



DIRO
IFT 3205

DÉMONSTRATION N° 4

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384.

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205/](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205/)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Transformée en $\mathcal{Z}$

Rappel

On appelle Transformée en Z (TZ) de la séquence numérique $\{f(n)\}$ échantillonnant la fonction f , la fonction de variable complexe z définie par

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n}$$

et on notera $F(z) = \mathcal{Z}[f(n)]$

I. Trouver les TZ des séquences numériques $\{f(n)\}$ définies par :

1. $f(n) = (n-1)\mathcal{U}(n)$
2. $f(n) = n\mathcal{U}(n-1)$
3. $f(n) = 2^n \mathcal{U}(n)$
4. $f(n) = 2^{-n} \mathcal{U}(n+1)$
5. $f(n) = e^{-n} [\mathcal{U}(n) - \mathcal{U}(n-k)]$ avec $(k = \mathbb{N}^*)$
6. $f(n) = n^2 \mathcal{U}(n)$
7. $f(n) = e^{-n} \sin(wn) \mathcal{U}(n)$
8. $f(n) = n a^n \mathcal{U}(n)$

Réponse

En regardant les tables et en utilisant quant cela est nécessaire les propriétés de la TZ, on obtient

$$\begin{aligned}
 f(n) &= (n-1)\mathcal{U}(n) & \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} & \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} \\
 f(n) &= n\mathcal{U}(n-1) = (n-1)\mathcal{U}(n-1) + \mathcal{U}(n-1) & \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} & \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} \\
 f(n) &= 2^n \mathcal{U}(n) & \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} & \frac{z}{z-2} \\
 f(n) &= 2^{-n} \mathcal{U}(n+1) = 2 \cdot 2^{-(n+1)} \mathcal{U}(n+1) = & \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} & 2z \left(\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \right) \\
 f(n) &= e^{-n} [\mathcal{U}(n) - \mathcal{U}(n-k)] & \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} & \sum_{p=0}^{k-1} e^{-p} z^{-p} = \frac{1 - (ez)^{-k}}{1 - (ez)^{-1}} \\
 f(n) &= n^2 \mathcal{U}(n) & \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} & \mathcal{Z} \left(n \cdot n \mathcal{U}(n) \right) = -z \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right)' = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \\
 f(n) &= e^{-n} \sin(wn) \mathcal{U}(n) & \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} & \frac{e z \sin(w)}{e^2 z^2 - 2e z \cos(w) + 1} \\
 f(n) &= n a^n \mathcal{U}(n) & \stackrel{\mathcal{Z}}{\rightleftharpoons} & -z \left(\frac{z}{z-a} \right)' = \frac{az}{(z-a)^2}
 \end{aligned}$$

II. Trouver la TZ inverse de :

$$F(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

Réponse

Le numérateur a bien un degré inférieur au dénominateur. La décomposition en éléments simples s'écrit :

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} \\ F(z) &= \frac{1}{z} \left[\frac{z}{z-3} - \frac{z}{z-2} \right] \end{aligned}$$

Or les tables nous montrent que $\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z-a}\right) = a^n \mathcal{U}(n)$ avec ($|z| > |a|$). Le facteur $\frac{1}{z}$ traduisant un retard, on obtient donc la séquence

$$f(n) = \mathcal{Z}^{-1}(F(z)) = (3^{n-1} - 2^{n-1}) \mathcal{U}(n-1)$$

III.

Trouver la TZ inverse de :

$$F(z) = \frac{z+3}{z-2}$$

Réponse

a

Le numérateur n'a pas un degré inférieur au dénominateur. On doit régler ce problème avant de décomposer en éléments simples

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z+3}{z-2} = \frac{(z-2)+5}{z-2} = 1 + \frac{5}{z-2} = 1 + 5z^{-1} \frac{z}{z-2} \\ &\Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ f(n) &= \delta(n) + 5 \cdot 2^{n-1} \mathcal{U}(n-1) \end{aligned}$$

IV.

Résoudre l'équation récurrente suivante :

$$\begin{cases} y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) &= \delta(n) \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{cases}$$

Réponse

On va utiliser le fait que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y(n)\} &= Y(z) \\ \mathcal{Z}\{y(n+1)\} &= z[Y(z) - y(0)] = zY(z) \\ \mathcal{Z}\{y(n+2)\} &= z^2[Y(z) - y(0) - z^{-1}y(1)] = z^2[Y(z) - z^{-1}] \end{aligned}$$

L'équation transformée s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
(z^2 - z - 6)Y(z) - z &= 1 \\
Y(z) &= \frac{z+1}{z^2 - z - 6} = \frac{1/5}{z+2} + \frac{4/5}{z-3} \\
&\Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\
y(n) &= \frac{1}{5} \left[(-2)^{n-1} + 4(3)^{n-1} \right] \mathcal{U}(n-1)
\end{aligned}$$

V. Trouver la TZ de la fonction échantillonnée (periode $T = \pi/6$) suivante

$$f(x) = |\sin x| \mathcal{U}(x)$$

Réponse

On doit revenir à la définition car les tables ne nous sont d'aucun secours

$$\begin{aligned}
F(z) &= \left(\frac{1}{2} z^{-1} + \frac{\sqrt{3}}{2} z^{-2} + z^{-3} + \frac{\sqrt{3}}{2} z^{-4} + \frac{1}{2} z^{-5} \right) + \left(\frac{1}{2} z^{-7} + \frac{\sqrt{3}}{2} z^{-8} + z^{-9} + \dots \right) \\
F(z) &= F_0(z) \times \left(1 + z^{-6} + z^{-12} + \dots \right) \\
F(z) &= F_0(z) \times \frac{1}{1 - z^{-6}}
\end{aligned}$$

VI. Trouver l'original (i.e., la TZ inverse) de

$$F(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$$

à l'aide d'une décomposition dans $\mathbb{C}$, puis en utilisant le développement en série entière de la variable z^{-1}

Réponse¹

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) = \frac{1}{2} z^{-1} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+1} \right) \\
&\Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\
f(n) &= \frac{1}{2} \left[1 - (-1)^{n-1} \right] \mathcal{U}(n-1)
\end{aligned}$$

C'est à dire $f(2p) = 1$ pour $p > 0$ et $f(2p+1) = 0$.

1. Une autre solution serait d'utiliser le développement en série de la fonction $1/(1-x) \approx 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

$$\begin{aligned}
F(z) &= z^2 \cdot \frac{1}{1 - z^{-2}} = z^{-2} \left(1 + z^{-2} + z^{-4} + \dots \right) \\
&\Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\
f(n) &= \delta(n-2) + \delta(n-4) + \dots + \delta(n-2p) + \dots
\end{aligned}$$

et on retrouve $f(2p) = 1$ pour $p > 0$ et $f(2p+1) = 0$.

VII. Trouver la TZ inverse de :

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 2z - 3}$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

$$F(z) = \frac{z^{-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-2}}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 4}$$

$$F(z) = (1 + z^{-1})e^{-z^{-1}}$$

Réponse

a

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z}{z^2 + 2z - 3} = \frac{z}{(z+3)(z-1)} = \frac{3/4}{(z+3)} + \frac{1/4}{(z-1)} \\ &\Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ f(n) &= \frac{1}{4} [1 + (-3)^n] \mathcal{U}(n-1) \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = 1 + \frac{3z - 2}{z^2 - 3z + 2} = 1 + \left(\frac{-1}{z-1} + \frac{4}{z-2} \right) \\ &\Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ f(n) &= \delta(n) - \mathcal{U}(n-1) + 4 \cdot 2^{n-1} \mathcal{U}(n-1) = \delta(n) + (4 \cdot 2^{n-1} - 1) \mathcal{U}(n-1) \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z^{-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}z^{-2}}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z - \frac{\sqrt{2}}{2}}{z^2 - 2z \cos(\frac{\pi}{4}) + 1} \\ &= z^{-1} \left(\frac{z^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}z}{z^2 - 2z \cos(\frac{\pi}{4}) + 1} \right) \\ F(z) &= z^{-1} \left(\frac{z^2 - \cos(\frac{\pi}{4})z}{z^2 - 2z \cos(\frac{\pi}{4}) + 1} \right) \\ &\Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ f(n) &= \cos\left[\frac{\pi}{4}(n-1)\right] \mathcal{U}(n-1) \end{aligned}$$

f

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z}{z^2 + 4} = z^{-1} \left\{ \frac{z^2}{z^2 + 4} \right\} \\ &\Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ f(n) &= 2^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right) \mathcal{U}(n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{\text{f}} \quad F(z) &= (1+z^{-1})e^{-z^{-1}} = (1+z^{-1}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-(n+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} z^{-n} \\
&\quad \Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\
f(n) &= \frac{(-1)^n}{n!} \mathcal{U}(n) + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \mathcal{U}(n-1)
\end{aligned}$$

VIII. Quelles sont les TZ de

1. $f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathcal{U}(n)$
2. $f(n) = n \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathcal{U}(n)$

Réponse

a

Dans cet exemple, on ne doit pas tomber dans le piège de faire, dans le domaine transformée, la convolution des deux transformé de chacun des termes puissances. En effet, cette séquence numérique se simplifie et cette simplification nous simplifiera le calcul de sa TZ

$$f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathcal{U}(n) = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = 4 \left(\frac{1}{6}\right)^n \mathcal{U}(n) \quad \xrightarrow{\mathcal{Z}} \quad F(z) = \frac{4z}{z - \frac{1}{6}}$$

b

On utilise la propriété $\mathcal{Z}[n f(n)] = -z F'(z)$

$$f(n) = n \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathcal{U}(n) \quad \xrightarrow{\mathcal{Z}} \quad F(z) = -z \left(\frac{z}{z - \frac{1}{3}} \right)' = \frac{\frac{1}{3}z}{(z - \frac{1}{3})^2}$$

IX.

Résoudre les équations récurrentes suivantes :

$$\begin{cases} y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) &= \delta(n) \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) &= \mathcal{U}(n) \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y(n+2) - y(n) &= \delta(n-2) \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(n+1) - 2y(n) &= n\mathcal{U}(n) \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Réponse**a)**

$$\begin{aligned} z^2[Y(z) - z^{-1}] - 3zY(z) + 2Y(z) &= 1 \\ Y(z) &= \frac{z+1}{(z-2)(z-1)} = \frac{3}{z-2} - \frac{2}{z-1} \\ &\Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ y(n) &= (3 \cdot 2^{n-1} - 2)\mathcal{U}(n-1) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} z^2[Y(z) - z^{-1}] - 2zY(z) + 2Y(z) &= \frac{z}{z-1} \\ Y(z) &= \frac{z^2}{(z-1)(z^2-2z+2)} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{z^2-2z+2} \end{aligned}$$

Nota : le numérateur ($\alpha = 2$) de la fraction $\frac{1}{(z^2-2z+2)}$ peut être retrouvé soit en utilisant la formule donnée en cours (chap. 10, slide numéro 10), soit en ré-écrivant la fraction avec le même dénominateur et en identifiant les deux membres de l'égalité ou soit en donnant une valeur particulière à z , par exemple $z = 0$ (on trouve ainsi l'équation $0 = -1 + \alpha/2$ et donc $\alpha = 2$).

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{z-1} + 2\sqrt{2}z^{-1} \left\{ \frac{z^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{z^2 - 2z + 2} \right\} = \frac{1}{z-1} + 2\sqrt{2}z^{-1} \left\{ \frac{z^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{z^2 - 2\sqrt{2}\cos(\pi/4)z + (\sqrt{2})^2} \right\} \\ &\Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ y(n) &= \mathcal{U}(n-1) + 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} \sin\left[\frac{\pi}{4}(n-1)\right] \mathcal{U}(n-1) \\ y(n) &= \left[1 + 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1}\right] \mathcal{U}(n-1) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
Y(z) &= z^{-2} \left\{ \frac{1}{2z^2 - 1} \right\} = \frac{z^{-3}}{2} \left\{ \frac{z}{z^2 - 1/2} \right\} = \frac{z^{-3}}{2} \left\{ \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}z}{(z - \frac{\sqrt{2}}{2})} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}z}{(z + \frac{\sqrt{2}}{2})} \right\} \\
&\Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\
y(n) &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-3} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-3} \right\} \mathcal{U}(n-3)
\end{aligned}$$

En utilisant directement l'équation aux différences, on trouve $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $y(2) = 0$, $y(3) = 0$, $y(4) = 0.5$, $y(5) = 0$, $y(6) = 0.25$, $y(7) = 0$, $y(8) = 0.125$... On trouve donc facilement une formule plus simple résumant cette séquence numérique en disant $y(2p+1) = 0$ et $y(2p) = 0.5^{p-1}$ pour $p \geq 2$

d

$$\begin{aligned}
zY(z) - 2Y(z) &= \frac{z}{(z-1)^2} \\
Y(z) &= \frac{z}{(z-2)(z-1)^2} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{2}{(z-1)} \\
&\Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\
y(n) &= 2 \cdot 2^{n-1} \mathcal{U}(n-1) - (n-1) \mathcal{U}(n-1) - 2 \mathcal{U}(n-1) \\
y(n) &= [2^n - n - 1] \mathcal{U}(n-1)
\end{aligned}$$

Nota : le numérateur (-2) de la fraction $\frac{1}{(z-1)}$ peut être retrouvé soit en utilisant la formule donnée en cours ou soit en donnant une valeur particulière à z , par exemple $z = 0$ (conduisant à $0 = -1 - 1 - A$).

X.

Trouver la TZ inverse de

$$X(z) = \frac{z}{z - z_0} + \frac{z}{z - z_0^*}$$

où z^* est le complexe conjugué de z et on posera $z_0 = e^{r+j\theta}$ et donc $z_0^* = e^{r-j\theta}$

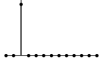
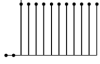
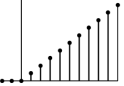
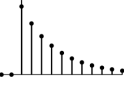
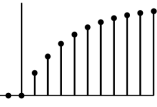
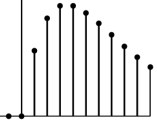
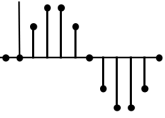
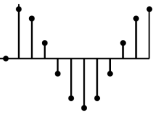
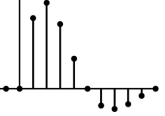
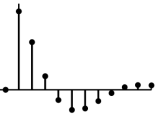
Réponse

$$\begin{aligned}
e^{an} \mathcal{U}(n) &\stackrel{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} \frac{z}{z - e^a} \\
x(n) = e^{rn} (e^{jn\theta} + e^{-jn\theta}) \mathcal{U}(n) &\stackrel{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} X(z) = \frac{z}{z - z_0} + \frac{z}{z - z_0^*} = \frac{2z(z - e^r \cos \theta)}{z^2 - 2e^r \cos \theta z + e^{2r}}
\end{aligned}$$

qui est aussi bien de la forme générale

$$X(z) = \frac{z(z - c)}{z^2 - 2cz + b}$$

Table de Transformé en Z

	$x(n)$	$X(z)$
	Impulsion $x(n) = \delta(n)$	1
	Echelon unité $x(n) = u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$
	Rampe $x(n) = n \cdot u(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{z}{(z - 1)^2}$
	« Exponentielle » $x(n) = a^n \cdot u(n)$	$\frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$
	$(1 - a^n) \cdot u(n)$	$\frac{(1 - a) \cdot z^{-1}}{(1 - z^{-1}) \cdot (1 - a \cdot z^{-1})}$ $= \frac{(1 - a) \cdot z}{(z - 1) \cdot (z - a)}$
	$n \cdot a^n \cdot u(n)$	$\frac{a \cdot z^{-1}}{(1 - a \cdot z^{-1})^2} = \frac{a \cdot z}{(z - a)^2}$
	Sinus $[\sin(n \cdot \omega_0 \cdot T_E)] \cdot u(n)$	$\frac{\sin(\omega_0 \cdot T_E) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot T_E) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$ $= \frac{\sin(\omega_0 \cdot T_E) \cdot z}{z^2 - 2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot T_E) \cdot z + 1}$
	Cosinus $[\cos(n \cdot \omega_0 \cdot T_E)] \cdot u(n)$	$\frac{1 - \cos(\omega_0 \cdot T_E) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot T_E) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$ $= \frac{z^2 - \cos(\omega_0 \cdot T_E) \cdot z}{z^2 - 2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot T_E) \cdot z + 1}$
	Oscillations amorties $a^n \cdot [\sin(n \cdot \omega_0 \cdot T_E)] \cdot u(n)$	$\frac{a \cdot \sin(\omega_0 \cdot T_E) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot a \cdot \cos(\omega_0 \cdot T_E) \cdot z^{-1} + a^2 \cdot z^{-2}}$ $= \frac{a \cdot \sin(\omega_0 \cdot T_E) \cdot z}{z^2 - 2 \cdot a \cdot \cos(\omega_0 \cdot T_E) \cdot z + a^2}$
	$a^n \cdot [\cos(n \cdot \omega_0 \cdot T_E)] \cdot u(n)$	$\frac{1 - a \cdot \cos(\omega_0 \cdot T_E) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot a \cdot \cos(\omega_0 \cdot T_E) \cdot z^{-1} + a^2 \cdot z^{-2}}$ $= \frac{z^2 - a \cdot \cos(\omega_0 \cdot T_E) \cdot z}{z^2 - 2 \cdot a \cdot \cos(\omega_0 \cdot T_E) \cdot z + a^2}$