



DIRO
IFT 3205

DÉMONSTRATION N° 3

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384.

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Transformée de Fourier

Rappel

On appelle Transformée de Fourier de f (pour une fonction f absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 , i.e., dérivable en tout point sauf pour un nombre fini de point), la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x) dx \quad \nu \in \mathbb{R}$$

I.

- (a) En s'aidant de la dérivée du produit $f(x)\delta(x)$, établir la valeur de l'expression $f(x)\delta'(x)$.
(b) Utiliser la relation définie précédemment pour calculer $x\delta'(x)$, $\exp(x)\delta'(x)$, et $\sin(x)\delta'(x)$.
(c) Utiliser cette relation pour montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x)dx = -f'(0)$$

- (a) En posant $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$, démontrer, par la méthode de votre choix, que

$$\mathcal{F}[x f'(x)] = -\nu F'(\nu) - F(\nu)$$

- (b) Soit $f(x)$ la fonction solution de l'équation différentielle suivante

$$f(x) + f''(x) + x f'(x) = 0 \quad (1)$$

Que devient l'équation (1) si on lui applique la transformée de Fourier $\mathcal{F}$?

En déduire $F(\nu)$, solution de cette équation dans le domaine spectral puis $f(x)$.

- (a) Par la méthode de votre choix, trouver le résultat de l'expression ci dessous dans laquelle “*” désigne l'opérateur de convolution

$$\exp(-\pi x^2) * \exp(-\pi x^2)$$

- (a) Par la méthode de votre choix, trouver le résultat de l'intégrale suivante

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi t^2) \exp[-\pi(x-t)^2] dt$$

II.

- (a) Soit $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$ (i.e., $F(\nu)$ représentant la transformée de Fourier (TF) de $f(x)$).
Calculer par la méthode de votre choix

$$\mathcal{F}[x^2 f(x)]$$

- (b) Utiliser la relation définie précédemment pour calculer la TF de $x^2 \exp(-x)$ (pour $x > 0$).
- (a) Soit $h(x)$ la fonction (pour $x > 0$) solution de l'équation différentielle suivante

$$h''(x) + 2h'(x) + h(x) = \exp(-x) \quad (2)$$

Que devient l'Eq. (2) si on lui applique la transformée de Fourier $\mathcal{F}$?

- (b) En déduire $H(\nu)$, solution de cette équation dans le domaine spectral puis sa solution $h(x)$, dans le domaine spatial.
- (c) Comment pourrait on écrire $h(x)$ si on voulait l'exprimer sous forme de produit de convolution d'une même fonction ?

- (d) Si on remplaçait le membre de droite de l'Eq. (2) par $[\delta(x) - \delta'(x)]$ (au lieu de $\exp(-x)$), quelle serait à nouveau la solution de cette équation différentielle? NOTA : ON RAPPELLE QUE $\delta'(x) * f(x) = f'(x)$.

3. Retrouver la célèbre propriété suivante de la TF

$$\mathcal{F}[f'(x)] = (2\pi j\nu) F(\nu) \quad (3)$$

en utilisant le fait que 1-) $f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$, 2-) la transformée de Fourier d'une fonction décalée et 3-) le fait que, quand $x \rightarrow 0$, $\exp(x) \approx 1 + x$.

4. Trouver le résultat de l'expression ci dessous, dans laquelle a et b sont deux réels positifs et $*$ représente l'opérateur de convolution

$$\frac{\sin \pi a x}{\pi a x} * \frac{\sin \pi b x}{\pi b x}$$

III.

1. (a) Soit $f(x)$ la fonction (pour $m > 0$) solution de l'équation différentielle suivante

$$m^2 f(x) - f''(x) = \delta(x) \quad (4)$$

Que devient l'Eq. (4) si on lui applique la transformée de Fourier $\mathcal{F}$?

- (b) En déduire $F(\nu)$, solution de cette équation dans le domaine spectral puis sa solution $f(x)$, dans le domaine spatial, sachant que l'on peut facilement trouver dans les tables de transformée de Fourier la relation suivante

$$\mathcal{F}[\exp(-|x|)] = \frac{2}{1 + 4\pi^2 \nu^2}$$

- (c) Soit la fonction $g(x)$, définie par

$$g(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Calculer $G(\nu) = \mathcal{F}[g(x)]$ (i.e., la transformée de Fourier de $g(x)$).

- (d) Si on remplaçait le membre de droite de l'Eq. (4) par $[\delta(x) - \delta'(x)]$ (au lieu de $\delta(x)$), quelle serait à nouveau, pour $m = 1$, la solution de cette équation différentielle?
[NOTA : ON RAPPELLE QUE $\delta'(x) * f(x) = f'(x)$.]

2. (a) Sans calcul, quelles seraient (toutes) les propriétés intéressantes de

$$H(\nu) = \mathcal{F}[h(x)] = \mathcal{F}[x^2 \exp(-\pi x^2)]$$

que l'on pourraient déduire à partir des propriétés de $h(x)$ et des propriétés de la transformée de Fourier.

- (b) Calculer maintenant $H(\nu) = \mathcal{F}[x^2 \exp(-\pi x^2)]$.

3. Calculer $\mathcal{F}[\cos^2 x]$.
-

Nota :

Faites les deux exercices suivants si vous avez fait, avec facilité, les exercices précédents. Ces deux derniers exercices sont donc donnés à titre indicatif mais seront considérés comme hors programme.

IV.

On considère des particules suspendues dans un liquide. Soit $f(x, t)$ leur fonction de densité de probabilité à un point x au temps t . Utilisant des arguments probabilistes, Einstein a montré, que pour certains systèmes, l'évolution de $f(x, t)$ est gouvernée par l'équation de diffusion suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t)$$

Dans laquelle D est la constante de diffusion.

1. Supposons que $f(x, t = 0) = \delta(x)$ (i.e., on ajoute des particules dans le liquide en un endroit très localisé, au temps $t = 0$), trouver $f(x, t)$.
2. Trouver la moyenne et la variance de $f(x, t)$.
3. A partir de ses calculs, Einstein a trouvé que la constante de diffusion est donnée par

$$D = \frac{kT}{6\pi\rho R}$$

où k est la constante de Boltzmann's. T est la température, ρ est la viscosité du fluide et R est la taille des particules. En utilisant vos résultats de la question précédente (et en particulier celui de la variance du processus de diffusion $f(x, t)$), que pouvez vous dire sur la diffusion des particules (i.e., leur évolution à travers le temps) en tant que fonction de leur dimension et de la température ?

V.

En analyse vectorielle, l'équation de Laplace est une équation aux dérivées partielles du second ordre, dont le nom est un hommage au physicien mathématicien Pierre-Simon Laplace. Introduite pour les besoins de la mécanique newtonienne, l'équation de Laplace apparaît dans de nombreuses branches de la physique théorique : astronomie, électrostatique, mécanique des fluides, propagation de la chaleur, diffusion, mouvement brownien, mécanique quantique, traitement du signal et de l'image.

L'équation de Laplace est donnée par l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

avec $f(x, 0) = \phi(x)$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$

1. En posant $F(\nu, y)$ la TF de $f(x, y)$ (avec la correspondance $x \xrightarrow{\mathcal{F}} \nu$), transposer cette équation aux dérivées partielles dans le domaine de Fourier.
2. En notant que $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} F(\nu, y) = 0$, en déduire que

$$f(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt$$