



DIRO
IFT 3205

DÉMONSTRATION N° 3

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384.

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Transformée de Fourier

Rappel

On appelle Transformée de Fourier de f (pour une fonction f absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 , i.e., dérivable en tout point sauf pour un nombre fini de point), la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j \nu x) dx \quad \nu \in \mathbb{R}$$

I.

1. (a) En s'aidant de la dérivée du produit $f(x) \delta(x)$, établir la valeur de l'expression $f(x) \delta'(x)$.
- (b) Utiliser la relation définie précédemment pour calculer $x \delta'(x)$, $\exp(x) \delta'(x)$, et $\sin(x) \delta'(x)$.
- (c) Utiliser cette relation pour montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x) dx = -f'(0)$$

2. (a) En posant $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$, démontrer, par la méthode de votre choix, que

$$\mathcal{F}[x f'(x)] = -\nu F'(\nu) - F(\nu)$$

- (b) Soit $f(x)$ la fonction solution de l'équation différentielle suivante

$$f(x) + f''(x) + x f'(x) = 0 \quad (1)$$

Que devient l'équation (1) si on lui applique la transformée de Fourier $\mathcal{F}$?
En déduire $F(\nu)$, solution de cette équation dans le domaine spectral puis $f(x)$.

3. (a) Par la méthode de votre choix, trouver le résultat de l'expression ci dessous dans laquelle “*” désigne l'opérateur de convolution

$$\exp(-\pi x^2) * \exp(-\pi x^2)$$

4. (a) Par la méthode de votre choix, trouver le résultat de l'intégrale suivante

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi t^2) \exp[-\pi(x-t)^2] dt$$

Réponse**1.(a)**

La formule de dérivée du produit de deux fonctions et les propriétés du produit du Dirac avec une fonction nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x) \delta(x)) &= f'(x) \delta(x) + f(x) \delta'(x) \\ \frac{d}{dx}(f(0) \delta(x)) &= f'(0) \delta(x) + f(x) \delta'(x) \\ \text{et donc} \quad f(x) \delta'(x) &= f(0) \frac{d}{dx} \delta(x) - f'(0) \delta(x) \\ \text{i.e.} \quad f(x) \delta'(x) &= f(0) \delta'(x) - f'(0) \delta(x) \end{aligned}$$

1.(b)

En appliquant la relation trouvée précédemment, on trouve

$$\begin{aligned} x \delta'(x) &= 0 \delta'(x) - 1 \delta(x) &= -\delta(x) \\ \exp(x) \delta'(x) &= \exp(0) \delta'(x) - \exp(0) \delta(x) &= \delta'(x) - \delta(x) \\ \sin(x) \delta'(x) &= -\delta(x) \end{aligned}$$

1.(c)

En utilisant la relation trouvée en 1.(a) et le fait que, par définition, $\int \delta(x) dx = 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x) dx &= f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) dx - f'(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx \\ &= f(0) [\delta(x)]_{-\infty}^{+\infty} - f'(0) \\ &= -f'(0) \end{aligned}$$

2.(a)

▷ On a $\mathcal{F}[f'(x)] = 2\pi j\nu F(\nu)$, et donc par la propriété duale ; $\mathcal{F}^{-1}[F'(\nu)] = -2\pi j x f(x)$ et donc

$$\mathcal{F}[x f(x)] = -\frac{1}{2\pi j} F'(\nu)$$

Et finalement puisque¹

$$\begin{aligned} x f'(x) &= (x f(x))' - f(x) \stackrel{\mathcal{F}}{=} 2\pi j\nu \mathcal{F}[x f(x)] - F(\nu) = -v F'(\nu) - F(\nu) \\ x f'(x) &\stackrel{\mathcal{F}}{=} -v F'(\nu) - F(\nu) \end{aligned}$$

2.(b)

En utilisant la propriété de la TF sur la dérivée, et la relation précédente, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) + f''(x) + x f'(x) &= 0 \stackrel{\mathcal{F}}{=} F(\nu) + (2\pi j\nu)^2 F(\nu) - v F'(\nu) - F(\nu) = 0 \\ &\quad -4\pi^2 \nu^2 F(\nu) - \nu F'(\nu) = 0 \end{aligned}$$

Et en résolvant cette équation différentielle dans le domaine spectral, on trouve

$$\begin{aligned} -v F'(\nu) &= 4\pi^2 \nu^2 F(\nu) \\ \frac{F'(\nu)}{F(\nu)} &= -4\pi^2 \nu \\ \ln |F(\nu)| &= -2\pi^2 \nu^2 + K_1 \\ F(\nu) &= C_1^{st} \cdot \exp(-2\pi^2 \nu^2) \end{aligned}$$

Sachant que $\exp(-\pi x^2) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \exp(-\pi \nu^2)$ et la propriété de dilatation/contraction de la transformée de Fourier, on trouve finalement $f(x) = C_2^{st} \cdot \exp(-x^2/2)$ où C_2^{st} est une constante.

3.(a)

$$\exp(-\pi x^2) * \exp(-\pi x^2) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \exp(-\pi \nu^2) \exp(-\pi \nu^2) = \exp(-2\pi \nu^2)$$

$$\text{Donc} \quad \exp(-\pi x^2) * \exp(-\pi x^2) = \mathcal{F}^{-1}[\exp(-2\pi \nu^2)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{\pi}{2} x^2)$$

1. Pour la question I.2.(a), en utilisant $\delta'(x) * f(x) = f'(x)$ et $\mathcal{F}[x]$ peut être déjà vues en exercice

$$x f'(x) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \mathcal{F}[x] * (2\pi j\nu F(\nu)) = \frac{-1}{2\pi j} \delta'(\nu) * (2\pi j\nu F(\nu)) = \frac{d}{d\nu}(-\nu F(\nu)) = -v F'(\nu) - F(\nu)$$

3.(b)

En utilisant le résultat de la question précédente

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi t^2) \exp[-\pi(x-t)^2] dt = \exp(-\pi x^2) * \exp(-\pi x^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{\pi}{2} x^2)$$

II.

1. (a) Soit $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$ (i.e., $F(\nu)$ représentant la transformée de Fourier (TF) de $f(x)$).

Calculer par la méthode de votre choix

$$\mathcal{F}[x^2 f(x)]$$

- (b) Utiliser la relation définie précédemment pour calculer la TF de $x^2 \exp(-x)$ (pour $x > 0$).

2. (a) Soit $h(x)$ la fonction (pour $x > 0$) solution de l'équation différentielle suivante

$$h''(x) + 2h'(x) + h(x) = \exp(-x) \quad (2)$$

Que devient l'Eq. (2) si on lui applique la transformée de Fourier $\mathcal{F}$?

- (b) En déduire $H(\nu)$, solution de cette équation dans le domaine spectral puis sa solution $h(x)$, dans le domaine spatial.
- (c) Comment pourrait on écrire $h(x)$ si on voulait l'exprimer sous forme de produit de convolution d'une même fonction ?
- (d) Si on remplaçait le membre de droite de l'Eq. (2) par $[\delta(x) - \delta'(x)]$ (au lieu de $\exp(-x)$), quelle serait à nouveau la solution de cette équation différentielle ?
- NOTA : ON RAPPELLE QUE $\delta'(x) * f(x) = f'(x)$.

3. Retrouver la célèbre propriété suivante de la TF

$$\mathcal{F}[f'(x)] = (2\pi j\nu) F(\nu) \quad (3)$$

en utilisant le fait que 1-) $f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$, 2-) la transformée de Fourier d'une fonction décalée et 3-) le fait que, quand $x \rightarrow 0$, $\exp(x) \approx 1 + x$.

4. Trouver le résultat de l'expression ci dessous, dans laquelle a et b sont deux réels positifs et $*$ représente l'opérateur de convolution

$$\frac{\sin \pi a x}{\pi a x} * \frac{\sin \pi b x}{\pi b x}$$

Réponse**1.(a)**

La méthode la plus simple² consiste à appliquer la formule de la transformée de Fourier d'une fonction dérivée seconde, i.e.

$$\mathcal{F}[f''(x)] = (2\pi j\nu)^2 \mathcal{F}[f(x)] = -4\pi^2 \nu^2 F(\nu)$$

puis d'appliquer la propriété duale pour finalement trouver

$$\mathcal{F}[x^2 f(x)] = -\frac{1}{4\pi^2} F''(\nu)$$

1.(b)

On trouve facilement (pour $x > 0$) $\mathcal{F}[\exp(-x)] = \frac{1}{1+2\pi j\nu}$ (fait en démo 1). Donc, en utilisant la relation précédemment trouvée

$$\mathcal{F}[x^2 \exp(-x)] = -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{1}{1+2\pi j\nu} \right)'' = -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{-2\pi j}{(1+2\pi j\nu)^2} \right)' = \frac{2}{(1+2\pi j\nu)^3}$$

2.(a)

$$h''(x) + 2h'(x) + h(x) = \exp(-x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi j\nu)^2 H(\nu) + 2(2\pi j\nu)H(\nu) + H(\nu) = \frac{1}{1+2\pi j\nu}$$

2.(b)

De précédemment, on en déduit

$$H(\nu) = \frac{1}{(1+2\pi j\nu)^3}$$

Et en se servant de la question 1.(b), on en déduit que $h(x) = \frac{1}{2} x^2 \exp(-x)$ (pour $x > 0$) est une des solutions de cette équation différentielle.

2.(c)

$$\begin{aligned} h(x) &= \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{(1+2\pi j\nu)^3} \right] = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{(1+2\pi j\nu)} \frac{1}{(1+2\pi j\nu)} \frac{1}{(1+2\pi j\nu)} \right] \\ h(x) &= \exp(-x) * \exp(-x) * \exp(-x) \quad (\text{pour } x > 0) \end{aligned}$$

2.(d)

En se rappelant (ou en déduisant à partir du NOTA donné dans l'énoncé) que $\mathcal{F}[\delta'(x)] = 2\pi j\nu$, on a cette fois ci³

$$h''(x) + 2h'(x) + h(x) = \delta(x) - \delta'(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (1+2\pi j\nu)^2 H(\nu) = 1 - 2\pi j\nu$$

Et, si on revient au domaine spatial

$$\begin{aligned} h(x) &= \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1-2\pi j\nu}{(1+2\pi j\nu)^2} \right] = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{2}{(1+2\pi j\nu)^2} - \frac{1}{1+2\pi j\nu} \right] \\ &= 2\exp(-x) * \exp(-x) - \exp(-x) \quad \text{pour } x > 0 \end{aligned}$$

2. Une autre méthode pour la question II.1.(a) consisterait à se rappeler (ou en déduire à partir du NOTA donné dans l'énoncé) que $\mathcal{F}[\delta'(x)] = 2\pi j\nu$ et donc, par la propriété duale que $\mathcal{F}[x] = -\frac{1}{2\pi j} \delta'(\nu)$. Compte tenu de ce fait, on trouve ensuite

$$\mathcal{F}[x^2 f(x)] = -\frac{1}{2\pi j} \delta'(\nu) * -\frac{1}{2\pi j} \delta'(\nu) * F(\nu) = -\frac{1}{4\pi^2} F''(\nu)$$

Une autre méthode serait de considérer $x^2 f(x) = x(x f(x))$ et connaissant $x f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{F'(\nu)}{-2\pi j}$ appliqué 2 fois, on retrouve $x^2 f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{F''(\nu)}{4\pi^2}$

3. Pour la question II.2.(d) Si le deuxième membre de l'équation avait été $[\delta(x) + \delta'(x)]$, on aurait eu

$$h(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{1+2\pi j\nu} \right] = \exp(-x) \quad \text{pour } x > 0$$

3

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\epsilon} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}[f(x+\epsilon) - f(x)] = \frac{1}{\epsilon} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ F(\nu) [\exp(2\pi j \nu \epsilon) - 1] \right\} = \frac{1}{\epsilon} F(\nu) [(1 + 2\pi j \nu \epsilon) - 1]$$

et donc $\mathcal{F}[f'(x)] = (2\pi j \nu) F(\nu)$

4

Le plus facile est de *téléporter* cette expression dans le domaine de Fourier, la résoudre dans cet espace puis revenir dans le domaine spatial, i.e.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \pi a x}{\pi a x} * \frac{\sin \pi b x}{\pi b x} &\stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{1}{|a|} \Pi\left(\frac{\nu}{a}\right) \frac{1}{|b|} \Pi\left(\frac{\nu}{b}\right) \\ &= \frac{1}{|ab|} \frac{\sin \pi c x}{\pi x} \stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{1}{|ab|} \Pi\left(\frac{\nu}{\min(a, b)}\right) \end{aligned}$$

dans laquelle $c = \min(a, b)$.

III.

1. (a) Soit $f(x)$ la fonction (pour $m > 0$) solution de l'équation différentielle suivante

$$m^2 f(x) - f''(x) = \delta(x) \quad (4)$$

Que devient l'Eq. (4) si on lui applique la transformée de Fourier $\mathcal{F}$?

- (b) En déduire $F(\nu)$, solution de cette équation dans le domaine spectral puis sa solution $f(x)$, dans le domaine spatial, sachant que l'on peut facilement trouver dans les tables de transformée de Fourier la relation suivante

$$\mathcal{F}[\exp(-|x|)] = \frac{2}{1 + 4\pi^2 \nu^2}$$

- (c) Soit la fonction $g(x)$, définie par

$$g(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Calculer $G(\nu) = \mathcal{F}[g(x)]$ (i.e., la transformée de Fourier de $g(x)$).

- (d) Si on remplaçait le membre de droite de l'Eq. (4) par $[\delta(x) - \delta'(x)]$ (au lieu de $\delta(x)$), quelle serait à nouveau, pour $m = 1$, la solution de cette équation différentielle ?

[NOTA : ON RAPPELLE QUE $\delta'(x) * f(x) = f'(x)$]

2. (a) Sans calcul, quelles seraient (toutes) les propriétés intéressantes de

$$H(\nu) = \mathcal{F}[h(x)] = \mathcal{F}[x^2 \exp(-\pi x^2)]$$

que l'on pourraient déduire à partir des propriétés de $h(x)$ et des propriétés de la TF.

- (b) Calculer maintenant $H(\nu) = \mathcal{F}[x^2 \exp(-\pi x^2)]$.

3. Calculer $\mathcal{F}[\cos^2 x]$.

Réponse

1.(a)

$$m^2 f(x) - f''(x) = \delta(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} m^2 F(\nu) - (2\pi j\nu)^2 F(\nu) = 1$$

1.(b)

De la relation précédente, on en déduit

$$F(\nu) = \frac{1}{m^2 + 4\pi^2 \nu^2}$$

Et en se servant du fait que $\exp(-|x|) \stackrel{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} \frac{2}{1+4\pi^2 \nu^2}$ et de la propriété de contraction dilatation de la TF, on trouve

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{m^2 + 4\pi^2 \nu^2}\right] = \frac{1}{2} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{m^2} \cdot \frac{2}{1 + 4\pi^2 (\frac{\nu}{m})^2}\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m^2} \cdot |m| \cdot \exp(-m|x|) \\ &= \frac{1}{2m} \cdot \exp(-m|x|) \end{aligned}$$

1.(c)

En utilisant directement la définition de la TF

$$G(\nu) = \mathcal{F}[g(x)] = \int_0^\infty g(x) \exp(-2\pi j\nu x) dx = \frac{-1}{1 + 2\pi j\nu} \left[\exp(-x(1 + 2\pi j\nu)) \right]_0^\infty = \frac{1}{1 + 2\pi j\nu}$$

1.(d)⁴

$$m^2 f(x) - f''(x) = \delta(x) - \delta'(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} m^2 F(\nu) - (2\pi j\nu)^2 F(\nu) = 1 - 2\pi j\nu$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1 - 2\pi j\nu}{1 + 4\pi^2 \nu^2}\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{(1 - 2\pi j\nu)}{(1 - 2\pi j\nu)(1 + 2\pi j\nu)}\right] \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1 + 2\pi j\nu}\right] \\ &= g(x) \end{aligned}$$

2.(a)⁵

$h(x)$ est réelle et paire, sa TF sera donc à symétrie hermitienne (partie réelle paire) et sans partie imaginaire.

4. Pour la question **III.1.(d)**, on pourrait raisonner aussi de la façon suivante

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1 + 4\pi^2 \nu^2}\right] - \mathcal{F}^{-1}\left[2\pi j\nu \frac{1}{1 + 4\pi^2 \nu^2}\right] \\ &= \frac{1}{2} \exp(-|x|) - \frac{1}{2} \left(\exp(-|x|) \right)' \\ &= \frac{1}{2} \exp(-x) \quad \text{pour } x \geq 0 \end{aligned}$$

5. Pour la question **III.2.(a)**, on peut dire aussi que • le signal $h(x)$ ne comportant pas de discontinuités, on aura un support borné pour $H(\nu)$

- $h(x)$ étant paire, le calcul de la transformée de Fourier ou de la transformée inverse donnera la même chose
- $h(x)$ étant positive, sa transformée de Fourier aura l'allure d'un filtre passe-bas

2.(b)

On a la propriété suivante $\mathcal{F}[x^2 f(x)] = -\frac{1}{4\pi^2} F''(\nu)$

que l'on peut aussi retrouver en utilisant l'une des deux méthodes expliquées dans la correction de l'examen de 2007. On trouve donc que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x^2 \exp(-\pi x^2)] &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\exp(-\pi \nu^2) \right)'' = \frac{1}{2\pi} \left(\nu \exp(-\pi \nu^2) \right)' = \frac{1}{2\pi} \exp(-\pi \nu^2) - \nu^2 \exp(-\pi \nu^2) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} - \nu^2 \right) \exp(-\pi \nu^2)\end{aligned}$$

3.

On se souvient que $\exp(2\pi j x \nu_o) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \delta(\nu - \nu_o)$ [propriété duale de $\delta(x - x_o) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \exp(-2\pi j \nu x_o)$]

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\cos^2 x] &= \frac{1}{2} \mathcal{F}[1 + \cos(2x)] \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{F}[1] + \frac{1}{4} \left(\mathcal{F}[\exp(2jx) + \exp(-2jx)] \right) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{2} \delta(\nu) + \frac{1}{4} \left(\delta\left(\nu - \frac{1}{\pi}\right) + \delta\left(\nu + \frac{1}{\pi}\right) \right)\end{aligned}$$

IV.

On considère des particules suspendues dans un liquide. Soit $f(x, t)$ leur fonction de densité de probabilité à un point x au temps t . Utilisant des arguments probabilistes, Einstein a montré, que pour certains systèmes, l'évolution de $f(x, t)$ est gouvernée par l'équation de diffusion suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t)$$

Dans laquelle D est la constante de diffusion.

1. Supposons que $f(x, t = 0) = \delta(x)$ (i.e., on ajoute des particules dans le liquide en un endroit très localisé, au temps $t = 0$), trouver $f(x, t)$.
2. Trouver la moyenne et la variance de $f(x, t)$.
3. A partir de ses calculs, Einstein a trouvé que la constante de diffusion est donnée par

$$D = \frac{kT}{6\pi\rho R}$$

où k est la constante de Boltzmann's. T est la température, ρ est la viscosité du fluide et R est la taille des particules. En utilisant vos résultats de la question précédente (et en particulier celui de la variance du processus de diffusion $f(x, t)$), que pouvez vous dire sur la diffusion des particules (i.e., leur évolution à travers le temps) en tant que fonction de leur dimension et de la température ?

Réponse**1.**

Soit $F(\nu, t)$ la TF de $f(x, t)$ (avec la correspondance $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$). En utilisant la propriété de dérivation de la TF, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad \frac{\partial}{\partial t} F(\nu, t) = -4\pi^2 \nu^2 D F(\nu, t)$$

qui est une simple équation différentielle du premier ordre dans l'espace de Fourier et que l'on sait résoudre facilement

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\nu, t)}{F(\nu, t)} &= -4\pi^2 D \nu^2 dt \\ \int \frac{\partial F(\nu, t)}{F(\nu, t)} dt &= \int -4\pi^2 D \nu^2 dt \\ F(\nu, t) &= C^{\text{st}} \cdot \exp(-4\pi^2 D \nu^2 t) \\ F(\nu, t) &= F(\nu, 0) \cdot \exp(-4\pi^2 D \nu^2 t) \end{aligned}$$

Puisque l'on sait que $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$ et qu'on a comme condition initiale (donnée par l'énoncé)

$$f(x, 0) = \delta(x) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad F(\nu, 0) = 1$$

$$\text{donc} \quad F(\nu, t) = \exp(-4\pi^2 D \nu^2 t)$$

Maintenant, on à juste à prendre la TF inverse de $F(\nu, t)$ pour trouver $f(x, t)$. On pourrait donc calculer cette solution numériquement et assez facilement en utilisant une FFT (algorithme de Transformée de Fourier rapide) et un ordinateur. Essayons de trouver cette solution analytiquement.

On va se servir du fait que $\exp(-\pi x^2) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \exp(-\pi \nu^2)$

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}\{F(\nu, t)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{\exp(-\pi(2\sqrt{\pi t D} \nu)^2)\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \exp\left(-\pi\left(\frac{x}{2\sqrt{\pi t D}}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4 t D}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(2Dt)}} \exp\left(\frac{-x^2}{2(2tD)}\right) \end{aligned}$$

2.

Il est facile de constater que la solution de cette équation de diffusion est en fait une Gaussienne de moyenne zéro et de variance $2 D t$. On peut donc immédiatement conclure que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X; f(x)] &= 0 \\ \mathbb{E}[X^2; f(x)] &= 2 D t \end{aligned}$$

3.

Rappelons que l'on a trouvé précédemment que la variance du processus de diffusion est donc de $2 D t$.

1. Puisque $D = \frac{kT}{6\pi\rho R}$, alors si T augmente alors D augmente linéairement (i.e., la constante de diffusion sera linéairement plus grande). Alors la variance du processus de diffusion augmentera plus rapidement avec t , ce qui signifie que les particules diffuseront plus rapidement si la température augmente.
2. Similairement, si R augmente, alors D décroîtra au même rythme. Alors la variance du processus de diffusion augmentera plus doucement avec t , ce qui signifie que les particules se diffuseront plus doucement si leur taille augmente.

V.

En analyse vectorielle, l'équation de Laplace est une équation aux dérivées partielles du second ordre, dont le nom est un hommage au physicien mathématicien Pierre-Simon Laplace. Introduite pour les besoins de la mécanique Newtonienne, l'équation de Laplace apparaît dans de nombreuses branches de la physique théorique : astronomie, électrostatique, mécanique des fluides, propagation de la chaleur, diffusion, mouvement brownien, mécanique quantique, traitement du signal et de l'image.

L'équation de Laplace est donnée par l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

avec $f(x, 0) = \phi(x)$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$

1. En posant $F(\nu, y)$ la TF de $f(x, y)$ (avec la correspondance $x \xrightarrow{\mathcal{F}} \nu$), transposer cette équation aux dérivées partielles dans le domaine de Fourier.
2. En notant que $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} F(\nu, y) = 0$, en déduire que

$$f(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt$$

Réponse

1.

En utilisant la correspondance $x \xrightarrow{\mathcal{F}} \nu$, on a, $f(x, y) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu, y)$ et l'équation aux dérivées partielles devient

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 0 \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad -4\pi^2 \nu^2 F(\nu, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(\nu, y) = 0$$

2.

On obtient une simple équation du second ordre dont la solution est (dans le domaine de Fourier)

$$F(\nu, y) = A(\nu) \exp(2\pi\nu y) + B(\nu) \exp(-2\pi\nu y)$$

En utilisant la correspondance $f(x, y=0) = \phi(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \Phi(\nu) = F(\nu, y=0)$, on a, $F(\nu, y=0) = A(\nu) + B(\nu) = \Phi(\nu)$

$$\text{et } \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} F(\nu, y) = 0$$

Si $\nu > 0$, $A(\nu) = 0$. Si $\nu < 0$, $B(\nu) = 0$, d'où

$$\begin{aligned} F(\nu, y) &= F(\nu, y = 0) \cdot \exp(-2\pi y|\nu|) \\ F(\nu, y) &= \Phi(\nu) \cdot \exp(-2\pi y|\nu|) \end{aligned}$$

On se rappelle que (puisque la fonction est paire)

$$\begin{aligned} \exp(-|x|) &\stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{2}{1 + 4\pi^2\nu^2} \\ \frac{2}{1 + 4\pi^2x^2} &\stackrel{\mathcal{F}}{=} \exp(-|\nu|) \end{aligned}$$

On trouve donc par la propriété de contraction-dilatation

$$f(x, y) = \phi(x) * \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}$$

Et finalement

$$f(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(t)}{(x - t)^2 + y^2} dt$$