



DIRO
IFT 3205

DÉMONSTRATION N° 1

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384.

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Séries de Fourier

Rappel

Soit f une fonction périodique de période $T = 2\pi/w = 1/f_0$, intégrable, on appelle série de Fourier de f , la série trigonométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nwx) + b_n \sin(nwx)$$

Dont les coefficients sont donnés par les formules (Δ étant un intervalle dans lequel il y a une période du signal)

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{\Delta} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\Delta} f(x) \cos(nwx) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\Delta} f(x) \sin(nwx) dx$$

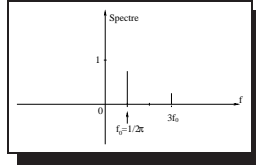
I.

Donner le développement en série de Fourier de $f_1 = \cos^3(x)$ et montrer qu'il ne comporte qu'un nombre fini de termes. Aurait on put prévoir le fait que cette décomposition comportait un nombre fini de terme à l'avance ?

Réponse

On peut bien sûr se lancer dans des calculs ... On peut ! Mais rappelons que la décomposition en série de Fourier consiste à représenter une fonction périodique comme étant une somme des fonctions périodiques les plus élémentaires possibles (à savoir les sinus et les cosinus, i.e., les fonctions de fréquences pures). Alors en se souvenant de cela, la décomposition en série de Fourier de $\cos(2x)$ est ... $\cos(2x)$. Bien sur, cela aussi se vérifie avec les calculs intégrales. Dans ce sens il suffit de linéariser $f_1 = \cos^3(x)$ pour trouver sa série de Fourier et on peut donc prévoir à l'avance que cette série comportera un nombre fini de terme. On linéarise donc $f_1 = \cos^3(x)$

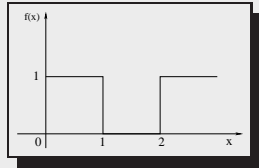
$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \cos(x) \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right) = \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{1}{4} (\cos(3x) + \cos(x)) \\ &= \frac{3}{4} \cos(x) + \frac{1}{4} \cos(3x)\end{aligned}$$



Remarque : Comme la fonction $f_1 = \cos^3(x)$ est relativement lisse (i.e., smooth) sans discontinuité, on pouvait prévoir qu'elle ne comporterait pas beaucoup de termes d'harmoniques (elle en a qu'un) et/ou que ceux ci s'atténueraient rapidement. N'oubliez pas aussi que $\cos x = \cos 2\pi f_0 x$ pour f_0 , la fréquence du fondamentale, $f_0 = 1/2\pi$.

II.

Soit la fonction f_2 , de période $T = 2$ définie sur $]0, 2[$ par :



$$\begin{aligned}f_2(x) &= 1 \quad \text{si } x \in]0; 1] \\ f_2(x) &= 0 \quad \text{si } x \in]1; 2]\end{aligned}$$

1. Trouvez son développement en série de Fourier.
2. Quel est la valeur de cette série de Fourier en $x = 0.5$ et $x = 1$?
3. En déduire que

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$$

Réponse

1

$T = 2$, donc $w = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 f_2(x) dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f_2(x) \cos(n\pi x) dx = \int_0^1 \cos(n\pi x) dx = \left[\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f_2(x) \sin(n\pi x) dx = \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = \left[\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi}$$

On a donc, pour les n paires, $b_n = 0$ et pour les n impaires, $b_n = \frac{2}{n\pi}$, ce qui se traduit par $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2p+1}$ et la série suivante

$$f_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin[(2p+1)\pi x] = S(x)$$

Remarque : On peut comparer avec la fonction que l'on a décomposé en série de Fourier dans le cours. On obtient ici presque les mêmes coefficients de série de Fourier :

1. Mis à part pour la valeur du coefficient a_0 qui correspond à la composante continue du signal ou sa valeur moyenne ; ce qui est normale puisque la fonction est de la même forme mais a une valeur moyenne différente dans les deux cas.
2. Les autres coefficients sont divisés par un facteur deux dans ce cas ; ce qui est normale puisque ici, l'amplitude est deux fois plus petite (du à la propriété de conservation de l'énergie dans les deux espaces).
3. On peut remarquer que malgré le fait que la fonction f_2 n'est pas impair, les a_n sont ici pourtant nulles. En fait, la fonction f_2 est bien impair à une constante près ! on aurait pu donc prévoir à l'avance que les a_n allaient être nulles !

2

En $x = 0.5$, f_2 est continue et donc la valeur de convergence de la série obtenue est 1. $x = 1$ correspond à un point de discontinuité de la fonction f_2 et donc la valeur de convergence de la série est, par définition, (cf. cours)

$$S(x=1) = \frac{1}{2} (f_2(1-) + f_2(1+)) = 0.5$$

3

On a obtenu précédemment $S(x = \frac{1}{2}) = 1$ et donc on en déduit

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin[(2p+1)\frac{\pi}{2}] = S(x = \frac{1}{2}) = 1$$

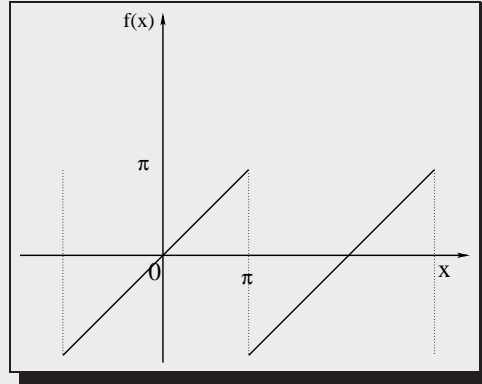
$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin[(2p+1)\frac{\pi}{2}] = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$$

¹Dans la suite, on va souvent utiliser le fait que $\sin(n\pi) = 0$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin[(2p+1)\frac{\pi}{2}] = (-1)^p$

III.

Soit la fonction f_3 , de période $T = 2\pi$ définie par :



$$f_3(x) = x \quad \text{si } x \in] -\pi; +\pi]$$

1. Trouvez son développement en série de Fourier.
2. Comparer l'amplitude de l'harmonique de rang $n = 11$ pour ce signal et le précédent.

Réponse**1**

La fonction f_3 est impaire et se développe donc en série de sinus, de plus $w = 2\pi/T = 1$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \cos(nx) dx}_{=0 \quad \text{car } \sin(n\pi)=0} \\ &= \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

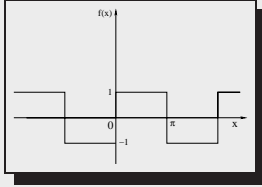
$$f_3(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}$$

2

L'amplitude de l'harmonique de rang $n = 11$ pour ce signal est donc $c_n = 2/11 \approx 0.18$. Pour le signal précédent l'amplitude de l'harmonique de même rang $n = 11$ était $c_n = 2/11\pi \approx 0.028$. Ces harmoniques vont tout les deux décroître en n^{-1} (et pour un signal discontinu, c'est souvent le cas) mais dans le signal précédent, un sur deux avait une amplitude nulle (donc dans ce cas, on a une richesse d'harmoniques beaucoup plus grande).

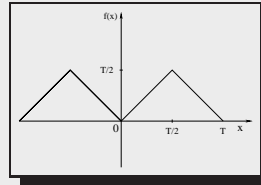
IV.

On a vu en cours que la fonction “onde carré” (que l’on appellera mathématiquement dans cette question f_4) de période 2π avait pour développement en série de Fourier



$$f_4(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1}$$

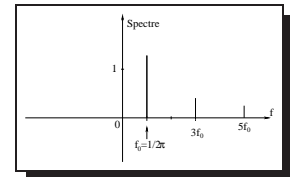
1. Tracer la représentation spectrale de la fonction f_4 .
2. Sans regarder le résultat de l’exercice 2 et sans rien calculer, tracer la représentation fréquentielle du signal représenté par la fonction f_2 .
3. Sans calculer d’intégrales, trouver le spectre de raies associé au signal représenté par la fonction f_5 donné par la figure suivante et son développement en série de Fourier.



Réponse

1

On obtient un spectre de raies d’amplitudes respectivement $4/\pi$, $4/3\pi$, $4/5\pi$, $4/7\pi$, espacées à partir de la fréquence fondamentale $f_0 = 1/2\pi$ de $2f_0$.



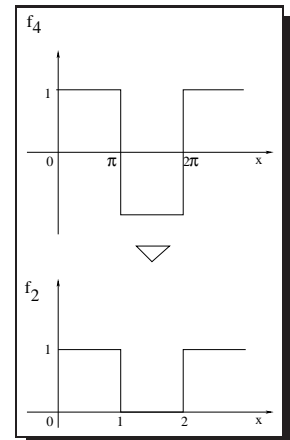
2

On peut constater que f_4 et f_2 est le même signal avec cependant 3 différences

1. Une valeur moyenne non nulle pour f_2 égale à $\frac{1}{2}$.
2. Le signal est contracté de π pour f_2 (comparativement à f_4).
3. Le signal est d’amplitude deux fois plus petite pour f_2 (comparativement à f_4).

Le spectre de f_2 (appelons le F_2 , et comparativement à F_4 , le spectre de f_4) aura donc les caractéristiques suivantes :

1. Une raie spectrale supplémentaire en $f = 0$ égale à la valeur moyenne du signal f_2 , i.e., d’amplitude $\frac{1}{2}$.
2. Un axe des abscisses, pour F_2 , dilaté de π (car tout ce qui est contracté dans le domaine spatial est dilaté dans le domaine spectral) et donc les raies seront centrées sur des multiples impairs de la fréquence $1/2$ (i.e., $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, etc.).
3. Les coefficients pour les autres raies (autre que celle centrée en $f = 0$, correspondant à la valeur moyenne du signal) seront d’amplitude deux fois plus petite (pour tenir compte que f_2 est d’amplitude deux fois plus petite que f_4 et ainsi pour conserver la même énergie dans les deux espaces).



3

Rappelons que, pour f_4 , nous avons un spectre de raies (espacé à partir de $f_0 = 1/2\pi$) d'amplitudes

$$f_4(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1}$$

ou pour le même signal de période $T (= 2\pi/w)$, un spectre de raies (espacé à partir de $f_0 = 1/T$) d'amplitudes

$$f_4(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\sin[(2p+1)wx]}{2p+1}$$

f_5 est simplement le signal qui résulte de l'intégration de f_4 et on trouve donc

$$f_5(x) = C^{\text{st}} - \frac{4}{w\pi} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\cos[(2p+1)wx]}{(2p+1)^2}$$

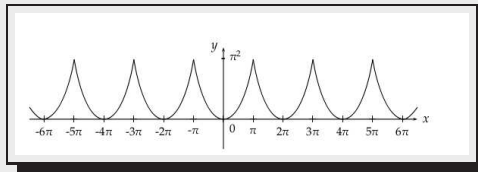
avec C^{st} , une constante qui correspond à la valeur moyenne (i.e., composante continue) du signal égale à $T/4$ (i.e., l'aire moyenne du signal f_5 sous une période T). On trouve finalement (avec $w = 2\pi/T$)

$$f_5(x) = \frac{T}{4} - \frac{4}{w\pi} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\cos[(2p+1)wx]}{(2p+1)^2}$$

V.

Soit la fonction 2π -périodique f_6 telle que :

$$f(x) = x^2 \quad \text{si } x \in]-\pi, \pi]$$



1. Trouvez $S(x)$, son développement en série de Fourier.
2. A t-on en tout point $f_6(x) = S(x)$? justifier.
3. Comparer l'amplitude de l'harmonique de rang $n = 11$ pour ce signal et celui de f_2 .

4. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

5. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

6. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Réponse

1

f_6 est paire et donc tous les b_n sont nuls. Trouvons tout d'abord a_0 , la valeur moyenne de f_6 (composante continue du signal associé à f_6)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

Sachant que $w = 2\pi/T = 2\pi/2\pi = 1$, en utilisant une double intégration par partie

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\underbrace{\left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi}}_{=0 \text{ (sin}(n\pi)=0)} - \int_0^{\pi} \frac{2x \sin(nx)}{n} dx \right) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = -\frac{4}{n\pi} \left(\underbrace{\left[\frac{x \cos(nx)}{-n} \right]_0^{\pi}}_{=0 \text{ (sin}(n\pi)=0)} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx \right) \\ &= \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

2

Oui car f_6 est continue, donc on a bien l'égalité

$$S(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = f_6(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3

L'amplitude de l'harmonique de rang $n = 11$ pour ce signal est donc $c_n = 4/(11^2) \approx 0.009$. Pour le signal f_1 , l'amplitude de l'harmonique de même rang $n = 11$ était $c_n = 2/21\pi \approx 0.03$. Les harmoniques de ce signal vont décroître en n^{-2} tandis que les harmoniques de f_1 vont décroître en n^{-1} . **L'absence de discontinuité dans ce signal permettra de le reconstruire en série de Fourier (et pour une erreur donnée) avec un nombre d'harmoniques moins important.** Rappelez vous que plus le signal présente des discontinuités; plus il faut des harmoniques de hautes fréquences (i.e., des amplitudes c_n importantes associées à ces harmoniques) pour reconstruire le signal. Dans ce cas, on dit que le signal possède des hautes fréquences (spatiales).

4

On a $S(x) = f_6(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a donc $S(0) = f_6(0)$, ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} &= -\frac{\pi^2}{3} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

5

Pour $x = \pi$, on a $S(\pi) = f_6(\pi)$, ce qui nous permet d'écrire (puisque $\cos(n\pi) = (-1)^n$)

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \pi^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

6

En moyennant les deux dernières séries, on obtient

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{6} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

VI.

Soit la fonction 2π -périodique f_7 telle que :

$$f(x) = |\sin x|$$

1. Trouvez $S(x)$, son développement en série de Fourier.
2. En déduire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

Réponse

1

Puisque f_7 est paire, son développement en série de Fourier est un développement en série de cosinus seulement, donc $b_n = 0, \forall n$, et

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{\pi} \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

En fait la fonction est périodique de période π et donc $w = 2\pi/T = 2\pi/\pi = 2$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin x| \cos(2nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(2nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\sin[(2n+1)x] + \sin[(1-2n)x] \right] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos[(2n+1)x]}{(2n+1)} + \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{(2n+1)} + \frac{(-1)}{(2n-1)} + \frac{1}{(2n+1)} - \frac{1}{(2n-1)} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2n-1-2n-1+2n-1-2n-1}{4n^2-1} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-4}{4n^2-1} \right) \end{aligned}$$

f_7 est continue, donc on a bien l'égalité, en tout point

$$S(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(4n^2 - 1)} = f_7(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2

Si on remplace x par 0 dans la dernière égalité, on obtient

$$\begin{aligned} S(0) &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)} = 0 \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

²Pour l'exercice 6, première question, on doit utiliser la formule trigonométrique $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$