



DIRO
IFT 3205

EXAMEN INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *21/02/2011*

I	Transformée de Fourier (40 pts)
II	Spectre-Échantillonnage-Reconstruction (23 pts)
III	Filtrage (48 pts)
Total	111 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Transformée de Fourier (40 pts)

1. Soit une Gaussienne d'écart type σ_x et sa TF qui est aussi une Gaussienne mais d'écart type σ_ν . Estimer à quoi est égale le produit $\sigma_x \sigma_\nu$.

<5 pts>

2. Soit la fonction signe (i.e., $\text{sgn}(x)$) :

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- (a) Préciser pourquoi on ne peut utiliser directement la définition de la TF (basée sur le calcul intégral) pour mener à bien le calcul de la transformée de Fourier de cette fonction.

<5 pts>

- (b) Montrer graphiquement ou mathématiquement que $\Pi(x) = \frac{1}{2} \left\{ \text{sgn}(x + \frac{1}{2}) - \text{sgn}(x - \frac{1}{2}) \right\}$ avec $\Pi(x)$, la fonction "Porte" vue en cours.

<5 pts>

- (c) Calculer $\mathcal{F}(\text{sgn}(x))$ en utilisant la dernière égalité.

<5 pts>

3. Soit $\Pi(x)$ la fonction porte (de largeur unité). Calculer l'expression suivante : $\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Pi(x) \star \Pi(x)) \right\}$ dans laquelle \star désigne l'opérateur de convolution.

<5 pts>

4. Montrer que l'on a la relation suivante : $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x)$

<5 pts>

5. En sachant que $\delta'(x) \star f(x) = f'(x)$, trouver la TF de $\delta'(x)$ et en déduire (avec la propriété duale) la TF de la fonction x .

<5 pts>

6. En s'aidant de la TF, montrer que $\frac{\partial f(x)}{\partial x} \star g(x) = f(x) \star \frac{\partial g(x)}{\partial x}$

<5 pts>

Réponse

1.

Avec la convention $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$, on a montré en cours que : $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \exp(-2\pi^2\sigma_x^2\nu^2)$

$$\text{or } \exp(-2\pi^2\sigma_x^2\nu^2) = \exp\left\{-\frac{\nu^2}{2\left(\frac{1}{2\pi\sigma_x}\right)^2}\right\} = \exp\left\{-\frac{\nu^2}{2\sigma_\nu^2}\right\} \quad \text{avec } \sigma_\nu = \frac{1}{2\pi\sigma_x}$$

On trouve alors que : $\sigma_x \sigma_\nu = (2\pi)^{-1}$

<5 pts>

NOTA : On retrouve dans cette question, le principe bien connue de dilatation-contraction propre à la transformée de Fourier et le résultat est à rapprocher avec la relation d'incertitude d'Heisenberg.

2.(a)

On ne peut utiliser le calcul intégral pour calculer $\mathcal{F}[\text{sgn}(x)]$ car le signal $\text{sgn}(x)$ n'est pas à énergie finie.

<5 pts>

2.(b)

$$\frac{1}{2} \operatorname{sgn}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x > -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x < -\frac{1}{2} \end{cases} \quad -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } x > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{sgn}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2} : \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

qui est bien la fonction "Porte".

<5 pts>

2.(d)

On va néanmoins pouvoir néanmoins trouver cette TF en utilisant les TFs de fonctions déjà connues, notamment celle de la fonction "Porte". On a donc

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{sgn}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right) \right\} \\ &\quad \downarrow \mathcal{F} \\ \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} &= \frac{1}{2} \exp\left(2\pi j \frac{1}{2} \nu\right) \cdot \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(x)] - \frac{1}{2} \exp\left(-2\pi j \frac{1}{2} \nu\right) \cdot \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(x)] \\ &= \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(x)] \cdot \left\{ \frac{1}{2} \exp(\pi j \nu) - \frac{1}{2} \exp(-\pi j \nu) \right\} \\ &= \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(x)] \cdot j \sin(\pi j \nu) \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(x)] = \frac{1}{j\pi\nu} \quad < 5 \text{ pts } >$$

NOTA : Puisque la fonction $\operatorname{sgn}(x)$ est impaire, on retrouve bien une transformée de Fourier qui est imaginaire pure (propriété de symétrie hermitienne).

3.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Pi(x) \star \Pi(x)) \stackrel{\mathcal{F}}{=} (2\pi j \nu)^2 \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} \right)^2 = -4 \sin^2(\pi\nu) \quad < 5 \text{ pts } >$$

4.

$$\text{Propriété de contraction-dilatation : } \delta(\alpha x) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{1}{|\alpha|} \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{=} \frac{1}{|\alpha|} \delta(x) = \delta(\alpha x) \quad < 5 \text{ pts } >$$

NOTA : On aurait pu dire que l'intégrale d'un Dirac est toujours l'unité (car il est défini comme étant la limite, quand T tend vers 0 de la fonction porte d'intégrale unité et de largeur T) et retrouver cette propriété par un changement de variable $x = \alpha y$

$$\int \delta(x) dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int \delta(\alpha y) dy = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int \delta(x) dx = \int \delta(\alpha x) dx$$

Par identification et puisque l'aire est toujours positif, on a $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x)$.

5.

$$\begin{aligned} \delta'(x) * f(x) &= f'(x) \\ \Downarrow \mathcal{F} \\ \mathcal{F}[\delta'(x)] \cdot F(\nu) &= 2\pi j\nu \cdot F(\nu) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}[\delta'(x)] = 2\pi j\nu$ et en utilisant la propriété duale : $\mathcal{F}^{-1}[\delta'(\nu)] = -2\pi jx$ et donc :

$$x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{\delta'(\nu)}{-2\pi j} \quad < \mathbf{5 \text{ pts}} >$$

NOTA : Pour trouver que $\mathcal{F}[\delta'(x)] = 2\pi j\nu$ on aurait pu aussi simplement dire que $\mathcal{F}[\delta'(x)] = 2\pi j\nu \cdot \mathcal{F}[\delta(x)] = 2\pi j\nu$.

6.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} * g(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} (2\pi j\nu F(\nu)) \cdot G(\nu) = F(\nu) \cdot (2\pi j\nu) G(\nu) \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftharpoons} f(x) * \frac{\partial g(x)}{\partial x} \quad < \mathbf{5 \text{ pts}} >$$

II. Spectre-Échantillonnage-Reconstruction (15 pts)

1. Pouvez vous expliquer brièvement quel est le phénomène qui se passe pour cette image (cf. Figure 1) ? L'image *non bruitée* est composée de cercles concentriques dont les rayons se rapprochent de plus en plus.

< **5 pts** >

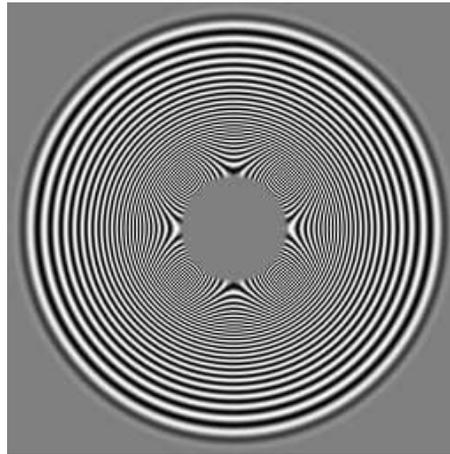


FIG. 1 –

2. Associer à chacune des images le spectre (module de la TF) correspondant et expliquez pourquoi vous avez fait ce choix (cf. Figure 2) ?

< **10 pts** >

3. Soit l'image $f(x, y)$ Lena.pgm déjà vue en TP et dont le spectre $F(u, \nu)$ est montré dans la figure ci-dessous. Que devient le spectre $F(u, \nu)$ de l'image Lena si on met à zéro les niveaux de gris d'une colonne sur deux de $f(x, y)$. Écrire mathématiquement à quoi correspond cette opération de dégradation et exprimer en fonction de $F(u, \nu)$ à quoi va ressembler son spectre $F_d(u, \nu)$.

< **8 pts** >

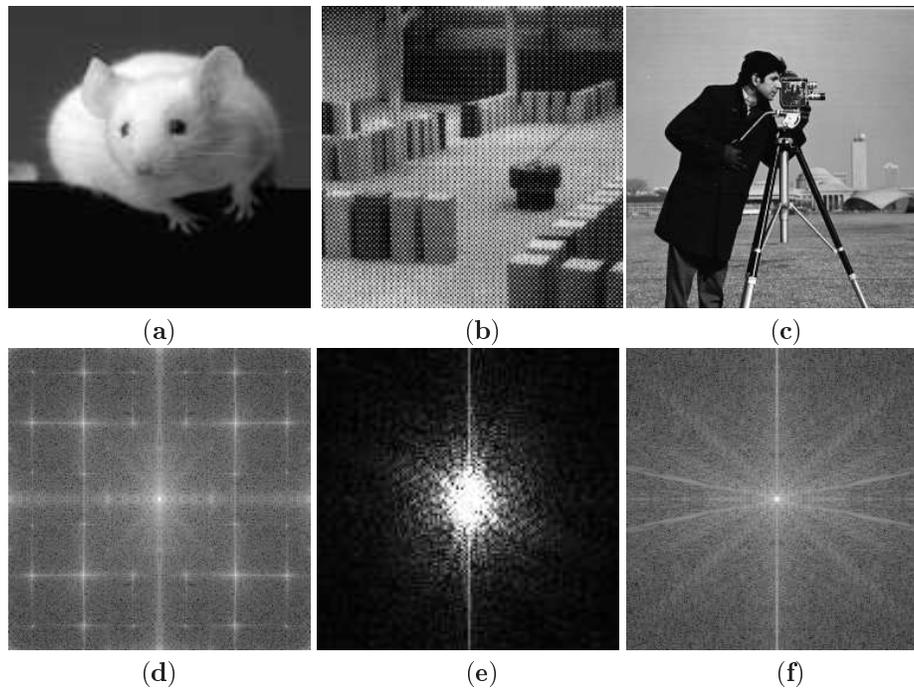


FIG. 2 – *Trois Images et trois spectres ...*



FIG. 3 – *Lena et son spectre*

Réponse

1.

C'est l'effet moiré, d'aliasing, de sous-échantillonnage ou encore l'effet du repliement de spectre. De par sa nature (des cercles concentriques dont les rayons se rapprochent de plus en plus), il est impossible de trouver une période d'échantillonnage assez petite pour éviter le repliement de spectre de cette image.

<5 pts>

2.

Image (a) avec spectre (e) : l'image de la souris présente une discontinuité ou transition brutale suivant l'axe des x qui se traduit par une TF présentant de nombreuses fréquences spatiales suivant l'axe des ν (associé à l'axe des y).

Image (c) avec spectre (f) : l'image du caméra-man présente spatialement de nombreuses discontinuités suivant différents axes que l'on retrouve dans le domaine fréquentiel (de nombreuses et importantes fréquences spatiales associées à différents axes).

Image (b) avec spectre (d) : l'image est discrétisée par une sorte de peigne de Dirac bidimensionnel pondéré. Dans le domaine fréquentiel, cela se traduit par une convolution du motif spectral de base par un peigne de Dirac bidimensionnel pondéré (périodisation du motif spectral). <10 pts>

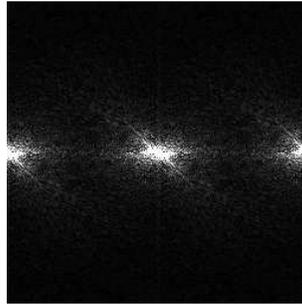
3.

Si on considère que l'axe des x représente les différentes lignes de l'image et l'axe des y , celui des colonnes, on pourrait donner à cette dégradation sur l'image $f(x, y)$ (appelons la $f_d(x, y)$) la représentation mathématique suivante;

$$f_d(x, y) = f(x, y) \cdot \text{III}_{T=2}(y) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad F(u, \nu) * \text{III}_{T=1/2}(\nu)$$

Le spectre se répète ($* \text{III}$) donc en ν avec une période équivalente à la moitié de l'image ($T = 1/2$) de l'image. <8 pts>

NOTA : On obtient ce spectre



III. Filtrage (48 pts)

1. Calcul de la MTF d'un masque de convolution

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

- Séparer ce filtre en deux masques de convolution une dimension (l'un en x (vertical), l'autre en y (horizontal)). Dans le cas où l'un des deux avait tous ses coefficients positifs, ajouter lui le facteur de normalisation nécessaire pour qu'après filtrage de l'image par ce masque de convolution, l'image conserve sa moyenne de niveaux de gris.
<4 pts>
- Trouver les expressions mathématiques et l'allure des réponses fréquentielles (module de la TF) du masque de convolution $h(x, y)$ donné ci-dessous respectivement en u (horizontalement) et en ν (verticalement).
<10 pts>
- Tracer sommairement l'allure de sa réponse fréquentielle (module) en u et en ν . Expliquer pourquoi une représentation de ces réponses fréquentielles sur $[-0.5, 0.5]$ est satisfaisante.
<5 pts>
- De quel type de filtre pour chacune des dimensions considérées (passe-bas, passe-haut, Passe-bande, etc.) s'agit t-il? Pouvait-on prévoir le résultat juste en regardant les coefficients de ce filtre? Expliquer maintenant qualitativement ce que va faire ce masque de convolution.
<5 pts>

2. Calculer le masque de convolution 3×1 horizontal (3 colonnes, et 1 ligne) associée, sur le signal 1D $f(x)$, discrétisant l'opération mathématique suivante :

$$f(x) - k \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \quad k \in \mathbb{R}^+$$

<10 pts>

3. Trouver le masque de convolution 1 dimension suivant x (4 colonne, 1 ligne) qui réalise une dérivée troisième (i.e., si $f(x, y)$ correspond au niveau de gris de l'image en (x, y) , le masque de convolution réalisant $\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3}$).

<7 pts>



4. On vient de réaliser un flou sur l'image MONA en procédant dans le domaine spectral et en utilisant l'algorithme de FFT (Fast Fourier Transform) et un filtre de moyenne de taille 15×15 . On obtient le résultat montré à droite de l'image MONA. Expliquer en justifiant pourquoi il existe (sur l'image rendue floue) une sorte de grosse ligne noire sur le côté supérieur de l'image (i.e., sur les premières lignes de l'image floue).

<7 pts>

Réponse

1.(a)

Filtre séparable mais non symétrique $\blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ en x et $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en y <4 pts>

1.(b)

• En $x \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} u$ et en utilisant un facteur de normalisation $1/4$ (pour conserver la moyenne de l'image après filtrage)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(h(x)) = H(u) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-2\pi j u x) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi j u x), \\ &= \frac{1}{4} [\exp(2\pi j u) + 2 + \exp(-2\pi j u)] = \frac{1}{4} [2 + 2 \cos(2\pi u)] = \frac{1 + \cos(2\pi u)}{2}. \quad < 5 \text{ pts} > \end{aligned}$$

NOTA : On aurait pu prévoir à l'avance que cette MTF allait être réelle, car le masque de convolution est pair.

• En $y \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$

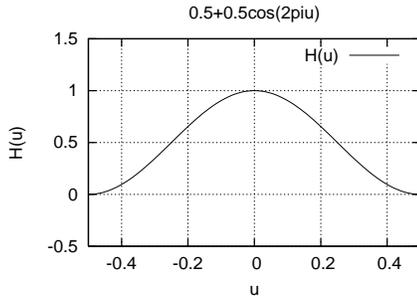
$$\begin{aligned} \mathcal{F}(h(y)) = H(\nu) &= \sum_{y=-\infty}^{+\infty} h(y) \exp(-2\pi j \nu y) = \sum_{y=-1}^{+1} h(y) \exp(-2\pi j \nu y), \\ &= -\exp(2\pi j \nu) + \exp(-2\pi j \nu) = -2j \sin(2\pi \nu). \end{aligned}$$

En module on a donc $|H(\nu)| = |2 \sin(2\pi\nu)|$ <5 pts>.

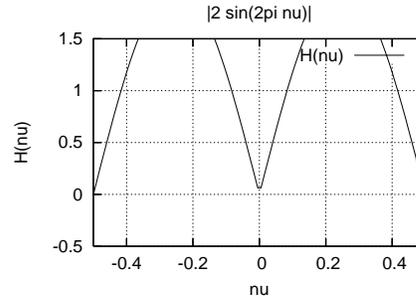
NOTA : On aurait pu prévoir à l'avance que cette MTF allait être imaginaire pure, car le masque de convolution est impair.

1.(c)

On trouve graphiquement



<2.5 pts>



<2.5 pts>

Le spectre est périodique puisque le signal dans le domaine spatial est discret et il se répète tous les $1/T_e = 1/\Delta x = 1$ (fréquence numérique puisqu'à aucun moment, on ne connaît la période d'échantillonnage). Donc un support de 1 dans le domaine spectral est suffisant. Comme on est intéressé à voir (mathématiquement) l'allure spectrale de cette MTF centrée en 0, une réponse fréquentielle sur $[-0.5, 0.5]$ est satisfaisante.

<2 pts>

1.(d)

En x , c'est un filtre passe-bas <0.5 pt>; ce que l'on pouvait prévoir en constatant que tous les coefficients de ce filtre sont positifs <1 pt>.

En y , c'est un filtre passe-haut <0.5 pt>; ce que l'on pouvait un peu prévoir en constatant que certains des coefficients de ce filtre sont négatifs (à la rigueur un filtre Passe-bande mais la bande de fréquence de ce filtre est largement concentrée dans les hautes fréquences). On reconnaît, grâce au cours, qu'il s'agit de l'opérateur gradient en y (horizontal), qui est bien un filtre passe-haut <1 pt>.

Finalement ce filtre va lisser en x et calculer une dérivée en y . Il sert à faire la détection des contours (horizontaux grâce au filtre passe-haut en y) tout en étant robuste au bruit (grâce au filtre passe-bas en x).

<2 pts>

NOTA : Si on voulait être précis, ce filtre va laisser passer les hautes fréquences avec une fréquence (numérique) de coupure (largeur à mi-hauteur de 2) $\nu_1 \approx 0.085$ et $\nu_2 \approx 0.415$ et donc atténuer plutôt que laisser passer les hautes fréquences supérieures à la fréquence numérique $\nu_2 \approx 0.415$. Mais à quoi correspond cette fréquence numérique de $\nu_2 \approx 0.415$ en terme de période (ou nombre) de pixels? 0.5, la plus grande fréquence numérique, correspond à $1/2$ ou $1/(2T_e)$ avec $T_e = 1 =$ longueur du pixel. La fréquence numérique de $\nu_2 \approx 0.415$ correspond à une période de $1/(0.415 * 2) \approx 1.20$ pixel soit 1 pixel. Des edges de 1 pixel (de longueur) ne seront pas détectés par ce filtre. Par contre les hautes fréquences maximales de $\nu_{\max} = 0.25$ seront amplifiées par deux et très bien détectées. Cette fréquence numérique de 0.25 correspond à une période de $1/(0.25 * 2) = 2$ pixels. Les edges s'étalant sur deux pixels seront détectés par ce filtre.

Cela est bien vérifié spatialement car :

- Soit un signal 1D de 5 pixels de long et toroidal (circulaire) du type $\boxed{1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0}$ convolué avec notre masque $\boxed{-1\ 0\ 1}$ donnerait $\boxed{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}$: contour (de période 1) non détecté.
- Par contre un signal 1D de 5 pixels de long et toroidal (circulaire) du type $\boxed{1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0}$ convolué avec notre masque $\boxed{-1\ 0\ 1}$ donnerait $\boxed{0\ 1\ -1\ 0\ 1\ -1}$: contour (de période 2) détecté.

Cette particularité rend ce masque de convolution estimant le gradient horizontal plus robuste au bruit que

le simple masque de taille $[2 \times 1]$ $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$.

2.

On a vu en cours que $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ implémentait en $[3 \times 1]$, la dérivée seconde. Donc

$$\begin{aligned} f(x) - k \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \\ f(x) * \left(\delta(x) - k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \\ f(x) * \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ f(x) * \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k & -2k & k \end{bmatrix} \right) \\ f(x) * \left(\begin{bmatrix} -k & 2k+1 & -k \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

<10 pts>

3.

Par convolution répétée (d'un masque de convolution associé à une dérivée première et d'un masque de convolution associé à une dérivée seconde), on peut trouver le résultat immédiatement.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

La réponse, $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ est bonne aussi (en considérant cette fois des masques du type $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$)

<7 pts>

4.

Puisqu'on a utilisé une FFT, l'image MONA utilisée dans cette convolution est en fait l'image de MONA se répétant indéfiniment en ligne et colonne (ou cette même image mais toroidale). La grosse ligne noire que l'on voit est en fait le résultat du moyennage des niveaux de gris du haut de l'image (qui sont clairs) avec les niveaux de gris (très noirs) des dernières lignes de l'image.

<7 pts>