



DIRO  
IFT 3205

## DÉMONSTRATION N° 2

*Max Mignotte*

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384.

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205/](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205/)

*E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

---

---

# Transformée de Fourier

---

### Rappel

On appelle Transformée de Fourier de  $f$  (pour une fonction  $f$  absolument intégrable sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^1$ , i.e., dérivable en tout point sauf pour un nombre fini de point), la fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x) dx \quad \nu \in \mathbb{R}$$

**I.**

1. Si  $\mathcal{F}(f) = F$ , on démontre que, sous réserve de convergence des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

Cette formule est la formule de Parseval qui traduit la conservation de l'énergie dans la Transformée de Fourier. En utilisant cette propriété, calculer l'intégrale suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

2. Utiliser la transformée de Fourier de la fonction  $\Pi(x)$  pour trouver les transformées de

$$\Pi\left(\frac{x-1}{2}\right) \quad \text{et} \quad x\Pi(x)$$

**Réponse****1.**

En considérant la fonction porte  $\Pi(x)$ , nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi^2(x) dx = \int_{-1/2}^{+1/2} \Pi^2(x) dx = 1$$

$$\text{d'où,} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2 d\nu = 1$$

$$\text{soit encore, en posant } \pi\nu = x, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi$$

**2.(a)**

- On obtient, en utilisant premièrement la propriété de dilatation/contraction

$$\mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2 \frac{\sin(2\pi\nu)}{2\pi\nu}$$

- Puis finalement en utilisant la propriété de décalage (valeur de décalage en  $x$  avec  $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$ )

$$\mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{x-1}{2}\right)\right) = 2 \exp(-2j\pi\nu) \frac{\sin(2\pi\nu)}{2\pi\nu}$$

**2.(b)**

En utilisant la propriété de la transformée de Fourier  $\mathcal{F}[f'(x)] = 2\pi j\nu F(\nu)$  (avec  $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$ ) et sa propriété duale (cf. cours), on obtient aussi la propriété  $\mathcal{F}^{-1}[F'(\nu)] = -2\pi jx f(x)$  et donc  $F'(\nu) = -2\pi j \mathcal{F}[x f(x)]$  et donc

$$\mathcal{F}(x\Pi(x)) = -\frac{1}{2\pi j} \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)' = \frac{j}{2} \left(\frac{\cos \pi\nu}{\pi\nu} - \frac{\sin \pi\nu}{\pi^2\nu^2}\right)$$

---

**II.**

1. Soit une fonction  $f(x) = \exp(-\pi x^2)$ . De quelle famille appartient cette fonction ? Vérifier que  $f(x)$  est solution de l'équation différentielle suivante

$$f'(x) + 2\pi x f(x) = 0$$

Que devient cette équation si on lui applique la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  ? En déduire  $F(\nu)$  à une constante ( $C^{\text{st}}$ ) multiplicative près en résolvant cette équation différentielle. A quelle valeur de  $\nu$  ( $F(\nu = ?)$ ) correspond l'intégrale  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi x^2) dx$  ? Pour trouver finalement cette constante,  $C^{\text{st}}$ , utiliser le fait que  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi x^2) dx = 1$ .

2. En utilisant le fait que  $\mathcal{F}[\exp(-\pi x^2)] = \exp(-\pi \nu^2)$  et que  $\exp(-\pi x^2)$  est paire, calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{+\infty} (\exp(-\pi x^2)) \cos(2\pi x) dx$$

---

**Réponse****1.**

Cette fonction appartient à la famille des Gaussiennes. On vérifie facilement que  $f(x)$  est solution de l'équation différentielle donnée

$$-2\pi x \underbrace{\exp(-\pi x^2)}_{f(x)} + 2\pi x f(x) = 0$$

- En utilisant la propriété de la TF sur la dérivée, i.e.

$$\mathcal{F}[f'(x)] = 2\pi j\nu \mathcal{F}[f(x)] \quad \text{et} \quad \mathcal{F}[x f(x)] = -\frac{1}{2\pi j} (\mathcal{F}[f(x)])'$$

on obtient

$$2\pi\nu F(\nu) + F'(\nu) = 0$$

- On en déduit  $F(\nu)$  (à une constante près) en résolvant cette équation différentielle du premier ordre

$$\begin{aligned} \frac{F'(\nu)}{F(\nu)} &= -2\pi\nu \\ \log |F(\nu)| + K_1 &= -\pi\nu^2 + K_2 \\ F(\nu) &= C^{\text{st}} \exp(-\pi\nu^2) \end{aligned}$$

- Finalement en utilisant le fait que  $F(\nu = 0) = C^{\text{st}} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi x^2) dx = 1$ , on trouve

$$F(\nu) = \mathcal{F}[\exp(-\pi x^2)] = \exp(-\pi\nu^2)$$

On retrouve donc par une autre méthode ce que l'on avait démontré en cours.

**2.**

La fonction  $\exp(-\pi x^2)$  est paire et  $\mathcal{F}[\exp(-\pi x^2)] = \exp(-\pi \nu^2)$  donc

$$\mathcal{F}[\exp(-\pi x^2)] = 2 \int_0^{+\infty} (\exp(-\pi x^2)) \cos(2\pi \nu x) dx = \exp(-\pi \nu^2)$$

Pour  $\nu = 1$  on a

$$I = \int_0^{+\infty} (\exp(-\pi x^2)) \cos(2\pi x) dx = \frac{1}{2} \exp(-\pi)$$

### III.

1. Trouver la Transformée de Fourier de la fonction Gaussienne, d'écart type  $\sigma$ ,  $\mathcal{N}_\sigma(x)$ ,

$$\mathcal{N}_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

en vous servant de l'invariance par Transformée de Fourier de la fonction  $\exp(-\pi x^2)$  et des propriétés de cette Transformée.

2. Trouver la Transformée de Fourier de  $(\mathcal{N}_{\sigma_1}(x) * \mathcal{N}_{\sigma_2}(x))$  où “\*” désigne l'opérateur de convolution.
3. Trouver l'expression analytique de la fonction  $(\mathcal{N}_{\sigma_1}(x) * \mathcal{N}_{\sigma_2}(x))$  (dans le domaine spatial). En déduire quelle est le filtrage spatial équivalent à deux filtrage spatial Gaussiens d'écart type  $\sigma = 1$ .

### Réponse

1.

Nous avons  $\mathcal{F}[\exp(-\pi x^2)] = \exp(-\pi \nu^2)$  (cf. cours). En utilisant la propriété de dilatation de la TF, i.e.,  $\mathcal{F}[f(ax)] = (1/|a|)F(\nu/a)$  avec  $f(x) = \exp(-\pi x^2)$  et  $a = (1/\sigma\sqrt{2\pi})$ , on obtient

$$\mathcal{F}\left[\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right] = \sigma\sqrt{2\pi} \exp(-2\pi^2\sigma^2\nu^2),$$

$$\text{et donc, } \mathcal{F}\left[\mathcal{N}_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right] = \exp(-2\pi^2\sigma^2\nu^2)$$

2.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathcal{N}_{\sigma_1}(x) * \mathcal{N}_{\sigma_2}(x)] &= \exp(-2\pi^2\sigma_1^2\nu^2) \exp(-2\pi^2\sigma_2^2\nu^2) \\ &= \exp(-2\pi^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\nu^2) \end{aligned}$$

3.

Par TF inverse de la dernière expression, on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\sigma_1}(x) * \mathcal{N}_{\sigma_2}(x) &= \mathcal{F}^{-1}[\exp(-2\pi^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\nu^2)] \\ &= \mathcal{N}_{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}(x) \end{aligned}$$

Le filtrage équivalent à deux filtrage Gaussiens d'écart type  $\sigma = 1$  est un filtrage Gaussiens d'écart type  $\sigma = \sqrt{2}$ .

## IV.

1. Soit la fonction  $f(x)$ , définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Calculer  $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$ , i.e., la transformée de Fourier de  $f(x)$  et mettre le résultat de cette transformée de façon à faire apparaître la partie réelle et la partie imaginaire de  $F(\nu)$ .

2. Trouver le module et la phase (ou l'argument) de  $F(\nu)$  (i.e.,  $|F(\nu)|$  et  $\Phi(\nu) = \arg(F(\nu))$ ) et tracer grossièrement l'allure de  $|F(\nu)|$ .
3. Si on considère que le spectre d'amplitude est nulle lorsque son amplitude est inférieure à 1 % de sa valeur max, avec quelle période d'échantillonnage  $T_e$  maximale (approximatif) peut on échantillonner  $f(x)$  ?
4. Que peut on dire des propriétés de la transformée de Fourier de la fonction  $f(x) = \exp(-a|x|)$  (sans la calculer). Calculer ensuite cette TF. Aurait on obtenu la même chose si on avait calculé  $\mathcal{F}^{-1}[f(x)]$  au lieu de  $\mathcal{F}[f(x)]$ . Expliquer pourquoi.
5. En utilisant une propriété de la TF et en utilisant une propriété liée à la symétrie de  $\mathcal{F}[f(x)]$  calculé à la question précédente, en déduire la Transformée de Fourier de la fonction  $g(x) = \frac{2}{1+4\pi^2x^2}$ .

## Réponse

1. En utilisant directement la définition de la TF

$$F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x) dx = \frac{-1}{1+2\pi j\nu} \left[ \exp(-x(1+2\pi j\nu)) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+2\pi j\nu}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur de cette expression par  $(1-2\pi j\nu)$ , on isole la partie réelle et la partie imaginaire de  $F(\nu)$ , et on obtient

$$F(\nu) = \underbrace{\frac{1}{1+4\pi^2\nu^2}}_{\mathcal{R}(F(\nu))} + j \underbrace{\frac{-2\pi\nu}{1+4\pi^2\nu^2}}_{\mathcal{I}m(F(\nu))}$$

2. On obtient le module et l'argument à partir du résultat précédent

$$|F(\nu)| = \sqrt{(\mathcal{R}(F(\nu)))^2 + (\mathcal{I}m(F(\nu)))^2} = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2\nu^2}} \quad \text{et} \quad \text{Arg}(F(\nu)) = \arctan(-2\pi\nu)$$

3.  $|F(\nu)| = 0.01$  pour une fréquence de demi-échantillonnage de  $\nu \approx 16$  ou une période de  $T_e = 1/32$ .

4. La fonction est réelle et paire, donc sa transformée sera réelle pure et paire.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\exp(-a|x|)] &= \int_{-\infty}^0 \exp(x(a-2\pi j\nu)) dx + \int_0^{\infty} \exp(-x(a+2\pi j\nu)) dx = \frac{1}{a-2\pi j\nu} + \frac{1}{a+2\pi j\nu} \\ &= \frac{2a}{a^2+4\pi^2\nu^2} \end{aligned}$$

On aurait obtenu la même chose en calculant la TF inverse car lorsqu'une fonction est paire, on a  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}$

**5.** La fonction est paire donc calculer sa TF est équivalent à calculer sa TF inverse. La question précédente nous a montré que  $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2a}{a^2+4\pi^2\nu^2}\right) = \exp(-a|x|)$  qui est vrai quelque soit  $a$ , même pour  $a = 1$  et donc

$$\mathcal{F}\left(\frac{2}{1+4\pi^2x^2}\right) = \exp(-|\nu|)$$

## V.

1. (a) Soit la fonction  $h(x)$ , définie par

$$h(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{si } x \geq 0 \\ \exp(+x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Que peut on dire, sans avoir besoin de calculer quoi que ce soit, sur les propriétés de  $H(\nu)$  (la transformée de Fourier de  $h(x)$ ) ? (e.g., éventuelles symétries, fonction réelle ou complexe, etc.)

- (b) Si on convoluait un signal  $f(x)$  par  $h(x)$ , (i.e., si on considérait  $h(x)$  comme étant une PSF (Point Spread Function)). Quelle opération réaliserait on ? (filtre passe-haut, passe-bande ou passe-bas). Répondre à cette question sans calculer quoi que ce soit, et préciser quelle serait l'allure de  $|H(\nu)|$ .
- (c) Calculer  $H(\nu) = \mathcal{F}[h(x)]$ , i.e., la transformée de Fourier de  $h(x)$ .
- (d) Trouver le module et la phase (ou l'argument) de  $H(\nu)$  (i.e.,  $|H(\nu)|$  et  $\Phi(\nu) = \arg(H(\nu))$ ) et tracer (grossièrement) l'allure de  $|H(\nu)|$ .
- (e) En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier et les calculs précédents, calculer la TF de  $(a/2)h(ax)$  ( $a > 0$ )
- (f) Exprimer la fonction Dirac  $\delta(x)$  comme une limite de la fonction  $(a/2)h(ax)$  lorsque le paramètre  $a$  tend vers quelque-chose que l'on précisera.
- (g) En vous servant du résultat précédent, retrouver la TF du pic de Dirac.

Dans ce raisonnement, on retrouve la TF d'un pic de Dirac par la limite de la TF d'une fonction qui tend vers un pic de Dirac. Expliquer pourquoi le raisonnement n'aurait pas été bon si on avait considéré la fonction  $ka h(ax)$  pour  $k \neq 1/2$ . Justifier votre explication sans vous servir du résultat de la TF de  $h(ax)$ .

2. Soit la fonction  $\mathcal{W}(x)$  dont la transformée de Fourier est  $\mathcal{F}(\mathcal{W}(x)) = 1/(2\pi j\nu)$  et soit  $f(x)$  la fonction solution de l'équation différentielle suivante

$$-f'(x) + \int f(x) dx = \mathcal{W}(x)$$

Que devient l'équation précédente si on lui applique la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  ?

En déduire  $F(\nu)$ , solution de cette équation dans le domaine spectral puis  $f(x)$ .

3. Calculer la transformée de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

**1.(a)**  $h(x)$  est une fonction 1- réelle et 2- paire, sa transformée sera donc 1- à symétrie hermitienne (i.e., partie réelle paire et partie imaginaire impaire) et 2- réelle pure. En résumé,  $H(\nu)$  sera une fonction réelle et paire.

**1.(b)**  $h(x)$  est une fonction qui est toujours positive. Sa TF, comme toute PSF avec des coefficients positives aura donc l'allure d'un filtre passe-bas.  $|H(\nu)|$  sera donc, de plus, une fonction décroissante et monotone pour des valeurs de  $\nu$  croissante. De plus  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |H(\nu)| = 0$ .

**1.(c)** En utilisant directement la définition de la TF

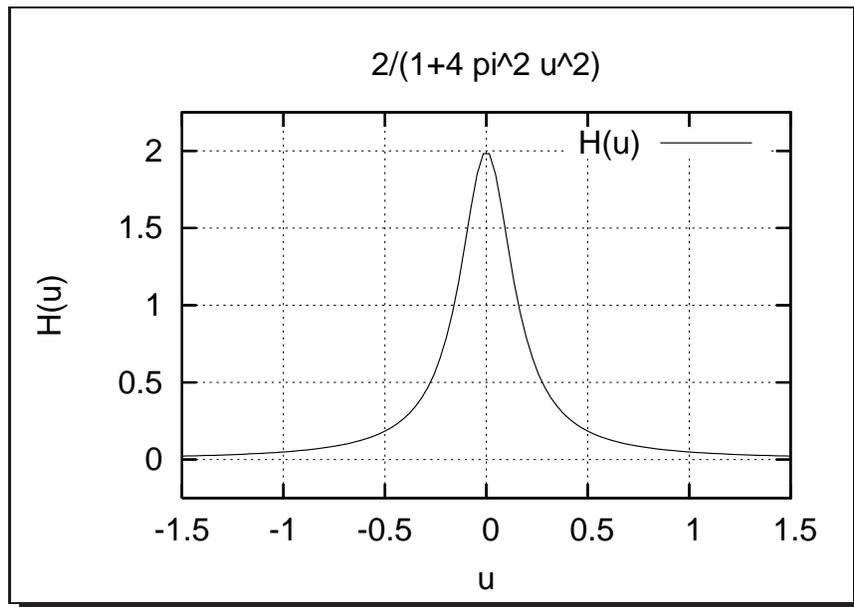
$$\begin{aligned} H(\nu) = \mathcal{F}[h(x)] &= \int_0^{\infty} \exp(-x) \exp(-2\pi j\nu x) dx + \int_{-\infty}^0 \exp(+x) \exp(-2\pi j\nu x) dx \\ &= \frac{-1}{1 + 2\pi j\nu} \left[ \exp(-x(1 + 2\pi j\nu)) \right]_0^{\infty} + \frac{1}{1 - 2\pi j\nu} \left[ \exp(+x(1 - 2\pi j\nu)) \right]_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{1 + 2\pi j\nu} + \frac{1}{1 - 2\pi j\nu} \\ &= \frac{2}{1 + 4\pi^2\nu^2} \end{aligned}$$

La fonction trouvée est bien réelle et paire et monotone décroissante pour des valeurs de  $\nu$  croissante comme intuitée précédemment.

**1.(d)**

Le module d'une fonction réelle à valeur toujours positives (comme c'est le cas de  $H(\nu)$ ) est la fonction elle même, et la phase d'une fonction réelle est la fonction nulle, on obtient donc immédiatement le module et l'argument à partir du résultat précédent

$$\begin{aligned} |H(\nu)| &= \frac{2}{1 + 4\pi^2\nu^2} \\ \text{Arg}(H(\nu)) &= 0 \end{aligned}$$



**1.(e)** En utilisant la propriété  $\mathcal{F}[h(ax)] = (1/a)H(\nu/a)$ , on obtient immédiatement

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[(a/2)h(ax)] &= \frac{(a/2)(2/a)}{1 + 4\pi^2(\nu/a)^2} \\ &= \frac{a^2}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}\end{aligned}$$

**1.(f)**

Pour une valeur de  $a$  de plus en plus élevée, on a la fonction  $(a/2)h(ax) = \frac{a}{2} \exp -|ax|$  (d'intégrale unité) qui tend vers un pic de Dirac,

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} (a/2)h(ax)$$

**1.(g)**

Puis en prenant la TF des deux membres

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\delta(x)] &= \lim_{a \rightarrow \infty} \mathcal{F}[(a/2)h(ax)] \\ \mathcal{F}[\delta(x)] &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^2}{a^2 + 4\pi^2\nu^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2(\nu/a)^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Dans le raisonnement, “on retrouve la TF d’un pic de Dirac par la limite de la TF d’une fonction qui tend vers un pic de Dirac”. On ne doit pas oublier que la fonction doit être aussi d’intégrale unité, ce qui est le cas de  $k a h(ax)$  pour  $k = 1/2$  seulement.

**2.**

En utilisant la propriété de la TF sur la dérivée, i.e.

$$\mathcal{F}[f'(x)] = 2\pi j\nu \mathcal{F}[f(x)] \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left[\int f(x) dx\right] = \frac{1}{2\pi j\nu} (\mathcal{F}[f(x)])$$

on obtient

$$\begin{aligned}-f'(x) + \int f(x) dx &= \mathcal{W}(x) \\ -2\pi j\nu F(\nu) + \frac{F(\nu)}{2\pi j\nu} &= \frac{1}{2\pi j\nu} \\ F(\nu) \left[ \frac{1 + 4\pi^2\nu^2}{2\pi j\nu} \right] &= \frac{1}{2\pi j\nu} \\ F(\nu) &= \frac{1}{1 + 4\pi^2\nu^2}\end{aligned}$$

Et donc  $f(x) = \frac{1}{2} h(x)$

**3.**

$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+4\pi^2x^2}\right) = \frac{1}{2} \exp(-|\nu|)$ , et par changement de variable, on trouve immédiatement

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \pi \exp(-2\pi|\nu|)$$

---

**VI.**

1. (a) Soit la fonction  $f(x)$ , définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Calculer  $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$ , i.e., la transformée de Fourier (TF) de  $f(x)$  et en déduire la TF de  $f(3x)$  et la TF de  $g(x)$ , définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ \exp(x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- (b) Montrer que l'on peut trouver facilement  $a$  et  $b$  tel que  $h(x) = \exp(-|x|) = f(ax) + f(bx)$  et en déduire la TF de  $h(x)$ .
- (c) Si on considère que le spectre d'amplitude est nulle lorsque son amplitude est inférieure à 2% de sa valeur maximale, avec quelle période d'échantillonnage  $T_e$  maximale (approximatif) doit on échantillonner  $h(x)$  ?
- (d) Si on ne respecte pas cette fréquence d'échantillonnage minimale, quel est le nom du phénomène qui se produit? Dire concrètement ce qui se passe lors de la visualisation de ce signal échantillonné si ce phénomène se produit et donner deux méthodes pour résoudre ce problème.
- (e) Par la méthode de votre choix, trouver le résultat de l'expression ci dessous dans laquelle "\*" désigne l'opérateur de convolution.

$$f(x) * f(3x)$$

2. Trouver le résultat de l'expression

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} * \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

3. Trouver le résultat de l'intégrale suivante

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 dx$$

par la méthode de votre choix.

---

**Réponse**

- 1.(a)** En utilisant directement la définition de la TF

$$\begin{aligned} F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)] &= \int_0^{\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x) dx = \frac{-1}{1 + 2\pi j\nu} \left[ \exp[-x(1 + 2\pi j\nu)] \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{1 + 2\pi j\nu} \end{aligned}$$

Pour calculer la TF de  $f(3x)$ , on utilise la propriété de dilatation de la TF, i.e.,  $\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$ , on trouve

$$\mathcal{F}[f(3x)] = \frac{1}{|3|} F(\nu/3) = \frac{1/3}{1 + 2\pi j\nu/3} = \frac{1}{3 + 2\pi j\nu}$$

Pour calculer la TF de  $g(x)$ , on peut utiliser aussi la propriété de dilatation tout en s'apercevant que  $g(x) = f(-x)$  et on trouve

$$\mathcal{F}[g(x)] = \mathcal{F}[f(-x)] = \frac{1}{|-1|} \cdot \frac{1}{1 - 2\pi j\nu}$$

**1.(b)** On a  $h(x) = \exp(-|x|) = f(x) + f(-x)$ , et de cela on en déduit que

$$\mathcal{F}[h(x)] = \mathcal{F}[f(x) + f(-x)] = \mathcal{F}[f(x)] + \mathcal{F}[f(-x)] = \frac{1}{1 + 2\pi j\nu} + \frac{1}{1 - 2\pi j\nu} = \frac{2}{1 + 4\pi^2\nu^2}$$

**1.(c)** On doit calculer  $|H(\nu)|$ , le module de  $H(\nu)$ , qui n'est autre que la fonction précédente ;

$$|H(\nu)| = \frac{2}{1 + 4\pi^2\nu^2}$$

$|H(\nu)| < 0.02$  pour une fréquence de demi-échantillonnage de  $\nu \gtrsim 1.58$  ou une période d'échantillonnage de  $T_e \lesssim 0.3$ .

**1.(d)** Ce phénomène est appelé aliasing, repliement de spectre, moiré ou encore sous-échantillonnage.

Concrètement, ce repliement de spectre va créer dans ce signal sous-échantillonné des hautes fréquences parasites provenant de la somme des hautes fréquences positifs et négatifs de ce signal du au phénomène de repliement spectral.

Pour résoudre ce problème, il existe deux solutions ;

1) Échantillonner à une période d'échantillonnage plus petite.

2) Ou filtrer passe-bas le signal pour que ce repliement spectral n'ai pas lieu.

(Nota : du coup on introduira du flou dans les détails de cette image sous échantillonnée ; ce qui est tout de même préférable à l'introduction de hautes fréquences parasites induisant des artefacts sur l'image.)

**1.(e)** Le plus simple est de résoudre cette expression dans le domaine fréquentiel en se servant de ce qu'on a calculer à la question **1.(a)** puis de trouver la TF inverse de cette solution. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x) * f(3x)] &= \mathcal{F}[f(x)] \cdot \mathcal{F}[f(3x)] = \frac{1}{(1 + 2\pi j\nu)(3 + 2\pi j\nu)} \\ &= \frac{1/2}{1 + 2\pi j\nu} - \frac{1/2}{3 + 2\pi j\nu} \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} f(x) * f(3x) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1/2}{1 + 2\pi j\nu} - \frac{1/2}{3 + 2\pi j\nu}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1/2}{1 + 2\pi j\nu}\right) - \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1/2}{3 + 2\pi j\nu}\right) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) - f(3x)) \end{aligned}$$

**2.** On résout cette équation dans le domaine de Fourier.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \pi x}{\pi x} * \frac{\sin \pi x}{\pi x} &\stackrel{\mathcal{F}}{\iff} \Pi(\nu) \cdot \Pi(\nu) \\ &= \\ \frac{\sin \pi x}{\pi x} &\stackrel{\mathcal{F}}{\iff} \Pi(\nu) \end{aligned}$$

**3.** Trois possibilités. La première utilise la connaissance de la TF inverse de la fonction que l'on intègre, qui est la fonction triangle  $\Delta(x)$ .

$$\begin{aligned} I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \right)^2 d\nu &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \right)^2 \exp(-2\pi j\nu(x=0)) d\nu \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left[ \left( \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \right)^2 \right]_{x=0} = \Delta(x=0) = 1 \end{aligned}$$

Deuxième solution ; remarquer que le résultat de cette intégrale correspond à la valeur (en  $x = 0$ ) de la fonction  $\sin \pi x / \pi x * \sin \pi x / \pi x$  (auto-corrélation de la fonction  $\sin \pi x / \pi x$ ) et on trouve

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \right)^2 d\nu = \left( \frac{\sin \pi x}{\pi x} * \frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)_{x=0} = \left( \frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)_{x=0} = 1$$

Troisième solution ; on utilise la conservation de l'énergie dans les deux espaces et on a ;

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \right)^2 d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(x)^2 dx = 1$$