



DIRO
IFT 3205

DÉMONSTRATION N° 4

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384.

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Transformée en \mathcal{Z}

Rappel

On appelle Transformée en Z (TZ) de la séquence numérique $\{f(n)\}$ échantillonnant la fonction f , la fonction de variable complexe z définie par

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n}$$

et on notera $F(z) = \mathcal{Z}[f(n)]$

1. Trouver les TZ des séquences numériques $\{f(n)\}$ définies par :

1. $f(n) = (n - 1)\mathcal{U}(n)$
 2. $f(n) = n\mathcal{U}(n - 1)$
 3. $f(n) = 2^n \mathcal{U}(n)$
 4. $f(n) = 2^{-n} \mathcal{U}(n + 1)$
 5. $f(n) = e^{-n} [\mathcal{U}(n) - \mathcal{U}(n - k)]$ avec $(k = \mathbb{N}^*)$
 6. $f(n) = n^2 \mathcal{U}(n)$
 7. $f(n) = e^{-n} \sin(wn) \mathcal{U}(n)$
 8. $f(n) = n a^n \mathcal{U}(n)$
-

2. Trouver la TZ inverse de :

$$F(z) = \frac{1}{(z - 2)(z - 3)}$$

3. Trouver la TZ inverse de :

$$F(z) = \frac{z + 3}{z - 2}$$

4. Résoudre l'équation récurrente suivante :

$$\begin{cases} y(n + 2) - y(n + 1) - 6y(n) & = \delta(n) \\ y(0) & = 0 \\ y(1) & = 1 \end{cases}$$

5. Trouver la TZ de la fonction échantillonnée (periode $T = \pi/6$) suivante

$$f(x) = |\sin x| \mathcal{U}(x)$$

6. Trouver l'original (i.e., la TZ inverse), de

$$F(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$$

7. Trouver la TZ inverse de :

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 2z - 3}$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

$$F(z) = \frac{z^{-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-2}}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 4}$$

$$F(z) = (1 + z^{-1})e^{-z^{-1}}$$

8. Quelles sont les TZ de

$$1. f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathcal{U}(n)$$

$$2. f(n) = n \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathcal{U}(n)$$

Nota :

Faites les exercices suivants si vous avez fait, avec facilité, les exercices précédents.
Ces derniers exercices sont donc donnés à titre indicatif.

9. Résoudre les équations récurrentes suivantes :

$$\begin{cases} y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = \delta(n) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = \mathcal{U}(n) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y(n+2) - y(n) = \delta(n-2) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

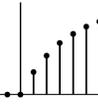
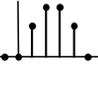
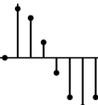
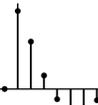
$$\begin{cases} y(n+1) - 2y(n) = n\mathcal{U}(n) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

10. Trouver la TZ inverse de

$$X(z) = \frac{z}{z - z_0} + \frac{z}{z - z_0^*}$$

où z^* est le complexe conjugué de z et on posera $z_0 = e^{r+j\theta}$ et donc $z_0^* = e^{r-j\theta}$

Table de Transformé en Z

	$x(n)$	$X(z)$
	Impulsion $x(n) = \delta(n)$	1
	Echelon unité $x(n) = u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$
	Rampe $x(n) = n.u(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$
	« Exponentielle » $x(n) = a^n.u(n)$	$\frac{1}{1-a.z^{-1}} = \frac{z}{z-a}$
	$(1-a^n).u(n)$	$\frac{(1-a).z^{-1}}{(1-z^{-1}).(1-a.z^{-1})}$ $= \frac{(1-a).z}{(z-1).(z-a)}$
	$n.a^n.u(n)$	$\frac{a.z^{-1}}{(1-a.z^{-1})^2} = \frac{a.z}{(z-a)^2}$
	Sinus $[\sin(n.\omega_0.T_E)].u(n)$	$\frac{\sin(\omega_0.T_E).z^{-1}}{1-2.\cos(\omega_0.T_E).z^{-1}+z^{-2}}$ $= \frac{\sin(\omega_0.T_E).z}{z^2-2.\cos(\omega_0.T_E).z+1}$
	Cosinus $[\cos(n.\omega_0.T_E)].u(n)$	$\frac{1-\cos(\omega_0.T_E).z^{-1}}{1-2.\cos(\omega_0.T_E).z^{-1}+z^{-2}}$ $= \frac{z^2-\cos(\omega_0.T_E).z}{z^2-2.\cos(\omega_0.T_E).z+1}$
	Oscillations amorties $a^n.[\sin(n.\omega_0.T_E)].u(n)$	$\frac{a.\sin(\omega_0.T_E).z^{-1}}{1-2.a.\cos(\omega_0.T_E).z^{-1}+a^2.z^{-2}}$ $= \frac{a.\sin(\omega_0.T_E).z}{z^2-2.a.\cos(\omega_0.T_E).z+a^2}$
	$a^n.[\cos(n.\omega_0.T_E)].u(n)$	$\frac{1-a.\cos(\omega_0.T_E).z^{-1}}{1-2.a.\cos(\omega_0.T_E).z^{-1}+a^2.z^{-2}}$ $= \frac{z^2-a.\cos(\omega_0.T_E).z}{z^2-2.a.\cos(\omega_0.T_E).z+a^2}$