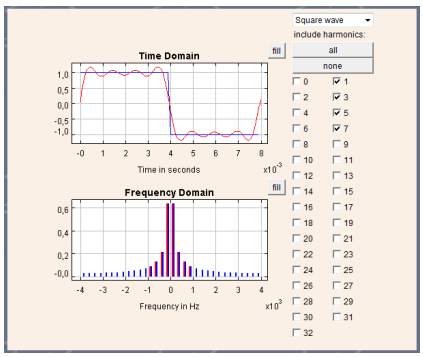
Pour 2 raisons majeures :

1. La base de Fourier est en fait bien adaptée pour étudier les phénomènes oscillatoires et ces derniers sont abondants dans la vie de tous les jours. Par exemple, le mouvement d'un camion sur un pont génère des vibrations dans toute la structure de ce dernier ; le mouvement des pistons dans le moteur met la voiture en vibration ; une onde électromagnétique provoque l'oscillation des électrons à la surface du métal, etc. Nous ne pourrions pas traiter ces problèmes si nous ne disposions pas de la base de Fourier. Expliquons plus précisement pourquoi. Soit une fonction f périodique, de période L. Cela veut dire que $f(x+L) = f(x)$. Pour connaître cette fonction, il suffit donc de connaître sa valeur seulement sur un intervalle de longueur L. Or, les fonctions $\sin(2nx\pi L)$ et $\cos(2nx\pi L)$ sont également périodique, et de même période L. Donc, si une somme de ces fonctions, comme la série de Fourier égale la fonction f sur une intervalle de longueur L, elle égale la fonction f partout !
2. Le principe de base, à savoir que n'importe quel signal (périodique) se décompose à partir de fonctions élémentaires de base est tout à fait adapté au principe de superposition qui régit tout système linéaire comme le filtrage. En d'autres termes, si on sait décomposer une excitation en une somme de fonctions simples, il sera éventuellement possible de calculer la réponse correspondante en additionnant des réponses individuelles calculables explicitement. Cette propriété mathématique rend la résolution des équations de modélisation et de filtrage plus simple que de nombreux systèmes non linéaires.









1. ## Vocabulaire

Visualisation du **spectre** d'une Fonction Périodique et vocabulaire associé.

   (a) Ce **spectre de raies** qui est un **spectre discret** ou échantillonné à pour nom aussi **spectre en fréquence**, **représentation fréquentielle**, **représentation en série de Fourier**, **analyse spectrale**, **analyse harmonique**, etc. ...

   (b) En abscisse, on a la **fréquence** et en ordonnée, l'**amplitude**, la **magnitude** ou le **module** des coefficients de la série de Fourier (i.e., pour une représentation physique ; les $(c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \theta_n)$ et pour une représentation mathématique, les (a_n, b_n).

   (c) Chaque raie spectrale étant séparée de la **résolution fréquentielle** Δf_0, la première fréquence centrée sur la fréquence 0 est la **composante continue** ou la **valeur moyenne** du signal, la seconde raie, centrée sur la fréquence f_0 est appelée la **fréquence fondamentale** ou **le fondamental** ou la **fréquence de base** et les autres sont les **fréquences harmoniques**.

2. ## Propriétés

   (a) Fonction périodique $\Leftrightarrow$ spectre discret fait de raies.

   (b) Décroissance de l'amplitude des raies spectrales (le plus souvent en f^{-1} ou f^{-2}).

   (c) Fonction paire $\Leftrightarrow$ développement en cosinus.

   (d) Fonction impaire $\Leftrightarrow$ développement en sinus.

   (e) Fonction avec des discontinuités $\Leftrightarrow$ décroissance lente de l'amplitude des raies spectrales et/ou présence de coefficients avec de fortes amplitudes pour des fréquences élevées (on dit que le signal $f(.)$ comporte des hautes fréquences spatiales $(f(x))$ ou temporelles $(f(t))$ et inversement pour un signal smooth, lisse, sans discontinuité, sans transition abruptes.

3. ## Reconstruction D'un Signal

   (a) Verifier que la distribution de dirac demande une infinité d'harmoniques (avec une amplitude identique) pour sa reconstruction.

4. ## Principe du Filtrage

   (a) Amplification, atténuation, annulation d'**une** ou d'**un groupe** de ses fréquences de bases à partir d'une certaine fréquence donnée ou pour un ensemble de fréwquences dont l'amplitude est au dessous d'un certain seuil.

   (b) Présence ou absence d'**une** ou d'**un groupe** de ses fréquences de bases (éventuellement relativement à un autre groupe de fréquence).

5. ## Traitement Du Son

   (a) Beaucoup d'harmoniques $\Leftrightarrow$ son riche, complexe.

(b) Constitué d'une seule fréquence ⇔ son uni-fréquence, de fréquence (ou de vibration) pur.

(c) i. Ce qui distingue le Do 240 Hz du piano de la même note d'une flûte n'est pas leurs fréquence de base, mais l'amplitude de leurs harmoniques (la forme de leur spectre). On appelle cela le **timbre** d'un instrument. Plus précisement, puisque ces harmoniques évoluent avec le temps, le **timbre** d'un instrument est identifiable par l'harmonicité de son spectre et l'évolution temporelle de ses harmoniques.

ii. L'oreille à une capacité fantastique à distinguer les timbres, et les meilleurs synthétiseurs doivent sommer plus d'une vingtaine d'harmoniques pour pouvoir imiter une note d'un vrai instrument. L'oreille humaine d'ailleurs ne fait que décomposer les sons en leurs harmoniques : la forme intérieure de l'oreille fait qu'une vibration pure (sinusoïdale) de fréquence donnée met une région particulière de l'oreille en oscillation, ce qui stimule les neurones à cet endroit. Chaque harmonique d'un son excite donc une région différente de l'oreille, et la carte de ces régions permet au cerveau de déterminer très précisément la nature du son et distinguer ainsi le piano du violon.

iii. Plus les fréquences de ces harmoniques sont proches des multiples entiers de la fréquence fondamentale, plus le son est pur ou harmonique (clavecin). Plus elles s'éloignent des multiples entiers, plus le son est inharmonique (piano, cloche).

(d) La **hauteur** d'un son correspond entre autres à sa vitesse de vibration. Il s'agit, en termes scientifiques, de la fréquence sonore (nombre de vibrations périodiques par seconde) que l'on mesure en hertz. Plus la vibration est rapide, plus le son est dit aigu ; au contraire, plus la vibration est lente, plus le son est dit grave.

(e) Une **note de musique** est donc caractérisée entre autres par sa hauteur et cette hauteur est reliée à la fréquence fondamentale du son qu'elle représente. On peut calculer la fréquence des notes avec la formule suivante

$$f = \text{ref} \times 2^{(\text{octave}-3)+\frac{\text{ton}-10}{12}}$$

où *octave* et *ton* sont des nombres entiers, et *ref* la fréquence de référence. Les constantes 3 et 10 de la formule permettent de choisir *ref* comme étant le La à 440 Hz de l'octave 3, on s'accorde ainsi avec la norme fixée par la conférence internationale de Londres en 1953, et on peut ainsi déterminer précisément les autres fréquences pour les tons de 1 à 12 soit de Do à Si.

6. Série de Fourier ⇒ Transformée de Fourier

(a) Rappel : La série de Fourier ne s'applique qu'au signaux périodiques.

(b) Un signal périodique de période T à comme représentation spectrale, un spectre de raies dont les raies spectrales sont séparées de $1/T = f_0$.

(c) Un signal quelconque, i.e., non périodique, peut être vue comme un signal périodique de période T tendant vers l'∞ (ce signal se répète donc après une période $T = \infty$, c'est à dire jamais !). De ce fait, plus un signal aura une période T grande, plus ses raies spectrales seront rapprochées. Quand $T \to \infty$, ses raies seront séparées de $f_0 = 1/T \to 0$. A la limite, pour un signal pour lequel $T \to \infty$ (signal non périodique), les raies spectrales de son spectres se toucheront, et une continuité va se créer. Donc, pour un signal non périodique ⇔ spectre continue.

(d) Inversement, un signal non périodique peut se reconstruire à partir d'une somme pondérée de signaux sinusoidaux de bases dont les fréquences ne sont plus des multiples d'une fréquence de base mais sont toutes les fréquences continues existantes.

(e) On a donc les deux relation suivantes importantes

- signal périodique ⇔ spectre discret.
- signal non périodique ⇔ spectre continue.