



DIRO
IFT 3205

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *15/04/2011*

I	Filtrage Numérique (38 pts)
II	Analyse Spectrale (30 pts)
III	Application : Cryptage du Son (43 pts)
Total	111 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Filtrage Numérique (38 pts)

1. Considérons le filtre numérique décrit par la fonction de transfert suivante

$$H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 1.267z + 0.81}$$

En se rappelant que lorsque les pôles sont complexes, il est plus simple de les calculer sous la formes module/argument, i.e., $r \exp(j\theta)$ et que

$$(z - r \exp(j\theta))(z - r \exp(-j\theta)) = z^2 - 2zr \cos(\theta) + r^2$$

on vous demande de faire une étude de ce filtre, et plus précisément de :

- (a) Trouver l'équation aux différences associée à ce filtre.
<5 pts>
 - (b) Préciser de quelle famille ce filtre fait partie (RIF ou IIR) et son ordre.
<2 pts>
 - (c) De calculer les pôles et les zéros de la fonction de Transfert et de les représenter dans le plan complexe avec le cercle de rayon unité.
<5 pts>
 - (d) Préciser, en le justifiant, si ce filtre est stable.
<2 pts>
 - (e) À partir de la fonction de transfert et de la position des pôles et des zéros de celle-ci :
 - i. Calculer le gain statique et le gain à la fréquence de Shannon.
<2 pts>
 - ii. Tracer l'allure du module de la réponse fréquentielle de ce filtre.
<4 pts>
 - (f) Donner la réponse impulsionnelle du système à partir de l'équation aux différences (4 premiers échantillons, i.e. ; $y(0), y(1), y(2), y(3)$)
<3 pts>
 - (g) Si on considère un signal d'entrée $x(n)$ dont l'amplitude est aléatoire (entre 0 et 100), de 1000 échantillons avec une fréquence d'échantillonnage de $F_e = 1000$ Hz, et que l'on implémente l'équation aux différences associée à ce filtre. Que va t-on obtenir comme signal de sortie $y(n)$? Justifier et détailler votre réponse.
<5 pts>
-

2. Considérons le filtre numérique décrit par la fonction de transfert suivante

$$H(z) = 0.6 \frac{z + z^{-1}}{z - 0.2}$$

- (a) Trouver la réponse de ce filtre à une rampe $n \mathcal{U}(n)$.
<10 pts>
-

Réponse**1.(a)**

$$\begin{aligned}
\text{On a} \quad H(z) &= \frac{z^2 - 1}{z^2 - 1.267z + 0.81} \\
\frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{1 - z^{-2}}{1 - 1.267z^{-1} + 0.81z^{-2}} \\
Y(z)\{1 - 1.267z^{-1} + 0.81z^{-2}\} &= X(z)\{1 - z^{-2}\} \\
&\Downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\
y(n) &= 1.267y(n-1) - 0.81y(n-2) + x(n) - x(n-2)
\end{aligned}$$

<5 pts>

1.(b)

Filtre RII (ou IIR en anglais), i.e., de réponse impulsionnelle infinie du second ordre (présence de $y(n-2)$ et pôles actifs qui ne se trouvent pas à l'origine), conduisant à une équation récursive.

<2 pts>

1.(c)

$$\text{On a} \quad (z - r \exp(j\theta))(z - r \exp(-j\theta)) = z^2 - 2zr \cos(\theta) + r^2 = z^2 - 1.267z + 0.81$$

En identifiant, on trouve $r = 0.9$ et $2r \cos(\theta) = 1.267$, ce qui donne $\theta \approx 0.79 \approx \frac{\pi}{4}$ (fréquence numérique $= \theta/(2\pi) \approx 0.125$) et :

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{z^2 - 1}{z^2 - 1.267z + 0.81} = \frac{(z-1)(z+1)}{(z - 0.9 \exp(j0.79))(z - 0.9 \exp(-j0.79))} \\
&= \frac{(z-1)(z+1)}{(z - 0.9 \exp(j\frac{\pi}{4}))(z - 0.9 \exp(-j\frac{\pi}{4}))}
\end{aligned}$$

Donc deux zéros : $z_1 = 1$ et $z_2 = -1$

<2 pts>

et deux pôles complexes conjugués :

$$\begin{aligned}
p_1 &\approx 0.9 \exp(j0.79) \approx 0.9 \exp(j\frac{\pi}{4}) \text{ et} \\
p_2 &\approx 0.9 \exp(-j0.79) \approx 0.9 \exp(-j\frac{\pi}{4}).
\end{aligned}$$

<3 pts>

1.(d)

Filtre stable puisque les deux pôles sont à l'intérieur du cercle de rayon unité.

<2 pts>

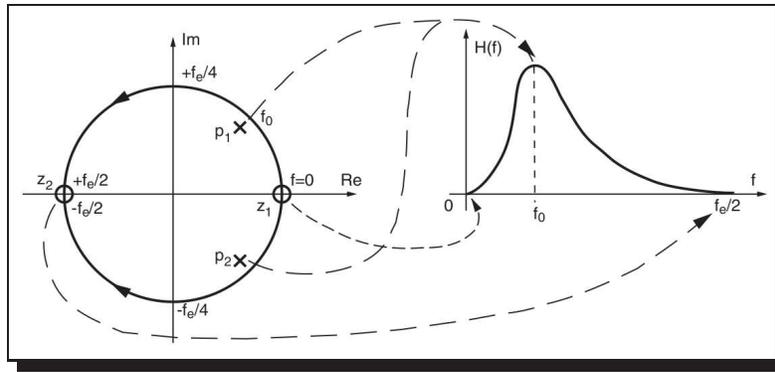
1.(e)

Gain statique $H(z=1) = 0$ (pour $f = 0$) et gain à la fréquence de Shannon (pour la fréquence numérique $f = 1/2$) $H(z=-1) = 0$

<2 pts> + <2 pts>

1.(f)

En utilisant l'équation aux différences, et pour $x(n) = \delta(n)$, on obtient



$$y(n) = 1.267 y(n-1) - 0.81 y(n-2) + x(n) - x(n-2)$$

$$y(0) = 1.267 y(-1) - 0.81 y(-2) + x(0) - x(-2) = 1$$

$$y(1) = 1.267 y(0) - 0.81 y(-1) + x(1) - x(-1) = 1.267$$

$$y(2) = 1.267 y(1) - 0.81 y(0) + x(2) - x(0) = 1.267 \times 1.267 - 0.81 - 1 = -0.2047$$

$$y(3) = 1.267 y(2) - 0.81 y(1) + x(3) - x(1) = 1.267 \times (-0.2047) - 0.81 \times 1.267 \approx -1.2856$$

<3 pts>

1.(g)

Cette question est similaire à celle du TP (Filtre RIF et RII, Question I). Le signal $x(n]$ est un signal de sortie $y(n]$ correspondant à du bruit (blanc ou non corrélé) contenant, par définition, toute les fréquences. A la suite de ce filtrage (i.e., à la suite de l'implémentation de cette équation aux différences), la fréquence numérique $\nu = 0.125$ sera amplifiée et toute les autres fréquences seront atténuées (cf. l'allure de la réponse fréquentielle du filtre). Il en résultera un signal de sortie périodique (et bruitée car le filtre n'est pas parfait) de fréquence numérique $\nu = 0.125$ ou de fréquence physique $f = F_e \times 0.125 = 1000 \times 0.125 = 125$ Hz (i.e., il existera 8 périodes complètes pour l'ensemble du signal de sortie $y(n]$).

<5 pts>

2.(a)

Les tables nous montre que la transformée en Z d'une rampe $n \mathcal{U}(n)$ est $z/(z-1)^2$, donc

<2 pts>

$$\begin{aligned} \text{On a } H(z) &= 0.6 \frac{z^2 + 1}{z(z-0.2)} \frac{z}{(z-1)^2} = 0.6 \frac{z^2 + 1}{(z-0.2)(z-1)^2} = \frac{0.975}{(z-0.2)} + \frac{1.5}{(z-1)^2} + \frac{-0.375}{(z-1)} \\ &\downarrow \mathcal{Z}^{-1} \\ y(n) &= 0.975 (0.2)^{n-1} \mathcal{U}(n-1) + 1.5 (n-1) \mathcal{U}(n-1) - 0.375 \mathcal{U}(n-1) \end{aligned}$$

<8 pts> (moitié des points pour le calcul juste des premiers échantillons avec l'équation aux différences)

NOTA : Rappel : Le paramètre de la première fraction est trouvée en multipliant par $(z-0.2)$ et en posant $z = 0.2$. Pour ce paramètre, on a $0.6 \times (0.2^2 + 1)/(0.2 - 1)^2 = 0.975$.

Le paramètre de la deuxième fraction est trouvée en multipliant par $(z-1)^2$ et en posant $z = 1$. Pour ce paramètre, on a $0.6 \times (1+1)/(1-0.2) = 1.5$.

Le paramètre de la troisième fraction est trouvée en posant $z = 0$, conduisant à l'équation $0.6(0+1)/(-0.2)(-1)^2 = (0.975/-0.2) + (1.5/(0-1)^2) + x/(-1)$, c'est à dire $-3 = -4.875 + 1.5 - x$, c'est à dire $x = 3 - 4.875 + 1.5 = -0.375$.

II. Analyse Spectrale (30 pts)

Soit un signal analogique dont on souhaite analyser numériquement le spectre par échantillonnage puis TFD (Transformée de Fourier Discrète). On s'attend éventuellement que ce signal soit de la forme

$$x(t) = \alpha \cdot \sin(2\pi 40t) + \beta \cdot \sin(2\pi 100t) + \text{Bruit Blanc Gaussien}$$

avec α , β et le Bruit Blanc Gaussien d'amplitude et d'écart type plus ou moins importante selon l'endroit où est émis le signal.

1. Que devrait être la fréquence d'échantillonnage F_e minimale de ce signal ?
<3 pts>
2. Si on échantillonne ce signal à la fréquence d'échantillonnage $F_e = 600$ Hz et que l'on prenne $N = 1000$ échantillons (fenêtre d'acquisition rectangulaire) de celui-ci.
 - (a) Calculer la durée (en seconde) du signal.
<3 pts>
 - (b) Calculer la résolution fréquentielle du spectre.
<3 pts>
 - (c) Expliquez (i.e., donner les trois raisons) pourquoi cette analyse spectrale ne permettra pas de retrouver deux Dirac (ou deux raies spectrales infiniment fines) aux deux fréquences associées aux deux signaux sinusoidaux de $x(t)$. Justifiez votre réponse.
<6 pts>
3. Quelle est la fréquence d'échantillonnage la plus proche de $F_e = 600$ Hz (et qui respecte Shannon) qui nous permette de retrouver deux raies spectrales les plus fines aux deux fréquences associées aux deux signaux sinusoidaux de $x(t)$ et qui utiliserait aussi $N = 1024$ échantillons du signal pour pouvoir utiliser une FFT.
<5 pts>
4. On veut garder pour des raisons techniques la fréquence d'échantillonnage $F_e = 600$ Hz. Donner la valeur de N , la plus proche mais inférieure à 1024, qui ne soit pas nécessairement une puissance de 2 et qui permette de retrouver deux raies spectrales les plus fines possibles. Justifier votre réponse.
<5 pts>
5. On désire obtenir un spectre un peu moins bruité. Pour cela, on va utiliser la technique du périodogramme moyenné avec un chevauchement des petites fenêtres (rectangulaires) d'acquisition de 50% et on dispose au départ de $N = 1000$ échantillons du signal avec une $F_e = 600$ Hz que l'on désire garder. Donner une stratégie possible (i.e., une taille des petites fenêtres dont le nombre d'échantillons n'est pas nécessairement une puissance de 2 et un nombre de moyennage) permettant d'avoir des raies les plus fines et un spectre débruité.
<5 pts>

Réponse

1

Pour respecter la condition de Shannon, la fréquence d'échantillonnage F_e minimale doit être égale au moins à deux fois la fréquence maximale contenue dans le signal. Le signal contient éventuellement une sinusoïde de fréquence 40 Hz et une autre de fréquence 100 Hz, donc, la fréquence d'échantillonnage minimale est donc $F_e = 200$ Hz.

<3 pts>

2.(a)(b)

$F_e = 600$ Hz respecte la condition de Shannon et avec $N = 1000$ échantillons du signal permet d'obtenir une résolution fréquentielle de $\Delta\nu = 1/T$ (plus petite fréquence détectable dans le signal) avec T la durée du signal. $T = N T_e$ avec $T_e = 1/F_e$ la période d'échantillonnage. On trouve donc $T = 1000 (1/600) = \frac{5}{3} \approx 1.666$ (en secondes) et $\Delta\nu = \frac{3}{5} = 0.6$.

<2pts> + <3 pts>

2.(c)

1-] La résolution fréquentielle $\Delta\nu$ n'étant pas un sous multiple de 40 Hz et de 100 Hz, l'énergie fréquentielle de ces deux sinusoides se répartiront entre deux bins fréquentielles. Par exemple l'énergie de la sinusoïde de fréquence 40 Hz se répartira entre le bin de fréquence $66 \times 0.6 = 39.6$ Hz et $66 \times 0.6 = 40.2$.

<4 pts>

2-] De plus la fenêtre rectangulaire d'acquisition, (qui va prendre en compte des fausses discontinuités du signal aux extrémités) va augmenter cette élargissement fréquentielle et réaliser, en fait, une convolution du spectre idéale avec la TF d'une porte, i.e., un sinus cardinal.

<1 pt>

3-] La présence du bruit blanc va créer des composantes fréquentielles à toute les fréquences et élargir aussi ces raies spectrales.

<1 pt>

NOTA : Un BONUS de **2 pts** supplémentaires si on avait les 3 réponses justes !

3

- Le premier sous multiple de 40 Hz et de 100 Hz est $\Delta\nu = 0.5$ (sous multiple inférieure à 0.6) qui correspond à une longueur du signal, avec $1024 = 2^{10}$ échantillons à $T = 1024 T_e = (1/\Delta\nu) = (1/0.5) = 2$ soit une période d'échantillonnage de $T_e \approx 1.953 \cdot 10^{-3}$ ou $F_e = 512$ Hz (i.e., $1024 \times \Delta\nu = 1024 \times 0.5 = 512$).

- Autre possibilité : Le premier sous multiple (supérieure à 0.6 cette fois) de 40 Hz et de 100 Hz est $\Delta\nu = 0.8$. Avec 1024 échantillons, cela correspond à $F_e = 1024 \times 0.8 = 819.2$ Hz.

<5 pts>

4

On a $\Delta\nu = 1/N T_e = F_e/N = 600/N$ avec $N < 1024$ permettant à $\Delta\nu$ d'être un sous multiple de la fréquence 40 Hz et 100 Hz. Avec $F_e = 600$ Hz et $N = 1024$, $\Delta\nu = 0.58$. Le premier sous multiple de la fréquence 40 Hz et 100 Hz supérieur (à cause de la contrainte $N < 1024$) à $\Delta\nu = 0.58$ est $\Delta\nu = 0.8 = 600/N$ qui nous donne $N = 750$.

<5 pts>

5

On doit donc trouver une taille N_p de petites fenêtres d'acquisition qui permette de conserver une résolution spectrale de $\Delta\nu$ sous multiples de 40 Hz et 100 Hz. On a $\Delta\nu = 1/N_p T_e = F_e/N_p = 600/N_p$. Par exemple $\Delta\nu = 20 = 600/N_p$ serait le premier sous multiples commun à ces deux fréquences, qui nous conduirait à $N_p = 30$. Avec un chevauchement de 50% cela conduirait à $1000/30 \approx 33$ subdivisions du signal ou 65 subdivisions ou taille N_p de petites fenêtre d'acquisition se chevauchant de 50%.

On pourrait aussi considérer $N_p = 60$ pour un $\Delta\nu = 10$ et 31 petites fenêtre d'acquisition se chevauchant de 50% (ou $N_p = 120$: : $\Delta\nu = 5$ et 15 moyennages, ou $N_p = 240$: : $\Delta\nu = 2.5$ et 9 moyennages, ou $N_p = 480$: : $\Delta\nu = 1.25$ et 3 moyennages).

<5 pts>

III. Cryptage du Son (43 pts)

Dans cet exercice, on souhaite réaliser un système (simple) de cryptage du son proche de celui utilisé par les chaînes cryptées payantes (comme la chaîne Française Canal+) ou celui utilisé pour crypter une communication téléphonique.

Pour un signal sonore (signal réel $x(t)$) échantillonnée (avec une fréquence d'échantillonnage F_e respectant la condition de Shannon) et de bande spectrale s'étendant de la fréquence 0 à ν_{\max} (ν_{\max} étant la fréquence maximale contenue dans ce signal), ce cryptage consiste, en fait, à permuter la partie positive et la partie négative du spectre comme indiquée sur la Fig. 1 (et faire ainsi ce que l'on appelle un retournement, une permutation spectrale ou une inversion de spectre). Le son devient alors incompréhensible et peut être décrypté par l'opération inverse.

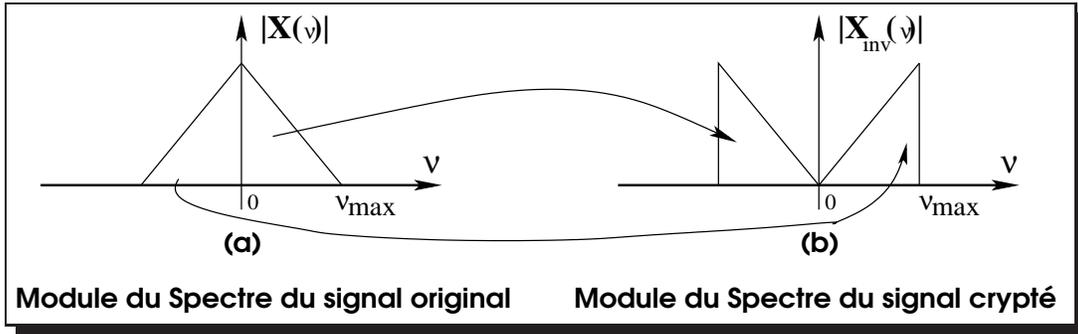


FIG. 1 – Principe de la méthode de cryptage. (a) Spectre du signal à crypter. (b) Spectre du signal crypté.

On s'intéressera à deux méthodes de cryptage, dont le principe sera sensiblement équivalent et dont l'une sera comprise grâce à la Transformée de Fourier et l'autre grâce à la Transformée en Z.

1. Transformée de Fourier

On supposera dans cette question que $F_e = 48$ KHz et $\nu_{\max} = 10$ KHz.

- Rappeler pourquoi $|X(\nu)|$, le module du spectre du signal original $x(t)$ est pair.
<3 pts>
- Montrer que pour tout signal $x(t)$ de Transformée de Fourier $X(\nu)$ (i.e., $x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} X(\nu)$), l'opération consistant à multiplier $x(t)$ par une cosinusoïde de fréquence ν_0 , on a
<5 pts>

$$\mathcal{F}\{2x(t) \cos(2\pi\nu_0 t)\} = X(\nu - \nu_0) + X(\nu + \nu_0)$$

- Dessiner le module du spectre obtenu par l'opération précédente consistant à multiplier $x(t)$ par une cosinusoïde de fréquence $\nu_0 = \nu_{\max}$ (on rappelle que ν_{\max} est la fréquence maximale contenue dans ce signal).
<4 pts>
- En déduire l'opération spectrale que l'on doit ensuite faire pour réaliser le spectre du signal crypté (cf. Fig. 1.b).
<5 pts>
- Expliquer pourquoi le signal analogique sonore correspondant au spectre du signal crypté est devenu inintelligible.
<4 pts>

(f) Expliquer maintenant quelle est l'opération temporelle permettant de décrypter le signal crypté (i.e., quelle opération permet de passer du module du spectre du signal crypté au module du spectre du signal original). Justifiez bien votre réponse (en illustrant, si possible, votre explication par des figures).

<4 pts>

(g) Soit $y(t)$ le signal crypté. Exprimer $z(t) = y(t) \cos(2\pi\nu_{\max}t)$ en fonction de $x(t)$ (en linéarisant les termes trigonométriques). Calculer $Z(\nu)$, le spectre de $z(t)$ et exprimer ce spectre en fonction de $X(\nu)$. Retrouver ensuite les opérations nécessaires au décryptage du signal $y(t)$ que vous avez trouvés à la question précédente.

<4 pts>

2. Transformée en Z

Dans cette partie, on va proposer un cryptage, équivalent à la question précédente, et dont on va comprendre le principe grâce à la Transformée en Z. On supposera dans cette question que la fréquence d'échantillonnage respecte tout juste la condition de Shannon, i.e., $F_e = 2\nu_{\max}$ et que $|X(\nu)|$ à la forme spectrale (entre $-\nu_{\max}$ et ν_{\max}) donnée en Fig. 1. On considère le cryptage simple qui consiste à inverser le signe d'un échantillon sur deux :

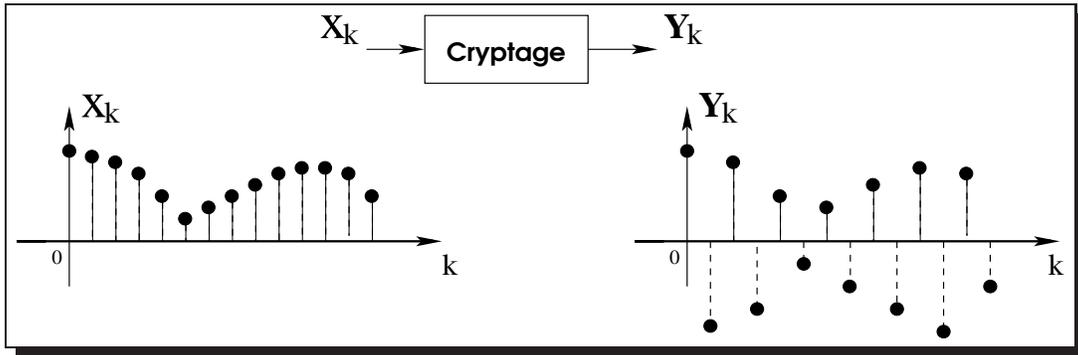


FIG. 2 – Effet temporel du cryptage

(a) Rappeler pourquoi $|X(\nu)|$ est périodique et tracer ce spectre en indiquant en abscisse où se situe la fréquence d'échantillonnage F_e .

<3 pts>

(b) Donner l'équation donnant $y(k)$ (ou y_k) en fonction de $x(k)$ (ou x_k).

<4 pts>

(c) Déterminer $Y(z)$ en fonction de $X(z)$ et En déduire que le spectre $Y(\nu)$ [on rappelle que $z = \exp(2\pi j\nu)$ avec ν une fréquence numérique] est relié au spectre de $X(\nu)$ par la relation :

$$Y(\nu) = X\left(\nu + \frac{1}{2}\right)$$

et tracer le spectre du signal crypté.

<7 pts>

RAPPEL : Pour cette question, on rappelle la propriété suivante de la Transformée en Z

$$\mathcal{Z}[a^k x(k)] = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Réponse

1.(a)

On calcule la TF d'un signal réel $x(t)$. Par symétrie hermitienne, $|X(\nu)|$ est donc pair.

<3 pts>

1.(b)

Avec la convention $x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} X(\nu)$, et en utilisant le fait que $\cos(2\pi\nu_0 t) = \frac{1}{2}(\exp(2\pi j\nu_0 t) + \exp(-2\pi j\nu_0 t))$, avec $\exp(2\pi j\nu_0 t) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \delta(\nu - \nu_0)$, on a (propriété de décalage)¹

$$2x(t) \cos(2\pi\nu_0 t) = x(t) \cdot (\exp(2\pi j\nu_0 t) + \exp(-2\pi j\nu_0 t)) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} X(\nu) * (\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0))$$

$$\stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} X(\nu - \nu_0) + X(\nu + \nu_0)$$

NOTA : En télécommunication, cette procédure s'appelle une modulation d'amplitude (AM) et la fréquence ν_0 , la porteuse de cette modulation d'amplitude.

<5 pts>

1.(c)

On a donc $y = 2x(t) \cos(2\pi\nu_{\max} t) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} Y(\nu) = X(\nu - \nu_{\max}) + X(\nu + \nu_{\max})$, et, graphiquement

<4 pts>

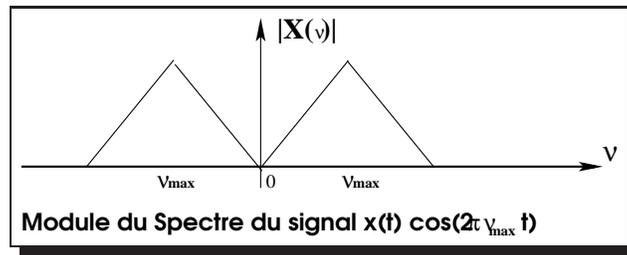


FIG. 3 – Représentation de $Y(\nu) = X(\nu - \nu_{\max}) + X(\nu + \nu_{\max})$

1.(d)

À partir du spectre précédent, l'opération spectrale que l'on doit ensuite réaliser pour obtenir le module du spectre du signal crypté est simplement un filtre passe-bas de fréquence de coupure ν_{\max} .

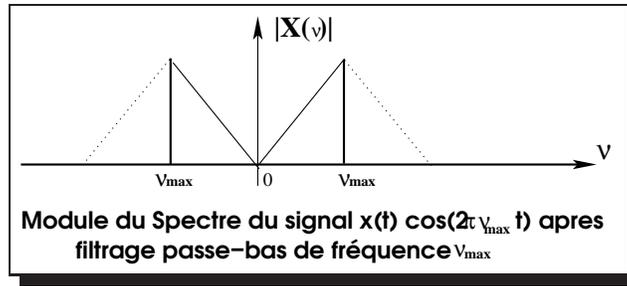
Si on veut exprimer mathématiquement cette opération spectrale, il s'agit de multiplier $Y(\nu)$ par une porte de largeur $2\nu_{\max}$, i.e.,

$$Y(\nu) \cdot \Pi_{2\nu_{\max}}(\nu) = \left\{ X(\nu - \nu_{\max}) + X(\nu + \nu_{\max}) \right\} \cdot \Pi_{2\nu_{\max}}(\nu)$$

<5 pts>

¹On aurait pu aussi utiliser directement la définition de la Transformée de Fourier et utiliser un changement de variable

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x(t) \cos(2\pi\nu_0 t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\frac{\exp(2\pi j\nu_0 t) + \exp(-2\pi j\nu_0 t)}{2} \right) \exp(-j2\pi\nu t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-2\pi j(\nu - \nu_0)t) dt + x(t) \exp(-2\pi j(\nu + \nu_0)t) dt \\ &= X(\nu - \nu_0) + X(\nu + \nu_0) \end{aligned}$$



1.(e)

En réalisant une permutation du spectre du signal vocal, on a inversé l'ordre des fréquences composant le signal sonore. Plus précisément, les fréquences initialement aiguës deviennent graves et inversement les composantes fréquentielles graves du message $x(t)$ sont devenues aiguës. Cette inversion de fréquences rend le message incompréhensible et permet donc de crypter le message pour quelqu'un qui ne disposerait pas des moyens que l'on va voir par la suite, pour le décrypter.

<4 pts>

1.(f)

Pour retrouver le signal original à partir du signal crypté, il faut refaire les deux opérations précédentes ; à savoir 1-) la multiplication du signal crypté par $\cos(2\pi\nu_{\max}t)$ et 2-) le filtrage Passe-Bas de fréquence de coupure ν_{\max} . Graphiquement, cela s'explique bien

<4 pts>

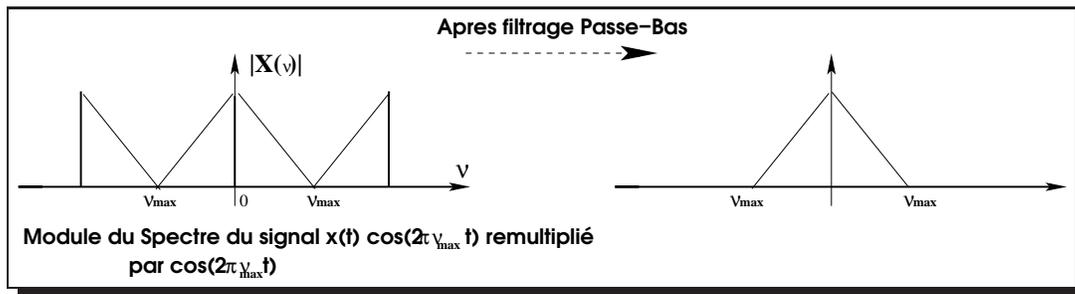


FIG. 4 – Décryptage par 1-) multiplication du signal crypté par $\cos(2\pi\nu_{\max}t)$ et 2-) filtrage Passe-Bas de fréquence de coupure ν_{\max} .

1.(g)

$$\begin{aligned}
 y(t) \cos(2\pi\nu_{\max}t) &= x(t) \cdot \cos^2(2\pi\nu_{\max}t) \\
 &= \frac{x(t)}{2} \cdot (1 + \cos(4\pi\nu_{\max}t)) \stackrel{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} X(\nu) * \left(\delta(\nu) + \frac{1}{2} \delta(\nu - 2\nu_{\max}) + \frac{1}{2} \delta(\nu + 2\nu_{\max}) \right) \\
 &\stackrel{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} X(\nu) + \frac{1}{2} X(\nu - 2\nu_{\max}) + \frac{1}{2} X(\nu + 2\nu_{\max})
 \end{aligned}$$

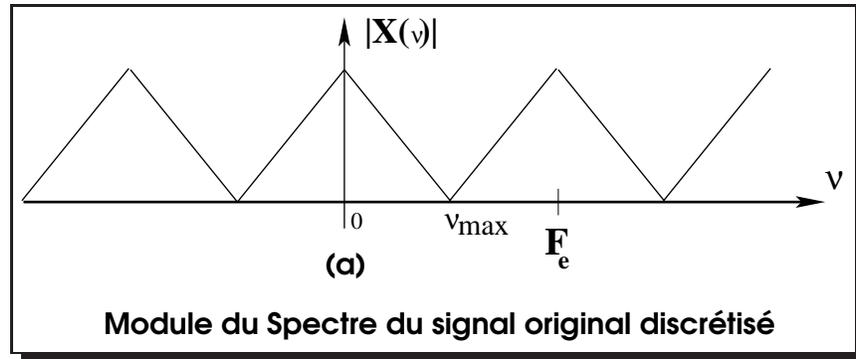
Ce calcul nous permet de retrouver les opérations nécessaires pour retrouver le spectre du signal original $X(\nu)$ à partir du spectre du signal crypté multiplié par $\cos(2\pi\nu_{\max}t)$. Il s'agit de faire, en deuxième opération, un filtre passe-bas à la fréquence de coupure ν_{\max} qui aura pour effet d'éliminer $X(\nu + 2\nu_{\max})$ et $X(\nu - 2\nu_{\max})$. On retrouve ainsi les opérations nécessaires au décryptage du signal $y(t)$, trouvé à la question précédente.

<4 pts>

2.(a)

Le spectre est périodique de période F_e car le signal est discrétisé avec cette fréquence d'échantillonnage.

<3 pts>

**2.(b)**

L'algorithme de cryptage est formulé par l'équation suivante $y_k = (-1)^k x_k$

<4 pts>

2.(c)

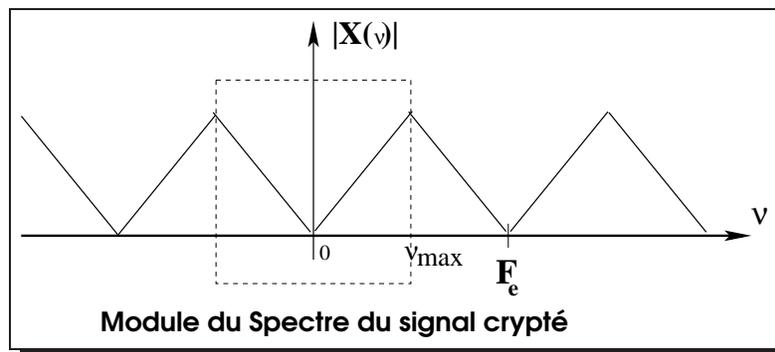
On utilise la propriété suivante de la Transformée en Z : $\mathcal{Z}[a^k x(k)] = X\left(\frac{z}{a}\right)$ Donc on a $Y(z) = X(-z)$.

<3 pts>

$$Y\left(\exp(2\pi j\nu)\right) = X\left(-\exp(2\pi j\nu)\right) = X\left(\exp(j\pi) \exp(2\pi j\nu)\right) = X\left(\exp(2\pi j[\nu + \frac{1}{2}])\right)$$

Et donc, (en fréquence numérique) : $Y(\nu) = X(\nu + \frac{1}{2})$

<4 pts>



NOTA : L'opération de cryptage temporelle $y_k = (-1)^k x_k$ est similaire en fait à l'opération de recalage cyclique que l'on a déjà utilisé pour recentrer le spectre d'une image du centre informatique au centre de l'image (cf. slide 8 Chap. TF discrète). En effet, en fréquence numérique, on a bien :

$$y(k) = x(k) \cdot (-1)^k = x(k) \cdot \exp\left(-2\pi jk\left(\frac{1}{2}\right)\right) \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\Leftrightarrow} X(\nu) * \delta\left(\nu + \frac{1}{2}\right) = X\left(\nu + \frac{1}{2}\right) = Y(\nu)$$