



DIRO
IFT 3205

DÉMONSTRATION N° 2

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384.

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Transformée de Fourier

Rappel

On appelle Transformée de Fourier de f (pour une fonction f absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 , i.e., dérivable en tout point sauf pour un nombre fini de point), la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x) dx \quad \nu \in \mathbb{R}$$

I.

1. Si $\mathcal{F}(f) = F$, on démontre que, sous réserve de convergence des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Cette formule est la formule de Parseval qui traduit la conservation de l'énergie dans la Transformée de Fourier. En utilisant cette propriété, calculer l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$$

2. Utiliser la transformée de Fourier de la fonction $\Pi(x)$ pour trouver les transformées de

$$\Pi\left(\frac{x-1}{2}\right) \quad \text{et} \quad x\Pi(x)$$

II.

1. Soit une fonction $f(x) = \exp(-\pi x^2)$. De quelle famille appartient cette fonction ? Vérifier que $f(x)$ est solution de l'équation différentielle suivante

$$f'(x) + 2\pi x f(x) = 0 \tag{1}$$

Que devient l'équation (1) si on lui applique la transformée de Fourier $\mathcal{F}$? En déduire $F(\nu)$ à une constante (C^{st}) multiplicative près en résolvant cette équation différentielle. A quelle valeur de ν ($F(\nu = ?)$) correspond l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi x^2) dx$? Pour trouver finalement cette constante, C^{st} , utiliser le fait que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi x^2) dx = 1$.

2. En utilisant le fait que $\mathcal{F}[\exp(-\pi x^2)] = \exp(-\pi \nu^2)$ et que $\exp(-\pi x^2)$ est paire, calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{+\infty} (\exp(-\pi x^2)) \cos(2\pi x) dx \tag{2}$$

III.

1. Trouver la Transformée de Fourier de la fonction Gaussienne, d'écart type σ , $\mathcal{N}_\sigma(x)$,

$$\mathcal{N}_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

en vous servant de l'invariance par Transformée de Fourier de la fonction $\exp(-\pi x^2)$ et des propriétés de cette Transformée.

2. Trouver la Transformée de Fourier de $(\mathcal{N}_{\sigma_1}(x) * \mathcal{N}_{\sigma_2}(x))$ où “*” désigne l’opérateur de convolution.
 3. Trouver l’expression analytique de la fonction $(\mathcal{N}_{\sigma_1}(x) * \mathcal{N}_{\sigma_2}(x))$ (dans le domaine spatial). En déduire quelle est le filtrage spatial équivalent à deux filtrage spatial Gaussiens d’écart type $\sigma = 1$.
-

IV.

1. Soit la fonction $f(x)$, définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Calculer $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$, i.e., la transformée de Fourier de $f(x)$ et mettre le résultat de cette transformée de façon à faire apparaître la partie réelle et la partie imaginaire de $F(\nu)$.

2. Trouver le module et la phase (ou l’argument) de $F(\nu)$ (i.e., $|F(\nu)|$ et $\Phi(\nu) = \arg(F(\nu))$) et tracer grossièrement l’allure de $|F(\nu)|$.
 3. Si on considère que le spectre d’amplitude est nulle lorsque son amplitude est inférieure à 1 % de sa valeur max, avec quelle période d’échantillonnage T_e maximale (approximatif) peut on échantillonner $f(x)$?
 4. Que peut on dire des propriétés de la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = \exp(-a|x|)$ (sans la calculer). Calculer ensuite cette TF. Aurait on obtenu la même chose si on avait calculé $\mathcal{F}^{-1}[f(x)]$ au lieu de $\mathcal{F}[f(x)]$. Expliquer pourquoi.
 5. En utilisant une propriété de la TF et en utilisant une propriété liée à la symétrie de $\mathcal{F}[f(x)]$ calculé à la question précédente, en déduire la Transformée de Fourier de la fonction $g(x) = \frac{2}{1+4\pi^2 x^2}$.
-

V.

1. (a) Soit la fonction $h(x)$, définie par

$$h(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{si } x \geq 0 \\ \exp(+x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Que peut on dire, sans avoir besoin de calculer quoi que ce soit, sur les propriétés de $H(\nu)$ (la transformée de Fourier de $h(x)$) ? (e.g., éventuelles symétries, fonction réelle ou complexe, etc.)

- (b) Si on convoluait un signal $f(x)$ par $h(x)$, (i.e., si on considèrait $h(x)$ comme étant une PSF (Point Spread Function)). Quelle opération réaliserait on ? (filtre passe-haut, passe-bande ou passe-bas). Répondre à cette question sans calculer quoi que ce soit, et préciser quelle serait l’allure grossière de $|H(\nu)|$.
- (c) Calculer $H(\nu) = \mathcal{F}[h(x)]$, i.e., la transformée de Fourier de $h(x)$.
- (d) Trouver le module et la phase (ou l’argument) de $H(\nu)$ (i.e., $|H(\nu)|$ et $\Phi(\nu) = \arg(H(\nu))$) et tracer (grossièrement) l’allure de $|H(\nu)|$.

- (e) En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier et les calculs précédents, calculer la TF de $(a/2)h(ax)$ ($a > 0$)
- (f) Exprimer la fonction Dirac $\delta(x)$ comme une limite de la fonction $(a/2)h(ax)$ lorsque le paramètre a tend vers quelque-chose que l'on précisera.
- (g) En vous servant du résultat précédant, retrouver la TF du pic de Dirac.
- Dans ce raisonnement, on retrouve la TF d'un pic de Dirac par la limite de la TF d'une fonction qui tend vers un pic de Dirac. Expliquer pourquoi le raisonnement n'aurait pas été bon si on avait considéré la fonction $k a h(ax)$ pour $k \neq 1/2$. Justifier votre explication sans vous servir du résultat de la TF de $h(ax)$.
2. (a) Soit la fonction $\mathcal{W}(x)$ dont la transformée de Fourier est $\mathcal{F}(\mathcal{W}(x)) = 1/(2\pi j\nu)$ et soit $f(x)$ la fonction solution de l'équation différentielle suivante

$$-f'(x) + \int f(x) dx = \mathcal{W}(x) \quad (3)$$

Que devient l'équation (3) si on lui applique la transformée de Fourier $\mathcal{F}$?

En déduire $F(\nu)$, solution de cette équation dans le domaine spectral puis $f(x)$.

3. Calculer la transformée de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (4)$$

Nota :

Faites l'exercice suivant si vous avez fait, avec facilité, les exercices précédents. Ce dernier exercice est donc donné à titre indicatif.

VI.

1. (a) Soit la fonction $f(x)$, définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Calculer $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$, i.e., la transformée de Fourier (TF) de $f(x)$ et en déduire la TF de $f(3x)$ et la TF de $g(x)$, définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ \exp(x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- (b) Montrer que l'on peut trouver facilement a et b tel que $h(x) = \exp(-|x|) = f(ax) + f(bx)$ et en déduire la TF de $h(x)$.
- (c) Si on considère que le spectre d'amplitude est nulle lorsque son amplitude est inférieure à 2% de sa valeur maximale, avec quelle période d'échantillonnage T_e maximale (approximatif) doit on échantillonner $h(x)$?

- (d) Si on ne respecte pas cette fréquence d'échantillonnage minimale, quel est le nom du phénomène qui se produit ? Dire concrètement ce qui se passe lors de la visualisation de ce signal échantillonné si ce phénomène se produit et donner deux méthodes pour résoudre ce problème.
- (e) Par la méthode de votre choix, trouver le résultat de l'expression ci dessous dans laquelle “*” désigne l'opérateur de convolution.

$$f(x) * f(3x)$$

2. Trouver le résultat de l'expression

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} * \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

3. Trouver le résultat de l'intégrale suivante

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 dx$$

par la méthode de votre choix.
